This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

600045622P

1836 d. 59

37.

GEOMETRIA ANALITICA

PARTE PRIMA

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Vincenzo Bona, Tip. di S. M. e dei RR. Principi.

TEORIA ANALITICA

DELLE

FORME GEOMETRICHE FONDAMENTALI

Lezioni date nella Regia Università di Torino

DAL PROFESSORE

ENRICO D'OVIDIO

TORINO

ERMANNO LOESCHER

FIRENZE — ROMA

Via Tornabuoni, 20 Via del Corso, 307

1885

CAPITOLO VI. — **Stelle di rette e di piani.**

Coordinate degli elementi di una stella	§§ 53	*pag.* 109
Projezioni su un piano	54	110
Forme di 2ª specie omografiche e projettive	55, 56	111
Forme di 2ª specie correlative	57	113
Triedrometria e trigonometria sferica	58	114

CAPITOLO VII. — **Spazio punteggiato.**

Coordinate	59, 60	120
Baricentri. — Punti di una retta o di un piano	61, 62, 63	122
Relazioni angolari, distanze, angoli	64, 65	126
Area del triangolo	66	133
Volume del tetraedro	67	135
Trasformazione di coordinate	68, 69	139
Equazioni di luoghi (superficie e linee)	70	144
Il piano come luogo di 1° grado	71	145
Fascio di piani	72	147
Equazioni di una retta	73	149
Stella di piani	74, 75	151
Equazione normale del piano	76	153
Distanza fra punto e piano	77	155
Angolo di due piani	78	156
Spazî omografici	79	159

CAPITOLO VIII. — **Spazio di piani.**

Coordinate di piani	80	163
Alcune applicazioni	81, 82	164
Spazî correlativi	83	166

CAPITOLO IX. — **Spazio rigato.**

Coordinate di rette nello spazio	84, 85	169
Angolo, momento e distanza di due rette	86, 87	172
Angolo fra una retta e un piano	88	176
Distanza fra una retta e un punto	89	177
Complessi, congruenze, rigate	90, 91	178

CAPITOLO X. — **Coordinate omogenee.**

Concetto di coordinate omogenee	92	183
Forme di 1ª specie	93	185
Forme di 2ª specie	94	187
Applicazioni	95, 96, 97	189
Forme di 3ª specie	98	195
Applicazioni	99, 100, 101	198
Spazio rigato	102	201

Gli Esercizii si trovano in fine dei §§ 5, 9, 10, 12, 13, 18, 20, 21, 25, 29, 30, 31, 33, 45, 48, 52, 58, 63, 65, 66, 67, 68, 78, 79, 83, 89, 91.

INTRODUZIONE

Forme geometriche fondamentali.

§ 1. Le *figure*, il cui studio forma l'oggetto della Geometria, si compongono di punti, rette e piani. Questi punti, queste rette e questi piani possono appartenere ad uno dei seguenti sistemi:

1° *Retta punteggiata*, cioè il sistema di tutti i punti di una retta;

2° *Fascio di rette*, sistema delle rette di un piano e per uno stesso punto (del piano);

3° *Fascio di piani*, sistema dei piani per una retta;

4° *Piano punteggiato*, sistema dei punti di un piano;

5° *Piano rigato*, sistema delle rette di un piano;

6° *Stella di rette*, sistema delle rette per un punto;

7° *Stella di piani*, sistema dei piani per un punto;

8° *Spazio punteggiato*, sistema dei punti dello spazio;

9° *Spazio di piani*, sistema dei piani dello spazio.

Questi nove sistemi chiameremo *forme geometriche fondamentali*. *Elementi* di ciascun sistema sono i punti, o rette, o piani, che lo compongono. *Sostegno* di ciascun sistema è il punto, o retta, o piano, o spazio, cui tutti gli elementi del sistema appartengono.

Così: una retta punteggiata ha per elementi dei punti e per sostegno una retta (*raggio*); un fascio di piani ha per elementi dei piani e per sostegno una retta (*asse* del fascio); un fascio di rette ha per elementi delle rette e per sostegni un piano e un punto (*centro* del fascio); una stella di rette o di piani ha per sostegno un punto (*centro* della stella); e così via.

Coordinate. Geometria analitica.

§ **2.** *Individuare* un elemento di un sistema vuol dire: determinare quell'elemento in modo da distinguerlo da tutti gli altri.

Noi vedremo come gli elementi di una delle prime tre forme (la punteggiata e le due sorta di fasci) si possano individuare facendo corrispondere a ciascun elemento un numero; in modo che, dato un elemento, sia individuato il numero corrispondente, e viceversa, dato un numero, sia individuato l'elemento corrispondente. Questi numeri si diranno *coordinate* degli elementi corrispondenti.

Vedremo anche come per individuare ciascun elemento di una delle forme 4ª, 5ª, 6ª, 7ª (le due sorta di sistemi piani e di stelle) occorrano due numeri, e per individuare ciascun elemento di una delle due ultime forme (spazio di punti e di piani) occorrano tre numeri. Questi numeri diremo ancora *coordinate* degli elementi corrispondenti di quelle forme.

In causa di queste differenze nel modo di individuarne gli elementi, quelle nove forme geometriche si sogliono distinguere in tre specie: le prime tre forme si dicono di *1ª specie*, le seguenti quattro di *2ª specie*, le ultime due di *3ª specie*. Si dicono anche rispettivamente forme a *1*, *2*, *3 coordinate*, ovvero a *1*, *2*, *3 dimensioni;* ovvero *serie semplici*, *doppie*, *triple* di elementi; serie di ∞, ∞^2, ∞^3 elementi.

Si può anche considerare una 10ª forma geometrica fondamentale: cioè lo *spazio rigato*, vale a dire il sistema delle rette dello spazio. Questa forma ha però, come vedremo, un carattere affatto diverso dalle forme finora considerate. Siccome ogni suo elemento vedremo potersi (in generale) individuare mediante quattro numeri o coordinate, così lo spazio rigato costituisce una forma di *4ª specie*, o a *4 coordinate*, od a *4 dimensioni*.

La *Geometria analitica* investiga le proprietà delle figure con lo strumento delle coordinate. Le relazioni fra i punti, le rette e i piani delle figure vengono allora ad esprimersi mediante relazioni fra numeri, e quindi possono esser trattate col sussidio del calcolo. In particolare, le proprietà comuni a tutti i punti di una linea o

superficie vengono a tradursi in equazioni tra le coordinate di quei punti, sicchè lo studio delle linee e superficie si riduce allo studio analitico delle corrispondenti equazioni.

Anche le linee e superficie curve possono venire individuate da gruppi di numeri, che perciòd iconsi *coordinate* di esse.

Traccia delle coordinate per lo studio di certe figure si trova già, benchè sotto forma non evidente, nelle opere degli antichi geometri greci; ma essi non poterono trarne molto vantaggio, mancando loro il calcolo letterale o algebrico. Acquistato alla scienza questo utile strumento nel secolo decimosesto (per opera specialmente dei geometri italiani e del francese *Viète*), poterono i matematici nei secoli seguenti dare sviluppo al metodo delle coordinate o geometria analitica, che venne a costituire uno dei metodi più potenti e più usati per tutte le ricerche matematiche in generale, e particolarmente poi per quelle geometriche. La prima opera in cui siano stati esposti con chiarezza i principii di questo metodo, in guisa da elevarlo al grado di scienza, fu la *Geometria* di *Descartes* (1637); dopo la quale i geometri andarono successivamente adottandolo, abbandonando persino per lungo tempo quello più usato dagli antichi e che pure presentava i suoi vantaggi, cioè il metodo *sintetico*. Così la geometria analitica deve molti dei progressi che essa fece dopo *Descartes*, a *Newton*, *Mac-Laurin*, *Clairaut*, *Euler*, *Lambert*, *Lagrange*, *Monge*, e nel secolo presente a *Gergonne*, *Lamé*, *Bobillier*, *Möbius*, *Plücker*, *Chasles*, *Jacobi*, *Hesse*, *Cayley*, *Salmon*, *Clebsch*, *Cremona*, ecc., ecc. Il metodo delle coordinate poi congiunto col calcolo infinitesimale, che venne pure a comporsi in scienza nel secolo decimosettimo, diede luogo ad un ramo importante della geometria analitica; il quale, insieme collo stesso calcolo infinitesimale, trae la sua origine dai problemi celebri della determinazione delle tangenti, delle aree e delle lunghezze delle curve, e poi si svolse per opera specialmente di *Newton* e *Leibnitz*, del *Bernoulli*, di *Mac-Laurin*, *Euler*, *Monge*, *Meusnier*, *Dupin*, *Cauchy*, *Gauss*, *Kummer*, *Beltrami* ed altri.

Il concetto di *coordinate* vedremo essersi esteso altresì al caso, in cui ciascun ente di una serie continua qualunque di enti geometrici non sia individuato dai valori di certe quantità, nè li individui, ma solo li determini e ne sia determinato in un numero (finito od infinito) di modi formanti un sistema discontinuo.

La considerazione delle diverse forme geometriche fondamentali è dovuta a *Steiner* (*Systematische Entwickelung*, 1832; *Gesammelte Werke*, t. I, pag. 229). Essa è importantissima nella geometria moderna: non solo in quanto ogni figura geometrica si può considerare come appartenente ad una o più di quelle forme fondamentali; ma anche perchè queste si possono considerare come le figure più semplici, da cui, legandole coll'*omografia* o colla *correlazione*, si possono ottenere con metodo uniforme gran parte delle figure più complicate, come linee curve, superficie, ecc.

Alla considerazione di tali forme è intimamente legato lo sviluppo della *geometria projettiva*, cioè della scienza che studia quelle proprietà che non cessano di valere quando a date figure si sostituiscano loro projezioni (proprietà *projettive* delle figure). Questa scienza, di cui già si avevano varî teoremi, si formò nella prima metà di questo secolo per opera principalmente di *Poncelet*, *Möbius*, *Steiner*, *Chasles*, *Staudt*; ed

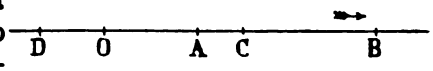
ottenne poi, mediante le ricerche di altri geometri che già nominammo, un rapido e largo incremento. Essa può esser trattata col metodo delle coordinate *(geometria analitica)*, oppure senza l'uso di queste *(geometria sintetica)*. E mentre da principio essa veniva considerata come un ramo di geometria distinto dalla *geometria metrica*, la quale studia le proprietà *metriche* (non projettive) delle figure, cioè le proprietà dipendenti necessariamente da misure di distanze, angoli, aree, ecc. (quali sono la massima parte delle proposizioni di geometria elementare); ora invece, in seguito ai lavori di *Chasles*, *Cayley*, *Klein* ed altri, si ritiene la geometria metrica come inclusa nella geometria projettiva, cioè come un caso particolare di essa. Laonde si può dire che tutta quella vastissima scienza che chiamiamo geometria, è geometria projettiva.

CAPITOLO I.

Retta punteggiata.

Segmenti e ascisse.

§ 3. Sopra una retta indefinita si fissi un punto O. A partire da esso possiamo percorrere la retta in due direzioni, l'una opposta all'altra. Dato un punto A sulla retta, è determinato il segmento che ha per origine O e per termine A, ed è pure determinata la direzione in cui il segmento vien percorso andando da O in A. Il segmento si può misurare, calcolando il numero x (razionale o irrazionale) che esprime il rapporto del segmento a una unità lineare fissata ad arbitrio; e se inoltre conveniamo di prendere questo numero positivamente o negativamente secondo che il segmento è percorso in una direzione o nella opposta, avremo che ad ogni punto A della retta corrisponderà un numero reale x, positivo o negativo. Viceversa: dato un numero reale x positivo o negativo, è determinato il segmento che esso misura e la direzione in cui il segmento è percorso, e quindi è individuato sulla retta un punto A tale che OA sia appunto quel segmento. Inoltre è chiaro che a punti diversi corrispondono numeri diseguali, e a numeri diseguali punti diversi; in particolare, a numeri differenti solo nel segno (opposti) x e $-x$ corrispondono punti simmetrici rispetto ad O, e a questo punto O corrisponde il numero *zero*. Il numero x può dunque assumersi come *coordinata* del punto che individua.



Il punto O si chiama *origine*, e le due direzioni considerate sulla retta si chiamano, l'una *positiva* e l'altra *negativa*. Rispetto a quell'origine e a queste direzioni, il numero x si chiama *ascissa* del punto A.

La retta punteggiata è dunque una forma ad una coordinata, o di 1ª specie.

Abbiansi sulla retta due punti **A B**. Il simbolo **AB** sta pel numero che misura il segmento o distanza fra **A** e **B**, numero positivo o negativo, secondo che andando da **A** in **B** si percorre il segmento nella direzione positiva o negativa della retta. In virtù di tale convenzione si ha, qualunque siano i due punti **A B** della retta, la relazione:

[1] $$\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}, \text{ ovvero } \mathbf{AB} + \mathbf{BA} = 0.$$

Fra tre punti **A B C** della retta si ha la relazione evidente:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} = 0, \text{ ovvero } \mathbf{AB} = \mathbf{AC} + \mathbf{CB},$$

[2] $$\mathbf{AB} = \mathbf{CB} - \mathbf{CA}.$$

Fra quattro punti **A B C D** della retta si ha la relazione:

[3] $$\mathbf{AB.CD} + \mathbf{AC.DB} + \mathbf{AD.BC} = 0,$$

la quale si dimostra osservando che per la [2] il primo membro può scriversi

$$\mathbf{AB}\,(\mathbf{AD} - \mathbf{AC}) + \mathbf{AC}\,(\mathbf{AB} - \mathbf{AD}) + \mathbf{AD}\,(\mathbf{AC} - \mathbf{AB}),$$

e sviluppato si riduce a zero.

Fra più punti qualunque **A B C . . . K L** della retta si ha la relazione:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \ldots + \mathbf{KL} + \mathbf{LA} = 0,$$

ovvero

$$\mathbf{AL} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \ldots + \mathbf{KL}.$$

Siano $x\,x'$ le ascisse di due punti **A B** della retta, rispetto a una origine **O** e ad una direzione positiva assegnata; ossia $\mathbf{OA} = x$, $\mathbf{OB} = x'$. La [2] porge

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA},$$
$$\mathbf{AB} = x' - x;$$

dunque: *il numero che misura la distanza da un punto a un altro è la differenza fra l'ascissa del 2° punto e l'ascissa del 1°.*

Può avvenire che, scelta un'origine **O**, convenga poi riferire i punti della retta a un altro dato punto **O'** come origine: allora occorre esprimere la primitiva ascissa x di un punto qualunque **A** mediante la sua nuova ascissa X, e viceversa. Posto $\mathbf{OO'} = a$, si ha $\mathbf{OO'} + \mathbf{O'A} + \mathbf{AO} = 0$, ossia $a + X - x = 0$; onde

$$x = X + a\ ,\ X = x - a.$$

Qui si è tacitamente supposto che, nella determinazione dei punti della retta mediante le nuove coordinate X, la direzione positiva della retta e l'unità lineare non si siano mutate: lasciamo al lettore trattare i casi in cui queste si mutino.

La determinazione dei punti di una retta mediante le loro distanze da un punto fisso fu introdotta dal *Viète* (1540-1603), al quale è dunque dovuto il primo sistema di coordinate per forme di 1ª specie. Ma il concetto, importantissimo nella geometria moderna, del *segno* dei segmenti, degli angoli, delle aree, ecc., fu introdotto metodicamente solo in questo secolo dal *Möbius* con la sua classica opera: *Der barycentrische Calcül* (1827).

Baricentri.

§ 4. Siano **A B C** tre punti della retta, e sia r il rapporto delle distanze **AC**, **CB**:

$$\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{CB}} = r, \text{ ovvero } \mathbf{AC} : \mathbf{CB} = r.$$

Se **A B** sono fissi e **C** muta posizione, anche r varia. E precisamente: quando **C** cade fra **A** e **B**, r è positivo (poichè **AC** e **CB** hanno lo stesso segno); e quando **C** non cade fra **A** e **B**, r è negativo. Se **C** cade in **A**, $r = 0$ (perchè allora $\mathbf{AC} = 0$ e $\mathbf{CB} = \mathbf{AB}$); se **C** va da **A** al punto medio fra **A** e **B**, r cresce (perchè **AC** cresce e **CB** decresce) da 0 a 1; se **C** prosegue verso **B**, r cresce indefinitamente: e quando **C** cade in **B**, r è infinito (poichè allora $\mathbf{AC} = \mathbf{AB}$

e $CB = 0$). Se C oltrepassa B, r diviene negativo, e il suo valore assoluto decresce, tendendo al valore 1 mentre C si allontana indefinitamente da B (poichè nella frazione $\frac{AC}{CB}$ i valori assoluti del numeratore e del denominatore crescono indefinitamente di quantità uguali). Che se C va da A nella direzione opposta, r è negativo, e il suo valore assoluto cresce, tendendo di nuovo a 1 mentre C si allontana indefinitamente. Esprimeremo questi fatti dicendo: che nel punto A si ha $r = \pm 0$, nel punto B si ha $r = \pm \infty$, e che *la retta ha un unico punto all'infinito*, pel quale $r = -1$.

La retta viene così ad esser considerata come rientrante in sè stessa . . . all'infinito.

Potremo anche dire che due punti A B dividono la retta in *due* segmenti, uno finito e l'altro infinito.

Se $x\, x'\, x''$ sono le ascisse dei punti A B C rispetto a un'origine O, si ha (§ 3) $AC = x'' - x$, $CB = x' - x''$, e però

$$\frac{x'' - x}{x' - x''} = r;$$

onde $$x'' - x = rx' - rx'' \ (1 + r),\ x'' = x + rx',$$

$$x'' = \frac{x + rx'}{1 + r},$$

formola che esprime l'ascissa di C mediante le ascisse di A e B e mediante il rapporto r.

Se i punti A B sono fissi e r varia, allora $x\, x'$ sono costanti e r variabile; e ad ogni valore di r corrisponde un valore di x'', e quindi una posizione del punto C. E precisamente: per $r = \pm 0$ si ha $x'' = x$, e C cade in A; essendo poi $x'' = \frac{\frac{1}{r}x + x'}{\frac{1}{r} + 1}$, per $r = \pm \infty$ si ha $\frac{1}{r} = \pm 0$, onde $x'' = x'$ e C cade in B; per $r = 1$ si ha $x'' = \frac{x + x'}{2}$, e C cade nel punto medio del segmento AB; per $r = 1$ si ha $x'' = \frac{x - x'}{0} = \pm \infty$, e C va all'infinito.

Il numero r soddisfa a tutte le condizioni per essere adoperato come coordinata del punto che individua, e noi lo chiameremo (per ragioni che tosto vedremo) *la coordinata baricentrica* di quel punto rispetto ai due punti di riferimento **A** e **B**. Confrontando questo sistema di coordinate con quello delle ascisse, noi vediamo che ai singoli punti della retta corrispondono, così nell'uno come nell'altro sistema, i singoli numeri (reali), ma in ordine differente.

Se m e l sono due numeri nel rapporto r (con segni arbitrarî), ossia se $m : l = r$; allora la espressione di x'' diviene

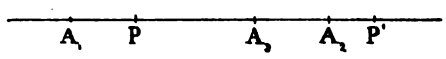
$$x'' = \frac{l x + m x'}{l + m} ;$$

ed evidentemente non si altera quando m e l si moltiplicano o si dividono entrambi per uno stesso numero arbitrario, vale a dire è omogenea e di grado zero in m e l.

§ 5. Siano $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$ due punti della retta. Pensiamo annessi ai punti $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$ rispettivamente due numeri m_1 m_2 (con segni arbitrarî), e sia **P** il punto per cui

$$\mathbf{A}_1\mathbf{P} : \mathbf{P}\mathbf{A}_2 = m_2 : m_1, \text{ ovvero } \mathbf{P}\mathbf{A}_1 : \mathbf{P}\mathbf{A}_2 = - m_2 : m_1.$$

Questo punto **P** (per analogia con la composizione di due forze parallele e in particolare di due pesi) diremo *baricentro* o *centro di gravità* dei due punti $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$ coi *pesi* m_1 m_2. E se x_1 x_2 sono le ascisse di $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$, l'ascissa di **P** sarà



$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} .$$

Sia ora dato un terzo punto $\mathbf{A}_3$ di peso m_3 e di ascissa x_3. Se a **P** annettiamo il peso $m_1 + m_2$, e poi cerchiamo il baricentro di **P** e $\mathbf{A}_3$, troviamo un altro punto **P'**, che diremo *baricentro* dei tre punti $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$ $\mathbf{A}_3$ coi pesi m_1 m_2 m_3. L'ascissa di **P'** sarà dunque

$$\frac{(m_1 + m_2) \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3}$$

ovvero

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

formola analoga alla precedente. Essa mostra che, in qualunque ordine si compongano i punti A_1 A_2 A_3 conservando i rispettivi pesi, si ottiene sempre lo stesso baricentro.

Proseguendo questa composizione con altri punti $A_4 \ldots A_k$ a cui si diano dei pesi $m_4 \ldots m_k$, noi giungiamo ad ottenere un punto, che diremo *baricentro* dei punti A_1 $A_2 \ldots A_k$ coi pesi m_1 $m_2 \ldots m_k$, e che ha per ascissa

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_k x_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k};$$

sicchè, in qualunque ordine si compongano i punti dati conservando i rispettivi pesi, risulta sempre lo stesso baricentro.

E si avverta che, moltiplicando o dividendo i numeri m_1 $m_2 \ldots m_k$ per uno stesso numero arbitrario, il baricentro rimane immutato.

Se $m_1 = m_2$, il baricentro dei due punti A_1 A_2 è il loro punto medio. In generale: se m_1 $m_2 \ldots m_k$ sono tutti eguali, il baricentro dei punti A_1 $A_2 \ldots A_k$ dicesi *centro delle medie distanze* dei punti stessi, e la sua ascissa è

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}.$$

Se $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = 0$, il baricentro è in generale il punto all'infinito.

Fissati nella punteggiata due punti A_1 A_2, ogni punto P di essa può considerarsi come baricentro di A_1 A_2, quando a questi si diano pesi convenienti m_1 m_2: basterà a tal fine prendere questi due numeri in modo che sia $m_1 : m_2 = PA_2 : A_1P$; il che mostra che solo il loro rapporto è individuato da P e non essi stessi. Questi due numeri m_1 m_2, i cui valori possono servire ad individuare i singoli punti P della punteggiata, ma che moltiplicati entrambi per una stessa quantità qualunque non cessano d'individuare lo stesso punto, si chiamano *coordinate omogenee* dei punti della punteggiata, e costituiscono precisamente il sistema delle *coordinate baricentriche* del Möbius (*Barycentrische Calcül*). L'introduzione di due coordi-

nate omogenee in luogo di una sola (non omogenea) presenta il vantaggio di dare omogeneità e simmetria alle formole.

Il rapporto delle due coordinate baricentriche omogenee può pure servire, come notammo al § 4, per coordinata; ed è quella che noi chiamammo *la coordinata baricentrica* (non omogenea).

Esercizio 1. Individuare i punti di ascisse

$$1, -1, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Calcolare le loro mutue distanze, e i rapporti delle distanze dei due primi da ciascuno degli altri.

Es. 2. La distanza di due punti di coordinate baricentriche (non omogenee) $r\ r'$ è

$$d\,\frac{r'-r}{(1+r)(1+r')},$$

se d è la distanza dei due punti di riferimento.

Es. 3. L'ascissa di un punto rispetto a un'origine **O** sia x, e la coordinata baricentrica del punto rispetto ai due punti **A B** sia r: indicando con a l'ascissa di **A**, avremo

$$r = \frac{x-a}{a+d-x}, \quad x = \frac{(a+d)\,r+a}{r+1}.$$

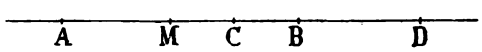
Queste formole ci dànno la coordinata baricentrica espressa in funzione dell'ascissa, e questa in funzione di quella. Come si vede, ciascuna di queste coordinate è espressa da un fratto, in cui numeratore e denominatore sono funzioni di 1° grado dell'altra coordinata.

Es. 4. Supposte date le coordinate baricentriche di due punti **A′ B′** rispetto ai due punti **A B**, esprimere la coordinata baricentrica r di un punto qualunque rispetto a **A** e **B**, mediante la coordinata baricentrica r' dello stesso punto rispetto a **A′ B′**; in altri termini trovare la formola che serve pel passaggio da un sistema di coordinate baricentriche a un altro. Si troverà che anche questa formola presenta il carattere notato in quelle dell'es. 3.

Es. 5. In una retta il baricentro di più punti dati è quel punto, le cui distanze da' punti dati moltiplicate pe' rispettivi pesi dànno una somma nulla.

Gruppi armonici di punti.

§ 6. Siano A B C tre punti della retta, e sia $AC : CB = r$. Consideriamo il punto D per cui $AD : DB = -r$. Se il punto C cade nel segmento compreso fra A e B, allora D cade fuori di esso, e viceversa. I due punti C D si trovano sempre da una stessa banda dal punto M medio fra A e B. Ad ogni posizione del punto C ne corrisponde una di D, e viceversa; se muovendosi C e quindi D, il punto C viene nella posizione prima occupata da D, il punto D andrà nella posizione prima occupata da C. La corrispondenza tra C e D è dunque *univoca* e *reciproca*. Due punti corrispondenti diconsi perciò *coniugati*. In particolare: se C cade in A, anche D cade in A; se C cade in B, anche D cade in B; se C cade in M, D va all'infinito.



Per ipotesi

$$[1] \qquad \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB},$$

e quindi

$$\frac{CB}{AC} = -\frac{DB}{AD}, \quad \frac{AB - AC}{AC} = \frac{AD - AB}{AD}, \quad \frac{AB}{AC} - 1 = 1 - \frac{AB}{AD},$$

ossia

$$[2] \qquad \frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}.$$

O altrimenti: se $x\ x'\ x''\ x'''$ sono le ascisse di A B C D rispetto a un'origine O, si ha

$$x'' = \frac{x + rx'}{1 + r}, \quad x''' = \frac{x - rx'}{1 - r};$$

ora se si sceglie A per origine, x è zero e si ha

$$x'' = \frac{rx'}{1 + r}, \quad x''' = -\frac{rx'}{1 - r},$$

onde

$$\frac{1}{x''} = \frac{1+r}{rx'} = \frac{1}{rx'} + \frac{1}{x'}\,,\ \frac{1}{x'''} = -\frac{1}{rx'} + \frac{1}{x'}\,,$$

$$\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{x'} - \frac{1}{x'''}\,,$$

relazione che non differisce dalla [2].

La [2] ci mostra che i valori inversi di **AC AB AD** sono in progressione aritmetica: dunque **AC AB AD** sono in *progressione armonica* (*), ossia **AB** è *medio armonico* fra **AC** e **AD**. Perciò i due punti **C D** si dicono *coniugati armonici* rispetto ad **A** e **B**.

Viceversa, **A** e **B** sono coniugati armonici rispetto a **C** e **D**; perchè la [1] dà

$$\frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{AD}} = -\frac{\mathbf{CB}}{\mathbf{BD}}\,;$$

ovvero anche perchè si ha per ipotesi (con un'origine qualunque)

$$x + rx' = (1+r)x''\,,\ x - rx' = (1-r)x'''\,,$$

onde

$$x = \frac{(1+r)\,x'' + (1-r)\,x'''}{2} = \frac{x'' + \frac{1-r}{1+r}\,x'''}{1 + \frac{1-r}{1+r}}\,,$$

$$x' = \frac{(1+r)\,x'' - (1-r)\,x'''}{2r} = \frac{x'' - \frac{1-r}{1+r}\,x'''}{1 - \frac{1-r}{1+r}}\,,$$

le quali provano che **A** e **B** sono coniugati armonici rispetto a **C** e **D**, e che inoltre

$$\frac{\mathbf{CA}}{\mathbf{AD}} = -\frac{\mathbf{CB}}{\mathbf{BD}} = \frac{1-r}{1+r}\,.$$

(*) In generale: più numeri diconsi in *progressione armonica* quando i loro inversi sono in progressione aritmetica. Questa denominazione fu originata dal fatto, che le lunghezze di tre corde sonore, che diano l'accordo perfetto *do-mi-sol*, stanno tra loro come i numeri 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, i cui inversi sono appunto in progressione aritmetica.

Si dice anche che le due coppie di punti **AB**, **CD** formano un *gruppo armonico* di punti.

Dalla [2] si deduce

$$[3] \qquad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD},$$

teorema di MAC-LAURIN.

La [1] può scriversi

$$\frac{MC - MA}{MB - MC} = \frac{MA - MD}{MB - MD},$$

onde togliendo i fratti e ricordando che $MB = -MA$,

$$[4] \qquad MC.MD = MA^2.$$

Od altrimenti: se si sceglie per origine **M**, si ha $x = -x'$, e però

$$x'' = \frac{1-r}{1+r}x, \quad x''' = \frac{1+r}{1-r}x,$$

onde

$$x''x''' = x^2,$$

che non differisce dalla [4].

Doppio rapporto di quattro punti.

§ 7. Siano **A B C D** quattro punti di una retta. Si formi il rapporto $\frac{AC}{BC}$ delle distanze (prese coi debiti segni) dei due primi dal terzo, e il rapporto $\frac{AD}{BD}$ delle distanze dei due primi dal quarto: il rapporto fra questi due rapporti $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ si dirà *doppio rapporto* dei quattro punti **A B C D** (denominazione introdotta dal MÖBIUS ed usata in seguito da tutti i geometri tedeschi), e s'indicherà col simbolo **(ABCD)**; sicchè

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC.BD}{AD.BC}.$$

Il doppio rapporto di quattro punti dipende dal loro ordine. Ma, sebbene le permutazioni di quattro punti siano 24, i doppî rapporti che ad esse corrispondono non sono tutti differenti. Infatti l'espressione $\frac{AC.BD}{AD.BC}$ non si altera se si scambiano contemporaneamente due punti e gli altri due, cioè **A** con **B** e **C** con **D**, ovvero **A** con **C** e **B** con **D**, ovvero **A** con **D** e **B** con **C**; onde

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA);$$

ossia: *un doppio rapporto di quattro punti non si altera se si scambiano due punti fra loro e gli altri due fra loro.*

Con uno di tali doppî scambî si può portare in primo posto quel punto che si vuole, p. e. **A**, senz'alterare il valore del doppio rapporto; e però siamo ridotti a considerare i seguenti *sei doppî rapporti:*

$$(ABCD)\,,\ (ACDB)\,,\ (ADBC)\,,\ (ABDC)\,,\ (ACBD)\,,\ (ADCB).$$

Dal 1° si deducono il 2° e il 3° lasciando ferma la lettera **A** e permutando circolarmente **B C D**; e dai primi tre si deducono gli altri tre scambiandovi le due ultime lettere.

Tra questi sei doppî rapporti passano ancora delle relazioni. Infatti è evidente che

$$(ABCD).(ACBD) = 1\,,$$

ossia: *due doppî rapporti differenti per l'ordine dei due ultimi punti (o dei due primi) dànno per prodotto* 1. Analogamente

$$(ACDB).(ACBD) = 1,\ (ADBC).(ADCB) = 1\,.$$

Inoltre dalla (§ 3)

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0$$

dividendo per $-AD.BC$ si ha

$$\frac{AC.BD}{AD.BC} + \frac{AB.CD}{AD.CB} - 1 = 0,$$

$$(ABCD) + (ACBD) = 1,$$

ossia: *due doppî rapporti differenti per l'ordine del secondo e terzo punto (o del primo e quarto) dànno per somma* 1. Analogamente

$$(ACDB) + (ADCB) = 1, \ (ADBC) + (ABDC) = 1 .$$

Queste sei relazioni sono più che sufficienti a mostrare che *i valori dei sei doppî rapporti dipendono da un solo di essi.*

P. e., se poniamo

$$(ABCD) = \rho ,$$

abbiamo successivamente

$$(ABDC) = \frac{1}{\rho} ,$$

$$(ACBD) = 1 - \rho , \ (ACDB) = \frac{1}{1-\rho} ,$$

$$(ADBC) = 1 - \frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{\rho} , \ (ADBC) = \frac{\rho}{\rho - 1} .$$

§ 8. Consideriamo alcuni casi particolari notevoli.

Se $\rho = 0$, abbiamo $AC.BD = 0$, onde $AC = 0$ o $BD = 0$. I sei doppî rapporti divengono

$$(ABCD) = \pm 0 , \ (ABDC) = \pm \infty ,$$

$$(ACBD) = 1 , \ (ACDB) = 1 ,$$

$$(ADBC) = \mp \infty , \ (ADCB) = \mp 0,$$

vale a dire: se uno dei sei doppî rapporti diviene 0, o ∞, o 1, allora due divengono 0, due ∞, due 1; e in questo caso due dei quattro punti coincidono.

Se $\rho = -1$, si ha $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$, onde le coppie AB, CD sono armoniche. Attualmente

$$(ABCD) = -1 , \ (ABDC) = -1 ,$$

$$(ACBD) = 2 , \ (ACDB) = \frac{1}{2} ,$$

$$(ADBC) = 2 , \ (ADCB) = \frac{1}{2} ;$$

onde se uno dei sei doppî rapporti vale -1, o 2, o $\frac{1}{2}$, allora due valgono -1, due 2 e due $\frac{1}{2}$; e i quattro punti (in un certo ordine) formano un gruppo armonico. Il doppio rapporto nel caso dell'armonia acquista il valore particolare -1, o 2, o $\frac{1}{2}$; e perciò in generale si suole anche chiamarlo *rapporto anarmonico* (denominazione introdotta dallo CHASLES nel suo importantissimo *Aperçu historique*, 1837, e poi usata dai geometri francesi e da molti italiani e inglesi).

I sei rapporti anarmonici sono in generale diseguali. Infatti: supponendo $\rho = \frac{1}{\rho}$, onde $\rho^2 = 1$, $\rho = \pm 1$, ricadiamo nei due casi ora trattati; così pure supponendo $\rho = 1 - \rho$, onde $\rho = \frac{1}{2}$; ovvero supponendo $\rho = \frac{\rho}{\rho - 1}$, onde $\rho(\rho - 2) = 0$, e quindi $\rho = 0$ oppure $\rho = 2$. Se fosse $\rho = \frac{1}{1-\rho}$, onde

$$\rho^2 - \rho + 1 = 0, \quad \rho = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

sarebbe pure $\rho = \frac{\rho - 1}{\rho}$; e dei sei rapporti anarmonici tre varrebbero $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ e gli altri tre $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$. Ma essendo questi valori immaginarî, non esistono quattro punti reali soddisfacenti alla supposta condizione.

Se **D** va allontanandosi all'infinito sulla retta nella direzione positiva o negativa, il fratto $\frac{AD}{BD}$ tende a 1, e però (**ABCD**) tende al limite $\frac{AC}{BC}$. Ciò si esprime scrivendo

$$(BAC\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Dunque: il doppio rapporto di quattro punti, di cui uno all'infinito, si ottiene dall'espressione generale del doppio rapporto cancellando i due fattori in cui figura il punto all'infinito.

§ **9**. Se $x\, x'\, x''\, x'''$ sono le ascisse di quattro punti **A B C D** riferiti a un'origine **O**, la formola che esprime il doppio rapporto

(ABCD) può scriversi

$$\frac{x-x''}{x'-x''} : \frac{x-x'''}{x'-x'''}, \text{ ovvero } \frac{(x-x')(x'-x''')}{(x-x''')(x'-x'')}.$$

Questa espressione può bene chiamarsi *doppio rapporto* o *rapporto anarmonico* dei quattro numeri $x\ x'\ x''\ x'''$, e indicarsi con $(x\ x'\ x''\ x''')$. È chiaro che quattro numeri daranno allora 24 doppî rapporti, che si riducono a tre coi loro inversi, e che sono legati dalle stesse relazioni che quelli di quattro punti.

Fissati in una retta tre punti **A B C**, ogni altro punto **D** della retta fa con essi in un ordine assegnato un doppio rapporto affatto determinato. Così: se **D** cade in **A**, o in **B**, o in **C**, o all'infinito, (**ABCD**) diviene risp. $\pm\infty, \pm 0, 1, \frac{AC}{BC}$. Viceversa: fissati i tre punti **A B C**, ad ogni valore assegnato del doppio rapporto (**ABCD**) corrisponde una posizione di **D**; poichè, dati **A B C** e dato (**ABCD**), è determinato il rapporto $\frac{AD}{DB}$; od anche perchè, uguagliando la frazione $(x\ x'\ x''\ x''')$ a un numero dato, si ha un'equazione di 1° grado in x''', e quindi un valore di x'''. Lo stesso vale per gli altri doppî rapporti dei punti **A B C D**. Potremmo dunque assumere come coordinate dei punti della retta i doppî rapporti che essi determinano con tre punti fissi della retta in un ordine assegnato.

Scelgasi come coordinata (**ABCD**), ossia $\frac{BD}{BC} : \frac{AD}{AC}$. Il numero $\frac{BD}{BC}$ (positivo o negativo) è quello che misura la distanza **BD** riferita alla **BC** come unità, e $\frac{AD}{AC}$ è il numero che misura la distanza **AD** riferita alla **AC** come unità; (**ABCD**) è il rapporto di questi due numeri. Diremo *projettiva* questa coordinata, per ragioni che spiegheremo in seguito. I punti **A** e **B** hanno per coordinate ∞ e 0, e si dicono *fondamentali;* il punto **C** ha per coordinata 1, e si dice *punto unità.*

Se supponiamo che **A** sia il punto all'infinito della retta; allora (**ABCD**) diviene $\frac{BD}{BC}$, e non è che l'ascissa del punto **D** rispetto all'origine **B** quando si prenda **BC** come unità lineare. Dunque: l'ascissa di un punto **B** non è che il doppio rapporto del punto origine e del punto all'infinito col punto da determinarsi e col punto a distanza 1 dall'origine.

Se invece supponiamo che C sia medio fra i punti fondamentali A e B; allora $BC = -AC$, e (ABCD) diviene $\frac{BD}{DA}$, cioè la coordinata baricentrica r del § 4 rispetto a B e A.

Si vede dunque che le coordinate projettive comprendono come casi particolari le due specie di coordinate prima incontrate, cioè le ascisse e le coordinate baricentriche.

La teoria de' doppî rapporti è dovuta a Möbius e Chasles; ma di essi e de' gruppi armonici si trova fatto uso fino in Pappo (*Collezioni matematiche*), e poi in Desargues e altri.

Il concetto delle coordinate projettive, suggerito da Staudt (*Beiträge* 1858), fu sviluppato da Fiedler (*Darstellende Geometrie*).

Esercizio 1. Calcolare i doppî rapporti di quattro fra' punti dell'es. 1 § 5.

Es. 2. Il doppio rapporto di quattro punti di coordinate baricentriche $r\ r'\ r''\ r'''$ è $(r\ r'\ r''\ r''')$, come in coordinate cartesiane.

Es. 3. La distanza di due punti di coordinate projettive $\rho\ \rho'$ è

$$d\omega \frac{\rho - \rho'}{(\rho + \omega)(\rho' + \omega)}, \text{ ove } d = AB, \ \omega = \frac{AC}{CB}.$$

Es. 4. Il doppio rapporto di quattro punti di coordinate projettive $\rho\ \rho'\ \rho''\ \rho'''$ è $(\rho\ \rho'\ \rho''\ \rho''')$.

Es. 5. Sia x l'ascissa di un punto rispetto a un'origine O, e ρ la coordinata projettiva dello stesso punto rispetto a tre punti A B C: sarà (indicando con a l'ascissa di A, e con d, ω le stesse quantità dell'es. 3.):

$$\rho = \frac{\omega(a + d - x)}{x - a}, \quad x = \frac{a\rho + (a + d)\omega}{\rho + \omega}.$$

Es. 6. Le frazioni

$$\frac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{\rho^2(\rho - 1)^2}, \quad \frac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{(\rho + 1)^2(\rho - 2)^2(2\rho - 1)^2}$$

conservano lo stesso valore, qualunque sia fra i doppî rapporti di quattro punti quello denotato da ρ.

Punti di una retta determinati mediante equazioni.

§ 10. Sia data un'equazione di 1° grado (*lineare*) in x, a coefficienti reali:

$$ax + b = 0.$$

Essa è soddisfatta dall'unico valore $x = -\frac{b}{a}$. Se dunque x si riguarda come ascissa su una data retta, e rispetto a una data origine e ad una assegnata direzione positiva; allora l'equazione individua quel punto della retta che ha quel valore di x per ascissa.

Il punto è l'origine se $b = 0$ (oppure $a = \infty$), è il punto all'infinito se a diviene zero (oppure b diviene ∞); ma non è più determinato se a e b si annullano insieme (o divengono entrambi infiniti) senza variare insieme secondo una legge determinata.

Sia data un'equazione di 2° grado (*quadratica*) in x, a coefficienti reali:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Essa è soddisfatta da due valori di x (radici dell'equazione):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $b^2 - 4ac > 0$, le due radici sono reali e distinte; e però, considerando x come ascissa su una data retta e rispetto a una data origine e ad una data direzione positiva, l'equazione determina due punti della retta.

Se $b^2 - 4ac = 0$, le due radici sono reali ed eguali, e i due punti coincidono; ma non diremo che l'equazione individua *un sol punto*, per non confondere questo col caso dell'equazione di 1° grado.

Se $b^2 - 4ac < 0$, le due radici sono immaginarie (complesse-coniugate), e non determinano sulla data retta alcun punto; poichè i punti della retta corrispondono ad ascisse reali, cioè formano una serie di *punti reali*. Però, come si considerano in algebra le quantità immaginarie, così noi diremo che un numero immaginario è ascissa di un *punto immaginario*. Quindi nel nostro caso le radici immaginarie dell'equazione quadratica saranno ascisse di due punti immaginarî (*coniugati*) rappresentati da quell'equazione.

Sicchè potremo conchiudere che la nostra equazione quadratica rappresenta sempre una coppia di punti (reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginarî).

Le formole esposte nelle pagine precedenti noi le applicheremo anche ad ascisse x' x ... di cui alcune o tutte siano immaginarie; ed estenderemo ai punti immaginarî le nozioni di distanza, rapporto

di distanze, doppio rapporto, ecc. La distanza di due punti immaginarî sarà definita dalla formola $x' - x$, e sarà in generale immaginaria, in casi particolari reale; il rapporto delle distanze di un punto da altri due sarà definito da $\frac{x'' - x}{x'' - x'}$; il doppio rapporto di quattro punti da $\frac{x - x''}{x' - x''} : \frac{x - x'''}{x' - x'''}$, ecc.

Il punto medio fra' due punti determinati dalla equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$ sarà sempre reale, anche se questi sono immaginarî; poichè l'ascissa del punto medio è $\frac{x_1 + x_2}{2}$ ossia $-\frac{b}{2a}$, che è sempre reale. Ed è pure reale il prodotto delle distanze dei due punti da un punto reale qualunque della retta, p. e., il prodotto delle loro ascisse; poichè si ha $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, che è reale anche se i due punti sono immaginarî.

Notiamo che: se $c = 0$ si ha $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$, e uno dei due punti è l'origine; se $b = 0$, $x_1 = -x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, e i due punti sono simmetrici rispetto all'origine (anche se immaginarî); se $b = 0$ e $c = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, e i due punti coincidono con l'origine. Se a tende a zero, x_2 cresce indefinitamente in valor assoluto, mentre x_1 tende a $-\frac{c}{b}$ come limite; onde per $a = 0$ un punto va all'infinito e l'altro no. Se anche b va a zero, anche l'altro punto va all'infinito, e però coincide col primo. Ecc., ecc.

In generale: se si ha un'equazione in x, algebrica di grado qualunque od anche trascendente; allora scelta su una retta l'origine e la direzione positiva e considerata x come ascissa, ogni radice reale dell'equazione individua sulla retta un punto reale, ed ogni radice immaginaria un punto immaginario; sicchè sulla retta si avrà un gruppo discreto di punti, che rappresenterà geometricamente quell'equazione ed avrà per rappresentazione analitica la equazione stessa.

Esercizio 1. Applicare le cose esposte al caso che le x siano coordinate baricentriche o projettive.

Es. 2. Se $ax + b = 0$, $a'x + b' = 0$ sono le equazioni di due punti della retta, l'equazione di un altro punto qualunque della retta potrà scriversi

$$\lambda(ax + b) + \mu(a'x + b') = 0,$$

essendo $\lambda : \mu$ un parametro arbitrario. Si può dunque assumere $\lambda : \mu$ come coordinata del punto corrispondente. Mostrare che questa è una coordinata projettiva.

Es. 3. Indichi ρ un doppio rapporto delle due coppie di punti date dalle equazioni

$$a x^2 + b x + c = 0, \quad a' x^2 + b' x + c' = 0.$$

Se $x' x''$ sono le radici della prima e $x_1 x_2$ quelle della seconda, si ha

$$\frac{\rho + 1}{\rho - 1} = \frac{2 x' x'' + 2 x_1 x_2 - (x' + x'')(x_1 + x_2)}{(x' - x'')(x_1 - x_2)} = \frac{2 a c' + 2 a' c - b b'}{\sqrt{(b^2 - 4 a c)(b'^2 - 4 a' c')}}.$$

Le due coppie sono armoniche ($\rho = -1$) se $2 a c' + 2 a' c - b b' = 0$. Hanno un punto comune (ρ vale 0 o ∞) se $(b^2 - 4 a c)(b'^2 - 4 a' c') - (2 a c' + 2 a' c - b b')^2 = 0$.

Punteggiate omografiche su due rette.

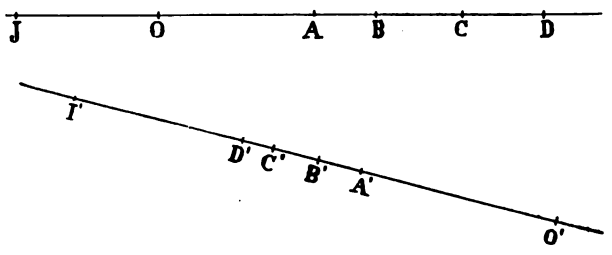
§ 11. Sia x l'ascissa di un punto di una retta riferito a una certa origine **O**, e y l'ascissa di un punto di un'altra retta riferito a una certa origine. Poniamo un'equazione di 1° grado così in x come in y (*bilineare*), ed a cofficienti reali: la sua forma più generale è

[1] $$a x y + b x + c y + d = 0;$$

e se ne ricava

$$y = -\frac{b x + d}{a x + c}, \quad x = -\frac{c y + d}{a y + b}.$$

Ad ogni valore che si dia a x corrisponde un valore di y, e ad ogni valore di y un valore di x; dunque ai singoli punti **A B C D** . . . della prima punteggiata corrispondono rispettivamente singoli punti **A' B' C' D'** . . . della seconda punteggiata, e viceversa; sicchè l'equazione [1] determina una corrispondenza univoca tra gli elementi delle due punteggiate.



Se per x si prende un numero complesso, tale risulta anche y; e viceversa; sicchè a punti immaginarî di una punteggiata corrispondono punti immaginarî dell'altra.

Per $x=0$ si ha $y=-\frac{d}{c}$, e per $y=0$ si ha $x=-\frac{d}{b}$; onde le origini delle due punteggiate non sono punti corrispondenti se non quando $d=0$. Sia O' il punto corrispondente a O.

Essendo poi $y=-\dfrac{b+\frac{d}{x}}{a+\frac{c}{x}}$, si vede che, crescendo x indefinitamente, y tende a $-\frac{b}{a}$; dunque al punto all'infinito della prima punteggiata corrisponde un punto I' di ascissa $-\frac{b}{a}$ nella seconda. E similmente, al punto all'infinito della seconda punteggiata corrisponde un punto J di ascissa $-\frac{c}{a}$ nella prima. I due punti J e I' diconsi punti *di fuga* o *limiti* delle due punteggiate.

Sarebbero corrispondenti i punti all'infinito delle due punteggiate, e quindi i punti limiti andrebbero entrambi all'infinito, se fosse $a=0$ (ma non b nè c): allora la [1] darebbe $\left(y+\frac{d}{c}\right):x=-\frac{b}{c}$, ossia i rapporti $\frac{O'A'}{OA}$, $\frac{O'B'}{OB}$, $\frac{O'C'}{OC}$, ... sarebbero tutti uguali a $-\frac{b}{c}$; e però le due punteggiate sarebbero *simili*.

Sarebbero poi *congruenti* od *eguali*, se fosse anche $b=\pm c$.

Nella [1] figurano quattro coefficienti $a\ b\ c\ d$, non tutti nulli; ma potendosi essa dividere per uno de' coefficienti, è chiaro che basta conoscere i rapporti di tre de' coefficienti al rimanente, per scrivere l'equazione, e quindi determinare la corrispondenza che essa rappresenta.

Per esempio: la corrispondenza è determinata, se son dati ad arbitrio tre punti dell'una punteggiata e i loro corrispondenti nell'altra. Giacchè, dette $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, $x_3\,y_3$ le coordinate di tali punti, dovremo avere

$$ax_1y_1+bx_1+cy_1+d=0,$$
$$ax_2y_2+bx_2+cy_2+d=0,$$
$$ax_3y_3+bx_3+cy_3+d=0;$$

e queste equazioni individuano i rapporti di tre delle quantità $a\ b\ c\ d$ alla rimanente.

Ad evitar calcoli, osserviamo che queste tre equazioni con la [1] sono omogenee e lineari in $a\,b\,c\,d$, e devono coesistere per valori non tutti nulli di queste quantità: quindi la condizione

$$[2] \qquad \begin{vmatrix} xy & x & y & 1 \\ x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

che (sviluppata secondo la prima orizzontale) è la equazione della corrispondenza.

Essa si può anche considerare come la condizione perchè quattro punti dati dell'una punteggiata abbiano per corrispondenti quattro punti dati dell'altra, in una corrispondenza rappresentabile con una equazione bilineare.

§ **12**. Due punteggiate legate da un'equazione bilineare [1] presentano un'importante proprietà: cioè che il doppio rapporto di quattro punti qualunque dell'una è uguale al doppio rapporto dei quattro punti loro corrispondenti nell'altra. Infatti, se $x\ x'\ x''\ x'''$ sono le ascisse di **A B C D**, e $y\ y'\ y''\ y'''$ le ascisse dei punti corrispondenti **A' B' C' D'**, si ha

$$(\mathbf{ABCD}) = \frac{(x-x'')(x'-x''')}{(x'''-x)(x'-x'')}, \quad (\mathbf{A'B'C'D'}) = \frac{(y-y'')(y'-y''')}{(y-y''')(y'-y'')};$$

ora

$$y - y'' = -\frac{bx+d}{ax+c} + \frac{bx''+d}{ax''+c} = \frac{(ad-bc)(x-x'')}{(ax+c)(ax''+c)},$$

$$y' - y''' = \frac{(ad-bc)(x'-x''')}{(ax'+c)(ax'''+c)}, \text{ ecc.},$$

e però sostituendo nella espressione di (**A'B'C'D'**) e riducendo, si ritrova (**ABCD**).

Viceversa: *dati tre punti* **A B C** *di una punteggiata, e scelti come corrispondenti ad essi in un'altra punteggiata tre punti arbitrarî* **A' B' C'**; *se a ciascun punto* **D** *dell'una si fa corrispondere nell'altra quel punto* **D'** *che fa il doppio rapporto* (**A'B'C'D'**) = (**ABCD**); *questa corrispondenza sarà rappresentabile con una equazione bilineare fra le ascisse di due punti corrispondenti, e*

quindi il doppio rapporto di quattro punti qualunque dell'una punteggiata sarà eguale al doppio rapporto dei quattro punti corrispondenti nell'altra. Poichè l'eguaglianza dei due doppî rapporti (ABCD), (A'B'C'D'), espressi nelle ascisse dei varî punti, conduce, facendo sparire i fratti, a un'equazione bilineare nelle ascisse di D e D'.

Due punteggiate così corrispondenti si dicono *omografiche* (CHASLES) o *collineari* (MÖBIUS).

Se si scelgono i punti limiti J I' come origini di nuove ascisse X Y, abbiamo $x = X - \frac{c}{a}$, $y = Y - \frac{b}{a}$; e sostituendo nell'equazione della corrispondenza, essa si riduce alla forma assai semplice:

$$XY = \frac{ad - bc}{a^2};$$

la quale dice che *i prodotti* JA.I'A', JB.I'B', ... *sono tutti eguali* $\left(\text{a } \frac{ad-bc}{a^2}\right)$.

Nel caso eccezionale $ad - bc = 0$, ad ogni valore di X (tranne $X = 0$) corrisponde solo $Y = 0$, e ad ogni valore di Y (tranne $Y = 0$) corrisponde $X = 0$; vale a dire a tutti i punti della prima punteggiata corrisponde uno stesso punto della seconda, e a tutti i punti della seconda uno stesso nella prima. È facile verificare che è questo l'unico caso in cui ciò avvenga.

ESERCIZIO 1. L'equazione di una corrispondenza omografica in coordinate baricentriche o projettive è sempre bilineare, e viceversa.

ES. 2. L'equazione [2] può scriversi: $(x\, x_1\, x_2\, x_3) = (y\, y_1\, y_2\, y_3)$.

ES. 3. Se le due punteggiate sono simili, la [2] si riduce a

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$(x - x_1)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1) = 0.$$

ES. 4. Se ai punti $ax + b = 0$, $cx + d = 0$ di una punteggiata corrispondono $a'y + b' = 0$, $c'y + d' = 0$ in una punteggiata omografica, le equazioni di due punti corrispondenti qualunque saranno

$$\lambda(ax + b) + \mu(cx + d) = 0, \quad \lambda'(a'y + b') + \mu'(c'y + d') = 0,$$

dove il rapporto $\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda'}{\mu'}$ è costante.

Punteggiate omografiche su una retta. Involuzione.

§ 13. Supponiamo ora che le due punteggiate abbiano per sostegno una stessa retta, e siano riferite a una stessa origine. Allora sussistono tutte le proprietà dianzi esposte, ma ne compajono pure delle nuove; ad esempio si può cercare se vi sono punti che coincidano coi loro corrispondenti.

Per un tal punto dev'essere $y = x$, e però la [1] diviene

$$ax^2 + (b + c)\,x + d = 0.$$

Quest'equazione di 2° grado porge per x due valori, e mostra che: *per due punteggiate omografiche sulla stessa retta esistono due punti (reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginarî coniugati), i quali hanno per corrispondenti sè stessi.*

Questi punti si dicono *uniti*, *doppî*, *tautologi*, *fuochi*, ecc.

Siano U V questi due punti: avremo dal teorema del § 12

$$(\mathbf{ABUV}) = (\mathbf{A'B'UV}),$$

onde segue

$$\frac{\mathbf{AU}}{\mathbf{A'U}} : \frac{\mathbf{AV}}{\mathbf{A'V}} = \frac{\mathbf{BU}}{\mathbf{B'U}} : \frac{\mathbf{BV}}{\mathbf{B'V}},$$

ossia

$$(\mathbf{AA'UV}) = (\mathbf{BB'UV});$$

e però: *in due punteggiate omografiche sulla stessa retta è costante il doppio rapporto di due punti corrispondenti qualunque coi due punti uniti* (reali o immaginarî).

Se x' x'' sono le ascisse dei punti uniti, questo doppio rapporto costante è

$$(\mathbf{J}\infty\mathbf{UV}) = \frac{\mathbf{JU}}{\mathbf{JV}} = \frac{x' + \frac{c}{a}}{x'' + \frac{c}{a}} = \frac{ax' + c}{ax'' + c} = \frac{c - b + \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}}{c - b - \sqrt{(b - c)^2 - 4ad}}.$$

Viceversa: ogni corrispondenza omografica tra i punti di una

stessa retta è determinata dai due punti uniti e dal doppio rapporto costante che con questi fanno due punti corrispondenti qualunque; purchè però quei due punti uniti non coincidano, cioè quel doppio rapporto non valga 1, vale a dire purchè non sia

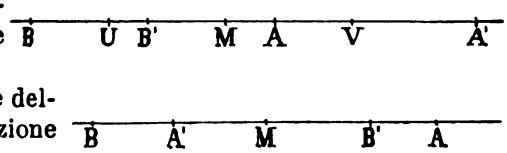
$$(b + c)^2 - 4\,ad = 0.$$

La corrispondenza omografica è reciproca, vale a dire che ai punti **A' B'**... considerati come appartenenti alla prima punteggiata corrispondono **A B**... nella seconda, quando (**AA'UV**) = (**A'AUV**) e quindi $= \pm 1$.

Se (**AA'UV**) = 1, allora (supposti, per la ragione dianzi detta, **U** e **V** distinti) dovrà **A** coincidere con **A'**; onde due punti corrispondenti qualunque coincideranno, e le due punteggiate saranno *identiche*.

Se invece (**AA'UV**) = — 1, le coppie **AA' BB'**... sono tutte armoniche rispetto a **U** e **V**; e noi diremo con Desargues che esse costituiscono una *involuzione* (*di 2° ordine* o *quadratica*).

I punti *doppî* **U V** dell'involuzione possono essere reali o immaginarî.



Questo caso particolare dell'omografia, cioè l'involuzione di due punteggiate sovrapposte, è molto importante. Per esso i due punti limiti **J I'** coincidono in un punto **M**, detto *centro* dell'involuzione; e si ha (§ 12)

$$\mathbf{MA} \,.\, \mathbf{MA'} = \mathbf{MB} \,.\, \mathbf{MB'} = \ldots = \overline{\mathbf{MU}}^2 = \overline{\mathbf{MV}}^2,$$

sicchè **M** è il punto medio di **UV**.

La condizione d'involuzione è manifestamente che la [1] non si alteri scambiando x con y, ossia è $b = c$; sicchè l'equazione della involuzione è

$$axy + b(x + y) + d = 0.$$

Viceversa: se

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

è l'equazione di due punti di una data retta, su questa esistono infiniti sistemi di due punteggiate in corrispondenza omografica, per cui quelli sono i due punti uniti; e l'equazione di una qua-

lunque di queste corrispondenze è

$$Axy + B'x + B''y + C = 0,$$

colla condizione $B' + B'' = B$.

Tra queste corrispondenze vi è una sola involuzione, e la sua equazione è

$$Axy + \frac{B}{2}(x + y) + C = 0.$$

Date due coppie di punti di una involuzione, questa è determinata. Se $x_1\, y_1$ e $x_2\, y_2$ sono le coordinate delle due coppie date dell'involuzione

$$axy + b\,(x + y) + d = 0,$$

abbiamo

$$ax_1y_1 + b\,(x_1 + y_1) + d = 0,$$

$$ax_2y_2 + b\,(x_2 + y_2) + d = 0;$$

se dunque x e y sono le coordinate di una coppia qualunque di punti dell'involuzione, dovranno coesistere queste tre ultime equazioni lineari omogenee in $a\ b\ d$ per valori non tutti nulli di $a\ b\ d$; e però avremo

$$\begin{vmatrix} xy & x + y & 1 \\ x_1y_1 & x_1 + y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 + y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

come equazione dell'involuzione.

Qui ponendo $y = x$, si ha l'equazione di quei due punti, che sono armonici con due coppie date di punti $x_1\, y_1$ e $x_2\, y_2$:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x_1y_1 & x_1 + y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 + y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esercizio 1. Per due punteggiate omografiche su una retta le coppie **I'J** e **UV** hanno lo stesso punto medio.

Es. 2. Se ad **A** nella 1ª punteggiata corrisponde **A'** nella 2ª, ad **A'** nella 1ª **A''** nella 2ª, e così via, in quali casi si ritorna al punto **A**?

Es. 3. Se le due punteggiate sono simili, uno dei punti uniti è all'infinito.

Es. 4. Date le equazioni di due coppie di punti:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

l'equazione di una coppia qualunque dell'involuzione da esse determinata può mettersi sotto la forma

$$\lambda(ax^2 + bx + c) + \mu(a'x^2 + b'x + c') = 0,$$

ove $\lambda : \mu$ è un parametro arbitrario.

Es. 5. L'equazione della coppia di punti armonica con ciascuna delle coppie dell'es. 4 è

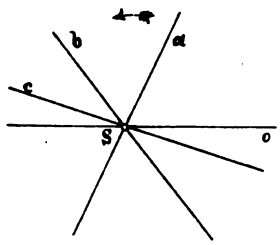
$$\begin{vmatrix} x^2 & -2x & 1 \\ c & b & a \\ c' & b' & a' \end{vmatrix} = 0.$$

CAPITOLO II.

Fascio di rette.

Angoli e anomalie.

§ **14**. Sia **S** il centro di un fascio di rette in un piano Σ, e siano **a b** due rette del fascio. La **a** può rotare intorno al punto **S** e nel piano Σ in due versi, l'uno opposto all'altro; e precisamente, rispetto a un osservatore eretto sul piano da una data banda di questo coi piedi in **S**, la rotazione può apparire procedente verso sinistra o verso destra. La **a**, rotando in un verso, viene a coincidere con **b** la prima volta dopo aver descritto un certo angolo (e il suo opposto al vertice). Rotando invece nel verso opposto, la **a** viene a coincidere con **b** la prima volta dopo aver descritto un altro angolo (e il suo opposto al vertice).



Fissiamo nel fascio una retta **o** (*origine*), e scegliamo il verso in cui vogliamo che avvengano le rotazioni. Data una retta qualunque **a** del fascio, è noto l'angolo fra **o** ed **a**: cioè l'angolo, del quale rotando a partire da **o** e nel verso fissato, una retta del fascio giunge la prima volta in **a**; ed è individuato il numero α, che misura questo angolo riferito a un certo angolo scelto come unità; e se diciamo π il numero che misura l'angolo di due retti o piatto, il numero α è compreso fra **o** e π. Viceversa: dato un numero α compreso fra **o** e π, è noto l'angolo che esso misura, ed è individuata quella retta **a** che fa con **o** quest'angolo nel verso fissato. Onde il numero α si può assumere come *coordinata* della retta **a**, e dicesi *anomalia*.

Aggiungendo all'angolo considerato uno o più angoli piatti, si ottengono tutti gli infiniti angoli, dei quali rotando una retta nel verso fissato, essa va da **o** in **a**; vale a dire tutti gli infiniti angoli

delle due rette **o a**. Viceversa: due rette che faciano con **o** angoli differenti solo per multipli di π, coincidono. Ne segue che, nel determinare una retta **a** del fascio mediante il numero α, si possono anche dare a questo numero valori maggiori di π; ma allora aggiungendo ad esso e sottraendo multipli di π, s'individua sempre la stessa retta **a**.

Se da α si sottrae un multiplo di π maggiore di α, si ottiene come una delle misure dell'angolo un numero negativo; e l'interpretazione degli angoli mediante rotazioni di una retta del fascio mostra che questo numero negativo corrisponde ad una rotazione fatta per andare da **o** in **a** nel verso opposto a quello prima fissato; sicchè si è condotti a considerare come positivi gli angoli descritti nel verso fissato, e come negativi quelli descritti nel verso opposto.

Insomma: all'anomalia α si possono attribuire tutti i valori reali, positivi e negativi; ma bisogna ricordare che essa può essere aumentata o diminuita di un multiplo arbitrario di π, senza che cessi d'individuare una stessa retta.

Il fascio di rette è una forma geometrica di 1ª specie e rientrante in sè stessa.

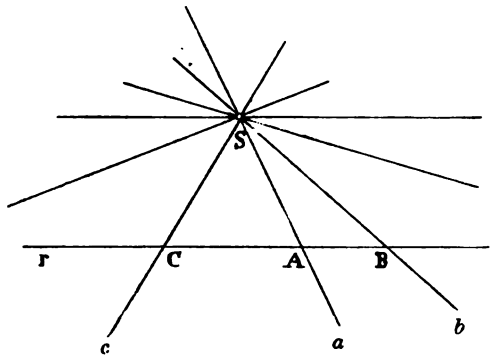
Se in ciascuna retta del fascio si vuol distinguere una direzione positiva e una negativa; allora, per portare a coincidere la direzione positiva di una retta con la direzione opposta, occorre una rotazione di un angolo piatto o di un numero impari di tali angoli; e per portare a coincidere la direzione positiva di una retta con sè stessa, occorre far rotare la retta di un numero pari (zero incluso) di angoli piatti. Quindi, per portare a coincidere la direzione positiva di una retta con la direzione positiva di un'altra, occorre un angolo, al quale è permesso di aggiungere, non più un angolo piatto, ma un intero giro, ovvero più giri; e però il numero α può essere alterato solo di un multiplo qualunque di 2π.

Indicheremo con **ab** uno qualunque dei numeri che misurano l'angolo fra le direzioni positive di **a** e **b**. Sarà allora (*)

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{ab} + \mathbf{ba} \equiv 0\ ,\ \mathbf{ba} \equiv -\mathbf{ab}, \\ \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca} \equiv 0\ ,\ \mathbf{ab} \equiv \mathbf{cb} - \mathbf{ca}, \\ \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \ldots + \mathbf{la} = 0. \end{array}\right\} \text{(modulo } 2\pi)$$

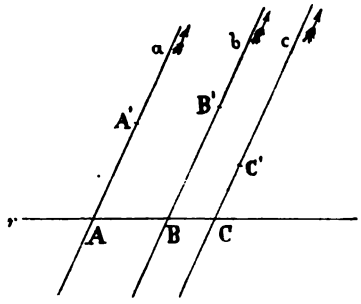
(*) Il segno $\equiv$ unisce due numeri che formano una *congruenza*, cioè che divisi per un numero assegnato (modulo) dànno resti eguali.

§ **15.** Per mostrare la connessione fra la retta punteggiata e il fascio di rette, consideriamo un fascio di centro **S** e di piano **Σ**, e in questo piano una retta **r** che non passi per **S**. Le rette **a b c** . . . del fascio secano **r** rispettivamente nei punti **A B C** . . ., sicchè ciascuna retta individua un punto e ciascun punto una retta; e quindi ogni sistema di coordinate per la punteggiata può servire pel fascio, e viceversa.



Se una retta **a** rota intorno a **S** in un dato verso fino a divenire parallela a **r**, il punto **A** si move sulla **r** in una certa direzione allontanandosi indefinitamente; e se **a** rota nel verso opposto fino a divenire nuovamente parallela ad **r**, **A** si move nella direzione opposta allontanandosi indefinitamente. Il fatto: che dal punto **S** si può condurre una sola parallela a **r** (postulato della *geometria euclidea*), concorda adunque con la nozione già introdotta dell'unico punto all'infinito su una retta, e ci permette di dire che *una retta ha comune con ciascuna sua parallela il punto all'infinito*, ovvero che un sistema di rette parallele in un piano è un fascio col centro all'infinito (Desargues).

L'angolo di due rette parallele è da ritenersi uguale a quello di una retta con sè stessa, e quindi a zero o ad un angolo piatto.

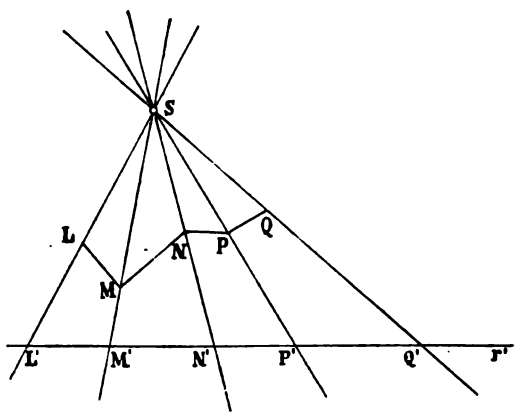


E qui avvertiamo che, quando si ha un sistema di rette parallele **a b c** . . . secate da una retta **r** nei punti **A B C** ..., allora, scelta la direzione positiva su **a** e posto che il segmento **AA'** sia positivo, sceglieremo sulle **b c** . . . le direzioni positive in modo che i segmenti positivi **BB' CC'** . . . cadano da una stessa banda di **r**. Per coordinate delle **a b c** . . . possono servire quelle dei punti **A B C** . . . della punteggiata **r**.

Projezioni centrali e parallele.

§ 16. Quando si considerano (come nel § precedente) una retta punteggiata **r** ed un fascio qualunque di rette **S** nello stesso piano, si dice che la retta **r** *seca* il fascio **abc**... nella punteggiata **ABC**... e che il fascio *projetta* la punteggiata dal punto **S**.

Se **L M N**... sono punti qualunque del piano, e se le rette **SL SM SN**... secano una retta **r'** nei punti **L' M' N'**..., questi si dicono le *projezioni* di **L M N**... dal *centro* **S** sulla retta **r'**. Se un punto percorre il segmento **LM**, la sua projezione percorre il segmento **L'M'**, che diciamo *projezione* di **LM**. Se un punto percorre la linea poligonale **LM + MN + NP + PQ**, la sua projezione percorre successivamente i segmenti **L'M' M'N' N'P' P'Q'**; e se sulla **r'** si fissa una direzione positiva, la somma di questi segmenti si denomina *projezione* di quella linea poligonale. Questa somma si riduce a **L'Q'** projezione del segmento **LQ**; e quindi la projezione non varia comunque si muti la linea poligonale considerata, purchè i suoi due estremi **L Q** rimangano fissi. Dunque: *con qualunque linea, sia retta sia poligonale, si vada da un punto a un altro, le projezioni di essa, fatte da uno stesso punto e su una stessa retta, sono uguali.*



In particolare: *la projezione del perimetro di un poligono è nulla.*

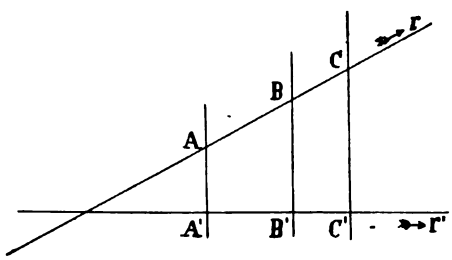
Se pei punti **L M N**... si tirano rette parallele a una retta **a**, le quali sechino una retta **r'** nei punti **L' M' N'**..., questi si dicono le *projezioni* di **L M N**... sulla retta **r'** secondo la direzione **a**; **L'M'** si dice la *projezione* del segmento **LM**, e così via. Onde possiamo asserire: *con qualunque linea, sia retta sia poligonale, si vada da un punto a un altro, le projezioni di essa, fatte secondo*

una stessa direzione e su una stessa retta (o su rette parallele) sono eguali. — La projezione del perimetro di un poligono, secondo qualunque direzione e su qualunque retta, è nulla.

Viceversa: se sono nulle le projezioni di una linea poligonale qualunque, fatte secondo due direzioni diverse e su due rette qualunque (distinte o no), quella linea poligonale sarà chiusa; poichè i suoi due estremi si dovranno trovare nello stesso tempo su due rette parallele alle due direzioni considerate, e quindi coincideranno. In conseguenza sarà pure nulla la projezione della linea poligonale secondo un'altra direzione qualunque e su qualunque retta.

È notevole il caso della projezione *ortogonale* o *normale*, cioè quando la projezione si fa secondo la direzione perpendicolare alla retta su cui si projetta.

Siano **A B C**... punti di una retta **r**, **A' B' C'**... le loro projezioni normali su un'altra retta **r'**; e sulle **r r'** siano scelte le direzioni positive: saranno tutti eguali (pel teorema di Talete) i rapporti $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{A'C'}{AC}$, $\frac{B'C'}{BC}$, ... anche nel segno. Il valor comune di questi rapporti non dipende che dall'angolo delle direzioni positive delle due rette **r' r**, e si definisce per *coseno* dell'angolo stesso: cos **r'r**; onde



$$\frac{A'B'}{AB} = \cos r'r, \quad A'B' = AB \cos r'r,$$

ovvero: *se un segmento si projetta normalmente su una retta, il segmento projezione è uguale al segmento che si projetta moltiplicato pel coseno dell'angolo formato dalle direzioni positive delle due rette cui i segmenti appartengono.*

Funzioni goniometriche.

§ 17. È facile vedere, chiamando α l'angolo **r'r** (e mutando il verso positivo degli angoli o quello della retta **r'**), che si ha, qua-

lunque sia α:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha,\ \cos(\alpha-\pi) = -\cos\alpha.$$

Inoltre, dando a r posizioni particolari rispetto a r', si ha

$$\cos 0 = 1\,,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0\,,\ \cos\pi = -1\,,\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Definendo per *seno* di un angolo il coseno del complemento a un retto, ossia ponendo

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

abbiamo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha\,,\ \operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha\,,\ \operatorname{sen}(\alpha-\pi) = -\operatorname{sen}\alpha\,,$$

$$\operatorname{sen} 0 = 0\,,\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1\,,\ \operatorname{sen}\pi = 0\,,\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1\,.$$

Definendo per *tangente* di un angolo il rapporto del seno al coseno, ossia ponendo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\,,$$

abbiamo

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\,,\ \operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}\alpha\,,\ \operatorname{tg}(\alpha-\pi) = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 0 = 0\,,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty\,,\ \operatorname{tg}\pi = 0\,,\ \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = \infty.$$

Definendo per *cotangente* di un angolo la tangente del complemento a un retto, ossia ponendo

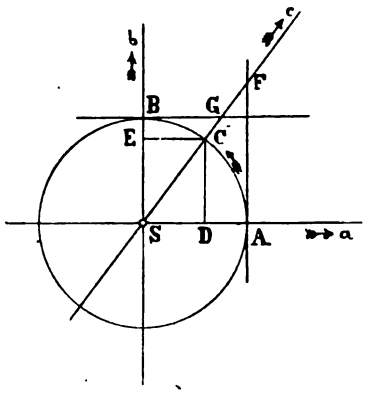
$$\cot\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

abbiamo

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,,\ \text{ecc.}$$

Il coseno, il seno, la tangente e la cotangente diconsi *funzioni goniometriche*, poichè possono servire alla determinazione dell'angolo.

§ **18.** In un fascio di rette sia **S** il centro e siano **a b** due rette ortogonali, in modo che l'angolo generato dalla direzione positiva di **a** rotante intorno a **S** nel verso positivo sino a coincidere con la direzione positiva di **a** sia un retto: $\mathbf{ab} = \frac{\pi}{2}$. Sia **c** un'altra retta del fascio, e poniamo l'angolo $\mathbf{ac} = \alpha$. Indi sulle **a b c** prendiamo i segmenti positivi uguali **SA SB SC**, e projettiamo **C** ortogonalmente su **a** e **b** in **D** ed **E**. Per la definizione del coseno avremo:



$$[1] \qquad \frac{\mathbf{SD}}{\mathbf{SC}} = \cos \mathbf{ac} = \cos\alpha,$$

e
$$\frac{\mathbf{DC}}{\mathbf{SC}} = \frac{\mathbf{SE}}{\mathbf{SC}} = \cos(-\mathbf{bc})$$
$$= \cos(\mathbf{ab} - \mathbf{ac}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

ossia per la definizione del seno

$$[2] \qquad \frac{\mathbf{DC}}{\mathbf{SC}} = \operatorname{sen}\alpha.$$

Se **AF** normale ad **a** in **A** seca **c** in **F**, abbiamo

$$[3] \qquad \frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{SA}} = \frac{\mathbf{DC}}{\mathbf{SD}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

E se **BG** normale a **b** in **B** seca **c** in **G**, abbiamo

$$[4] \qquad \frac{\mathbf{BG}}{\mathbf{SB}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha.$$

Se si sceglie come unità lineare $\mathbf{SA} = \mathbf{SB} = \mathbf{SC}$, queste relazioni divengono

$$\mathbf{SD} = \cos\alpha, \ \mathbf{DC} = \operatorname{sen}\alpha, \ \mathbf{AF} = \operatorname{tg}\alpha, \ \mathbf{BG} = \cot\alpha;$$

e così si ottiene una rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche.

Anzi potremmo assumere come definizione delle funzioni gonio-

metriche questa rappresentazione, e ritrovare le varie relazioni accennate nel § precedente. P. e., si ha:

$$\cos\alpha = \mathbf{EC} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \mathbf{SE} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathbf{AF}}{\mathbf{SA}} = \frac{\mathbf{DC}}{\mathbf{SD}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Osservando che la projezione normale di $\mathbf{SD} + \mathbf{DC}$ è eguale a quella di $\mathbf{SC}$, e projettando su $\mathbf{c}$, si ha

$$\mathbf{SD}\cos\mathbf{ca} + \mathbf{DC}\cos\mathbf{cb} = \mathbf{SC};$$

e poichè $\mathbf{SD} = \cos\alpha$, $\cos\mathbf{ca} = \cos\alpha$, $\mathbf{DC} = \operatorname{sen}\alpha$, $\cos\mathbf{cb} = \operatorname{sen}\alpha$, $\mathbf{SC} = 1$, otteniamo la relazione

$$[5] \qquad \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$$

La figura mostra che:

se α cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha$ decresce da 1 a 0, e $\operatorname{sen}\alpha$ cresce da 0 a 1,

» » » » $\frac{\pi}{2}$ » π » » » 0 » -1 » decresce » 1 » 0,

» » » » π » $\frac{3\pi}{2}$ » cresce -1 » 0 » » » 0 -1,

» » » » $\frac{3\pi}{2}$ » 2π » » » 0 » 1 » cresce -1 » 0.

Continuando α a crescere da 2π a 4π, da 4π a 6π ...., $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ riprendono *periodicamente* gli stessi valori; poichè il coseno ed il seno di un angolo non mutano se questo si aumenta o si diminuisce di un multiplo qualunque di 2π.

Se α cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha$ cresce da 0 a $+\infty$, e $\cot\alpha$ decresce da $+\infty$ a 0.

Se α cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π, $tg\,\alpha$ cresce da $-\infty$ a 0, e $cot\alpha$ decresce da 0 a $-\infty$.

Mentre α passa per $\frac{\pi}{2}$, $tg\alpha$ passa da $+\infty$ a $-\infty$. Continuando a crescere α da π a 2π, da 2π a 3π, ..., $tg\alpha$ e $cot\alpha$ riprendono periodicamente gli stessi valori di prima; poichè la tangente e la cotangente di un angolo non mutano se questo si aumenta o si diminuisce di un multiplo qualunque di π.

Si sa che gli angoli al centro di un cerchio sono proporzionali agli archi compresi fra' loro lati. Questa proprietà si applica anche quando si tien conto dei segni degli angoli, purchè si considerino sulla circonferenza archi positivi e archi negativi, convenendo che, mentre un raggio descrive un angolo positivo, il suo punto estremo descriva un arco positivo. Se inoltre si sceglie per arco unità quello che è compreso nell'unità angolare, allora uno stesso numero α misura così un angolo come l'arco compreso nell'angolo. P. e., si può prendere per arco unità la 360ma parte della circonferenza (questa unità si chiama *grado*, e si divide in 60 *minuti primi*, ognuno diviso in 60 *minuti secondi*, e così via): allora un angolo piatto è misurato dal numero 180 e un retto da 90, ossia $\pi = 180$, $\frac{\pi}{2} = 90$. Se invece si prende per unità l'arco lungo quanto il raggio, allora (il rapporto costante della circonferenza al diametro essendo espresso da 3,141592...) sarà $\pi = 3{,}141592\ldots$

Il seno, il coseno, la tangente e la cotangente, potendosi adunque considerare come funzioni di un arco di circolo invece che di un angolo, si dicono anche *funzioni circolari*.

I geometri greci, per argomentare la grandezza degli angoli al centro di un circolo da quella delle corde in essi iscritte, riferirono le corde al raggio e sue parti aliquote di 60 in 60, e calcolarono una tavola contenente le misure delle corde iscritte negli angoli progredienti di mezzo in mezzo grado da 0 a 180 (*Tolomeo* nell'*Almagesto*, verso l'anno 125).

Albatenio (circa il 900) ed altri astronomi arabi considerarono poi invece la metà degli angoli e delle corde, cioè gli angoli e i loro seni.

Seno viene dal latino *sinus*, traduzione di un termine usato dagli arabi. *Coseno* = *cosinus* = *complementi sinus*. *Tangente* e *cotangente* sono denominazioni introdotte da *Fink* (*Geometria rotundi* 1583).

Le tavole oggi in uso contengono i logaritmi con 5 e più decimali dei seni, coseni, tangenti e cotangenti degli angoli da 0 a 45 gradi; il che basta. In quelle del *Bruhns* gli angoli progrediscono per diecine di secondi, e nei primi 6 gradi per secondi.

Delle funzioni goniometriche molto si giova la *Trigonometria;* la quale insegna specialmente a *risolvere* i triangoli, ossia a calcolare le misure di tutti gli elementi di un triangolo piano o sferico, date tre di esse (incluso almeno un lato, se il triangolo è piano).

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti relazioni, dando ragione del doppio segno:

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,,\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,,\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,.$$

Es. 2. Dimostrare che:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1\,;$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\,,\quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,,\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,;$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\,,\quad \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,,\ \text{ecc.}$$

Es. 3. Definendo per *secante* di un angolo il valore inverso del suo coseno, ossia ponendo $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, si ha $\sec\alpha = \mathrm{SF}$.

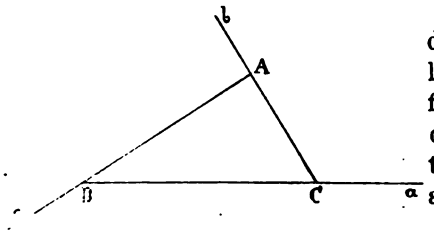
Cosecante di un angolo è la secante del complemento di questo a un retto, ossia $\operatorname{cosec}\alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \mathrm{SG}$.

Trigonometria piana.

§ 19. Le [1], [2], [3], [4] del § 18 sono relazioni fra' lati e gli angoli di un triangolo rettangolo SDC. La [1], ossia $\mathrm{SD} = \mathrm{SC}\cos\alpha$, dice: *un cateto è uguale all'ipotenusa moltiplicata pel coseno dell'angolo compreso.* La [2], ossia $\mathrm{DC} = \mathrm{SC}\operatorname{sen}\alpha$, dice: *un cateto è eguale all'ipotenusa moltiplicata pel seno dell'angolo opposto al cateto.* La [3] e la [4] dicono: *il rapporto di due cateti è eguale alla*

tangente dell'angolo opposto al primo, ovvero alla cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo.

Inoltre per la [5] si ha: $SC^2 = SC^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = SD^2 + DC^2$, cioè *il teorema di* PITAGORA.



Siano ora **a b c** tre rette, che determinino un triangolo qualunque, e sulle quali siano fissate le direzioni positive. Indichiamo con **A B C** i vertici del triangolo rispettivamente opposti ai lati **a b c**.

La projezione ortogonale del perimetro $BC + CA + AB$ su una retta qualunque **r** del piano è zero, e però

[1] $$BC \cos ra + CA \cos rb + AB \cos rc = 0.$$

Facendo coincidere **r** con **a b c** successivamente, si ha

[2] $$\begin{cases} BC + CA \cos ab + AB \cos ac = 0, \\ BC \cos ba + CA + AB \cos bc = 0, \\ BC \cos ca + CA \cos cb + AB = 0. \end{cases}$$

Queste, moltiplicate per $-BC\ CA\ AB$ e sommate, dànno

[3] $$BC^2 = CA^2 + AB^2 + 2CA.AB \cos bc;$$

e similmente si ha

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BC \cos ca,$$
$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CA \cos ab.$$

Se **r'** è normale a **r** e $rr' = \frac{\pi}{2}$, projettando su **r'** si ha

$$BC \cos r'a + CA \cos r'b + AB \cos r'c = 0;$$

e poichè $r'a = ra - rr' = ra - \frac{\pi}{2}, \ldots$, risulta

[4] $$BC \operatorname{sen} ra + CA \operatorname{sen} rb + AB \operatorname{sen} rc = 0.$$

Facendo coincidere **r** con **a b c** successivamente, si ha

$$CA \operatorname{sen} ab + AB \operatorname{sen} ac = 0,$$
$$BC \operatorname{sen} ba + AB \operatorname{sen} bc = 0,$$
$$BC \operatorname{sen} ca + CA \operatorname{sen} cb = 0,$$

ovvero

[5] $$\mathbf{BC} : \mathbf{CA} : \mathbf{AB} = \operatorname{sen}\mathbf{bc} : \operatorname{sen}\mathbf{ca} : \operatorname{sen}\mathbf{ab}.$$

In tutte queste relazioni si può supporre che le direzioni positive di **a b c** siano scelte in modo che i segmenti **BC CA AB** siano positivi; sicchè **bc ca ab** saranno gli angoli esterni del triangolo, ed avranno i seni eguali a quelli degli angoli interni e i coseni eguali e di segno contrario. Allora le [3] e [5] si potranno enunciare così:

il quadrato di un lato di un triangolo qualunque è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto di questi due lati pel coseno dell'angolo compreso fra essi;

i lati di un triangolo sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

§ **20**. Dalle formole del § precedente si possono trarre varie relazioni importanti tra le funzioni goniometriche di certi angoli.

Anzitutto le [2] essendo lineari omogenee in **BC CA AB**, e verificandosi per valori non tutti nulli di queste, dovrà essere

[6] $$\begin{vmatrix} 1 & \cos\mathbf{ab} & \cos\mathbf{ac} \\ \cos\mathbf{ba} & 1 & \cos\mathbf{bc} \\ \cos\mathbf{ca} & \cos\mathbf{cb} & 1 \end{vmatrix} = 0:$$

relazione fra gli angoli che tre rette qualunque di un piano fanno a due a due, e che si può anche scrivere:

$$1 - \cos^2\mathbf{bc} - \cos^2\mathbf{ca} - \cos^2\mathbf{ab} + 2\cos\mathbf{bc}\cos\mathbf{ca}\cos\mathbf{ab} = 0$$

ovvero

[7] $$\operatorname{sen}^2\mathbf{ab} = \cos^2\mathbf{ac} + \cos^2\mathbf{bc} - 2\cos\mathbf{ac}\cos\mathbf{bc}\cos\mathbf{ab}.$$

Se poi nelle [1] e [4] sostituiamo (il che è lecito) a **BC CA AB** le quantità proporzionali $\operatorname{sen}\mathbf{bc}$ $\operatorname{sen}\mathbf{ca}$ $\operatorname{sen}\mathbf{ab}$, abbiamo

[8] $$\cos\mathbf{ra}\operatorname{sen}\mathbf{bc} + \cos\mathbf{rb}\operatorname{sen}\mathbf{ca} + \cos\mathbf{rc}\operatorname{sen}\mathbf{ab} = 0,$$

[9] $$\operatorname{sen}\mathbf{ra}\operatorname{sen}\mathbf{bc} + \operatorname{sen}\mathbf{rb}\operatorname{sen}\mathbf{ca} + \operatorname{sen}\mathbf{rc}\operatorname{sen}\mathbf{ab} = 0.$$

Queste due relazioni legano gli angoli di quattro rette qualunque **a b c r** del piano; le quali rette si possono anche supporre passanti per un punto, poichè gli angoli non si alterano se alle rette si sostituiscono delle loro parallele.

In particolare: facendo coincidere **r** con **c**, la [8] diviene

$$\cos\mathbf{ca}\operatorname{sen}\mathbf{bc} + \cos\mathbf{cb}\operatorname{sen}\mathbf{ca} + \operatorname{sen}\mathbf{ab} = 0,$$

e poichè **ab** = **ac** + **cb**:

$$\operatorname{sen}(\mathbf{ac}+\mathbf{cb}) = \operatorname{sen}\mathbf{ac}\cos\mathbf{cb} + \cos\mathbf{ac}\operatorname{sen}\mathbf{cb}.$$

Or qui **ac** e **cb** sono angoli qualunque: scrivendo invece α e β, abbiamo l'importante relazione:

$$[10] \qquad \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Mutando β in $-\beta$ essa diventa

$$[11] \qquad \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

e qui mutando α in $\frac{\pi}{2}-\alpha$ otteniamo

$$[12] \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

e qui mutando β in $-\beta$:

$$[13] \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Queste formole sono fondamentali per la teoria delle funzioni goniometriche.

Ma senza stare a svolgere qui tutta questa teoria e la trigonometria, noteremo solo la relazione seguente, che si ottiene applicando le [10] e [11]:

$$[14] \qquad \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Esercizii. — Dimostrare le seguenti relazioni:

$$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha\pm\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha\mp\beta),$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha, \quad \cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha, \quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \text{ ecc., ecc.}$$

Doppio rapporto di quattro rette.

§ 21. Siano **a b c**... rette di un fascio **S**, e una retta **r** le sechi in **A B C**... Se **o** è la retta del fascio normale **a r** (in **O**) e si fissano convenientemente i versi positivi pel fascio **S** e per la punteggiata **r**, si avrà, anche nel segno:

$$OA = SO\,\mathrm{tg}\,oa\,,\quad OB = SO\,\mathrm{tg}\,ob\,,\quad OC = SO\,\mathrm{tg}\,oc, \ldots;$$

sicchè per coordinate delle rette **a b c**... si possono assumere $\mathrm{tg}\,oa$ $\mathrm{tg}\,ob$ $\mathrm{tg}\,oc$...

Dalle relazioni precedenti si trae

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OC - OA}{OB - OC} = \frac{\mathrm{tg}\,oc - \mathrm{tg}\,oa}{\mathrm{tg}\,ob - \mathrm{tg}\,oc}\,;$$

ma per la [14] del § precedente:

$$\mathrm{tg}\,oc - \mathrm{tg}\,oa = \frac{\mathrm{sen}(oc - oa)}{\cos oc \cos oa} = \frac{\mathrm{sen}\,ac}{\cos oc \cos oa}\,,$$

$$\mathrm{tg}\,ob - \mathrm{tg}\,oc = \frac{\mathrm{sen}\,cb}{\cos ob \cos oc}\,;$$

dunque

[1] $$\frac{AC}{CB} = \frac{\mathrm{sen}\,ac}{\mathrm{sen}\,cb} \cdot \frac{\cos ob}{\cos oa}\,.$$

Alla stessa relazione si giunge osservando che nei triangoli **SAC** **SBC** si ha

$$\frac{AC}{CS} = \frac{\mathrm{sen}\,ca}{\mathrm{sen}\,ar}\,,\quad \frac{CB}{CS} = \frac{\mathrm{sen}\,bc}{\mathrm{sen}\,br}\,,$$

onde

[2] $$\frac{AC}{CB} = \frac{\mathrm{sen}\,ac}{\mathrm{sen}\,cb} \cdot \frac{\mathrm{sen}\,rb}{\mathrm{sen}\,ra}\,.$$

Essa prova che, se **a b** sono due rette fisse qualunque del fascio, dato il rapporto $\frac{\mathrm{sen}\,ac}{\mathrm{sen}\,cb}$, è noto $\frac{AC}{CB}$ e quindi **C** e quindi **c**. E precisamente: se **c** cade su **a**, il rapporto è ± 0; se **c** cade su **b** il rapporto è $\pm \infty$; se **c** biseca l'angolo **ab**, il rapporto è 1; se **c** biseca l'angolo

adiacente, il rapporto è — 1. Il rapporto $\frac{\text{sen}\,\mathbf{ac}}{\text{sen}\,\mathbf{cb}}$ si può dunque assumere come coordinata della retta **c** del fascio riferita a due rette fisse **a b** del fascio. (Scegliendo per rette fisse **o** e la sua normale, si ricade in tg**oc** come coordinata di **c**).

Allo stesso risultato si può giungere indipendentemente dalla considerazione di una punteggiata. È già chiaro che, data la retta **c**, il rapporto $\frac{\text{sen}\,\mathbf{ac}}{\text{sen}\,\mathbf{cb}}$ sarà pure dato. Inversamente: supponiamo che sia dato questo rapporto e valga r; allora

$$\frac{\text{sen}\,\mathbf{ac}}{\text{sen}\,\mathbf{cb}} = r, \text{ ovvero } r\,\text{sen}(\mathbf{ab} - \mathbf{ac}) = \text{sen}\,\mathbf{ac},$$

$$r\,\text{sen}\,\mathbf{ab}\cos\mathbf{ac} - r\cos\mathbf{ab}\,\text{sen}\,\mathbf{ac} = \text{sen}\,\mathbf{ac},$$

$$r\,\text{sen}\,\mathbf{ab} = (r\cos\mathbf{ab} + 1)\,\text{tg}\,\mathbf{ac},$$

ossia

$$[3] \qquad \text{tg}\,\mathbf{ac} = \frac{r\,\text{sen}\,\mathbf{ab}}{r\cos\mathbf{ab} + 1};$$

ed analogamente si troverebbe $\text{tg}\,\mathbf{cb} = \frac{\text{sen}\,\mathbf{ab}}{\cos\mathbf{ab} + r}$.

Quindi, dato r, è determinata tg**ac** (oppure tg**cb**), e in conseguenza anche la retta **c**.

Abbiamo per la [1] o per la [2]:

$$(\mathbf{ABCD}) = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BC}} : \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{BD}} = \frac{\text{sen}\,\mathbf{ac}}{\text{sen}\,\mathbf{bc}} : \frac{\text{sen}\,\mathbf{ad}}{\text{sen}\,\mathbf{bd}}.$$

Questo risultato è indipendente dalla posizione di **r** e dipende solo dagli angoli fra **a b c d**. Dunque possiamo enunciare il seguente teorema, che trovasi già in Pappo: *quattro rette di un fascio sono secate da una retta qualunque in punti, il cui doppio rapporto rimane costante mentre questa retta muta posizione.*

Esso si definisce per *doppio rapporto* (o *rapporto anarmonico*) delle quattro rette del fascio, e si rappresenta con (**abcd**); sicchè:

$$(\mathbf{abcd}) = \frac{\text{sen}\,\mathbf{ac}}{\text{sen}\,\mathbf{bc}} : \frac{\text{sen}\,\mathbf{ad}}{\text{sen}\,\mathbf{bd}}.$$

Quattro rette di un fascio forniscono 24 doppî rapporti, che si riducono a soli 6 distinti, fra' quali passano le stesse relazioni esposte pei doppî rapporti di quattro punti.

Se $(\mathbf{a\,b\,c\,d}) = -1$, si dice che le quattro rette formano un *gruppo armonico*, ossia che le due coppie **ab cd** sono *armoniche*. Date **a** e **b**, ad ogni posizione di **c** corrisponde una coniugata armonica **d**, e **a d** corrisponde **c**.

Se **c** biseca l'angolo **ab**, **d** biseca l'angolo adiacente. Oltre queste bisettrici non vi sono altre rette coniugate armoniche ed ortogonali; poichè se $\mathbf{cd} = \frac{\pi}{2}$, si ha $(\mathbf{abcd}) = \frac{\operatorname{sen}\mathbf{ac}}{\operatorname{sen}\mathbf{bc}} : \frac{\cos\mathbf{ac}}{\cos\mathbf{bc}} = \frac{\operatorname{tg}\mathbf{ac}}{\operatorname{tg}\mathbf{bc}}$; e quindi, se $(\mathbf{abcd}) = -1$, si ha $\operatorname{tg}\mathbf{ac} = -\operatorname{tg}\mathbf{bc}$, onde $\mathbf{ac} = -\mathbf{bc}$.

Date tre rette **a b c** di un fascio, sarà individuata un'altra retta **d** del fascio, se è dato il doppio rapporto di essa con quelle tre in un ordine assegnato; e però questo doppio rapporto si può adoperare come coordinata della retta che individua, e dicesi allora *coordinata projettiva*. Essa comprende come caso particolare la coordinata $\frac{\operatorname{sen}\mathbf{ad}}{\operatorname{sen}\mathbf{db}}$, bastando supporre che **c** bisechi l'angolo **ab**. E quindi comprende anche la coordinata costituita dalla tangente dell'angolo della retta con una retta fissa.

Una volta scelto il sistema di coordinate per le rette di un fascio, un'equazione qualunque nella coordinata determina tante rette del fascio quante sono le sue radici reali. Però diremo che alle radici immaginarie corrispondono *rette immaginarie*.

Due fasci di rette si dicono *omografici* o *collineari*, se a tre rette date **a b c** dell'uno si fanno corrispondere tre rette date **a' b' c'** dell'altro, e ad una qualunque retta **d** del primo fascio quella retta **d'** del secondo che fa il doppio rapporto $(\mathbf{a'b'c'd'}) = (\mathbf{abcd})$; in tale ipotesi il doppio rapporto di quattro rette qualunque dell'un fascio è eguale a quello delle rette corrispondenti dell'altro.

Se due fasci omografici hanno lo stesso sostegno (centro e piano), ammettono due rette *unite* o *doppie* (reali o immaginarie), cioè due rette in ciascuna delle quali coincidono due rette corrispondenti. E due rette corrispondenti qualunque fanno con queste un doppio rapporto costante.

Se inoltre la corrispondenza è reciproca, le coppie di rette corrispondenti formano una *involuzione quadratica*. E due rette coniugate qualunque sono armoniche con le due rette doppie.

Esercizio 1. Se **a b c** son rette di un fascio, $\frac{\text{sen}\,\mathbf{ac}}{\text{sen}\,\mathbf{bc}}$ è il rapporto delle distanze di ciascun punto di **c** da **a** e **b**.

Es. 2. Il doppio rapporto di quattro rette di coordinate projettive $\rho\ \rho'\ \rho''\ \rho'''$ è $(\rho\ \rho'\ \rho''\ \rho''')$.

Es. 3. Se $(\mathbf{abcd}) = -1$, si ha $\frac{2}{\text{tg}\,\mathbf{ab}} = \frac{1}{\text{tg}\,\mathbf{ac}} + \frac{1}{\text{tg}\,\mathbf{ad}}$; e se inoltre **m** biseca l'angolo **ab**, si ha $\text{tg}^2\mathbf{ma} = \text{tg}\,\mathbf{mc}\ \text{tg}\,\mathbf{md}$.

Es. 4. Scelti ad arbitrio due sistemi di coordinate projettive per due fasci di rette in omografia, questa è espressa da un'equazione bilineare tra le coordinate di due rette corrispondenti. Viceversa: ogni equazione bilineare tra coordinate projettive di due rette di due fasci stabilisce una corrispondenza omografica tra' due fasci.

Es. 5. Se **aa' bb' cc'**... sono coppie di rette in involuzione, esiste in questa generalmente una sola coppia composta di rette ortogonali; e dicendo **m** una di queste due rette, si ha:

$$\text{tg}\,\mathbf{ma}\ \text{tg}\,\mathbf{ma'} = \text{tg}\,\mathbf{mb}\ \text{tg}\,\mathbf{mb'} = \text{tg}\,\mathbf{mc}\ \text{tg}\,\mathbf{mc'} = \ldots.$$

Se nell'involuzione vi sono due coppie di rette ortogonali, ogni coppia si compone di rette ortogonali, cioè si ha un'*involuzione di angoli retti.* Le rette doppie sono immaginarie.

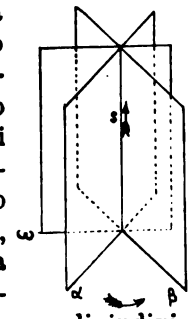
Se le rette doppie di un'involuzione sono ortogonali, due rette coniugate qualunque sono bisecate da esse, e si ha un'involuzione *simmetrica* od *ortogonale.*

CAPITOLO III.

Fascio di piani.

Diedri. Coordinate.

§ 22. Sia s l'asse di un fascio di piani, e siano α β due piani del fascio. Il piano α può rotare intorno ad s in due versi, l'uno opposto all'altro; e precisamente, rispetto a un osservatore disteso lungo la retta s in modo che la direzione positiva di s sia quella dai piedi al capo, la rotazione può apparire procedente verso sinistra o verso destra. Rotando in un verso, α viene a coincidere con β dopo aver descritto un angolo diedro; ed è chiaro che si potrebbe assumere come *coordinata* di un piano qualunque α del fascio il numero che misura il diedro fra un piano fisso ω (*origine*) del fascio e il piano α, quando si sceglie un certo diedro unità. Una volta assegnato il verso positivo, questo numero può ricevere valori positivi e negativi qualunque; e non cessa di individuare uno stesso piano quando gli si aggiunge o toglie un multiplo del numero π, che misura il diedro piatto.



Su ciascun piano si suol distinguere una *pagina* positiva e una negativa, nel modo seguente. Un piano divide lo spazio in due regioni: ora, se ad un osservatore che stia eretto coi piedi sul piano in una delle due regioni, una rotazione nel piano apparisce fatta in quel verso che si è assunto come positivo (§ 14), ad un osservatore eretto nell'altra regione la stessa rotazione apparirà fatta nel verso negativo; e noi diremo pagina positiva quella che è veduta dal primo osservatore, negativa quella che è veduta dal secondo. Quindi, dato un piano qualunque nello spazio, è pure data la sua pagina positiva (e quella negativa) se è dato il verso positivo delle

rotazioni fatte in quel piano; e viceversa, questo verso è dato quando è detto quale delle due pagine del piano sia la positiva. Sulle rette normali al piano prenderemo come direzioni positive quelle che progrediscono dal piano verso il primo osservatore.

Se in ciascun piano di un fascio si distingue la pagina positiva dalla negativa, allora per portare a coincidere una pagina con la opposta occorre una rotazione di un diedro piatto, e quindi al numero testè definito come coordinata di un piano del fascio si potrà aggiungere o togliere un multiplo qualunque di 2π (mentre, se non si fa la distinzione delle pagine, si può aggiungere o togliere un multiplo qualunque di π).

Un fascio di piani $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ è secato da una retta **r**, che sia sghemba con l'asse **s** (*), in una punteggiata **ABC** . . . ; ed ogni sistema di coordinate pei punti di questa può servire come sistema di coordinate pei piani del fascio. Fra questi piani quello che è parallelo ad **r** corrisponde al punto all'infinito di quella punteggiata.

Del pari: un fascio di piani $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ è secato da un piano, che non passi per l'asse **s**, in un fascio di rette **a b c** . . ; ed ogni sistema di coordinate per questo fascio di rette può servire pel fascio di piani. In particolare: un piano normale ad **s** seca in un fascio di rette, i cui angoli sono proporzionali a' diedri fra' piani corrispondenti del fascio, e quindi si possono supporre misurati dai medesimi numeri.

Dati due piani non paralleli $\alpha\,\beta$, le rette dell'uno di essi α tagliano l'altro piano β nei punti di una retta: la retta d'intersezione dei due piani $\alpha\,\beta$. Supposto ora che questi piani divengano paralleli, diremo ancora che essi si tagliano in una retta, la quale è l'insieme dei punti in cui β è tagliato dalle rette di α, cioè dei punti all'infinito delle rette di α. Potremo dunque dire che i punti all'infinito di un piano costituiscono una retta, *la retta all'infinito* del piano; e che due piani paralleli hanno comune la retta all'infinito.

Un sistema di piani paralleli è dunque un fascio con l'asse all'infinito. Per coordinate di essi servono quelle di una punteggiata sezione del fascio. Le pagine positive sono determinate, una volta scelta la comune direzione normale positiva. Esse costituiscono una *giacitura.*

(*) Vale a dire che non stia con essa in uno stesso piano.

È facile vedere che alle convenzioni già fatte intorno ai punti all'infinito conviene aggiungere quest'altra: *tutti i punti all'infinito dello spazio stanno in un piano.* Infatti, siccome due piani qualunque dello spazio hanno comune una retta, così le loro rette all'infinito avranno comune il punto all'infinito di questa retta; quindi tutte le rette all'infinito si tagliano mutuamente (nei varî punti all'infinito), e stanno perciò nel piano determinato da due qualunque di esse. Dunque veramente le rette e i punti all'infinito dello spazio stanno tutti in un piano, detto *piano all'infinito* (*).

Projezione mediante piani.
Doppio rapporto di quattro piani.

§ **23.** Un fascio di piani è secato da una retta in una punteggiata, e da un piano in un fascio di rette: diremo che il fascio di piani *projetta* dall'asse la punteggiata e il fascio di rette. Più generalmente: se **L M N**... sono dei punti qualunque dello spazio e **s** è l'asse di un fascio di piani, i piani **sL sM sN**... secano una retta qualunque **r'** nei punti **L' M' N'**..., detti *projezioni* di **L M N**... su **r'** da **s**. Mentre un punto percorre il segmento **LM**, la sua projezione percorre il segmento **L'M'** *projezione* di **LM**, e così via. Assegnata su **r'** la direzione positiva, si ha il teorema: *Con qualunque linea, sia retta sia poligonale, si vada da un punto a un altro, le projezioni di queste linee su una stessa retta e da una stessa retta sono eguali.* In particolare: *la projezione di un poligono è nulla.*

(*) È bene ripetere che queste cose riguardanti punti e rette all'infinito non sono teoremi, ma solo convenzioni, fatte collo scopo di generalizzare le proposizioni geometriche e rimuovere le eccezioni che queste presenterebbero. E lo scopo è così importante, che giustifica pienamente l'introduzione di questi concetti; i quali, se si intendessero altrimenti che come pure convenzioni, potrebbero sembrare assurdi.

La nozione del punto all'infinito di una retta e della retta all'infinito di un piano rimontano a *Desargues (Brouillon, project* etc. 1639). Quella del piano all'infinito nello spazio è dovuta a *Poncelet* (*Traité des propriétés projectives*, 1822).

Se **s** è all'infinito, allora i punti **L M N**... sono projettati sulla retta **r'** secondo una data giacitura, e le cose ora esposte si applicano a questo caso. P. es., *la projezione di un poligono su una retta secondo una giacitura qualunque è nulla.*

Inversamente poi: se sono nulle le projezioni di una linea poligonale fatte su tre rette qualunque (distinte o no) secondo tre giaciture non parallele a una stessa direzione, allora la linea poligonale è chiusa; poichè i suoi due punti estremi dovranno trovarsi nello stesso tempo sugli stessi tre piani distinti e non formanti fascio, e quindi coincideranno.

Più particolare ancora è il caso della projezione *ortogonale* o *normale* a una retta **r'**, cioè quando i piani projettanti sono perpendicolari a **r'**. Sia **AB** un segmento di una retta **r**, **A'B'** la projezione normale di **AB** su **r'**, e **AB''** la projezione normale di **AB** sulla **r''** parallela a **r'** per **A**. Sarà allora (§ 16) $\frac{AB''}{AB} = \cos r''r$. Ora **AB''** è eguale e parallela nella stessa direzione a **A'B'** (*equipollente* a **A'B'**); e inoltre l'angolo **r''r** è eguale a **r'r**, intendendo al solito per angolo **r'r** delle direzioni positive di **r'** e **r** l'angolo delle parallele ad esse uscenti da un punto qualunque dello spazio (angolo che è costante, qualunque sia questo punto). In conseguenza avremo

$$\frac{A'B'}{AB} = \cos r'r, \quad A'B' = AB \cos r'r.$$

§ **24**. Le due punteggiate **ABCD**..., **A'B'C'D'**... siano sezioni di uno stesso fascio di piani $\alpha\beta\gamma\delta$... mediante due rette **r r'**; e la retta **AB'** sechi il fascio in una punteggiata **AB'C''D''**... Allora **ABCD**... e **AB'C''D''**... sono sezioni di uno stesso fascio di rette (quello in cui il piano **BAB'** seca il fascio di piani $\alpha\beta\gamma\delta$...), onde **(ABCD)** = **(AB'C''D'')**; e **AB'C''D''**..., **A'B'C'D'**... sono anche sezioni di uno stesso fascio di rette, onde **(AB'C''D'')** = **(A'B'C'D')**; vale a dire: *il doppio rapporto dei quattro punti in cui una retta seca quattro piani di un fascio è indipendente dalla posizione della retta* (Möbius). Esso si definisce per *doppio rapporto dei quattro piani del fascio*, e s'indica con $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

È chiaro che il doppio rapporto delle quattro rette in cui un piano seca i quattro piani del fascio è eguale allo stesso doppio rapporto dei quattro piani. Scelto il piano secante normale all'asse, troviamo

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\gamma}{\operatorname{sen}\beta\gamma} : \frac{\operatorname{sen}\alpha\delta}{\operatorname{sen}\beta\delta}.$$

Dati α β γ, si può assumere $(\alpha\beta\gamma\delta)$ come coordinata (*projettiva*) di δ, mentre δ varia nel fascio. Se γ biseca il diedro $\alpha\beta$, la coordinata diviene $\frac{\operatorname{sen}\beta\delta}{\operatorname{sen}\delta\alpha}$. E se inoltre α e β sono perpendicolari tra loro, la coordinata diviene $\operatorname{tg}\beta\delta$.

Se $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$, le coppie $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ si dicono *armoniche*. Quelle infinite coppie di piani di un fascio, che sono armoniche con una coppia fissa, si dicono formare un'*involuzione* (quadratica).

Due fasci di piani, con lo stesso asse o con assi diversi, si dicono *omografici* o *collineari* quando, scelti tre piani α β γ dell'un fascio come corrispondenti a tre piani dati α' β' γ' dell'altro, si fanno corrispondere due piani variabili δ e δ' che determinano con quelli doppî rapporti eguali: $(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha'\beta'\gamma'\delta')$; onde segue che a quattro piani qualunque dell'un fascio corrispondono quattro piani dell'altro formanti lo stesso doppio rapporto.

Le sezioni di due fasci omografici di piani, fatte con due rette o con due piani qualunque, sono due punteggiate o due fasci di rette omografici.

Forme prospettive e projettive.

§ 25. Se due sistemi di punti si corrispondono univocamente, e in modo che le rette congiungenti coppie di punti corrispondenti passino tutte per uno stesso punto, quei due sistemi si dicono *prospettivi* mutuamente e col sistema di quelle rette. In particolare: due punteggiate, sezioni di uno stesso fascio di rette, sono prospettive mutuamente e col fascio.

Due fasci di rette, sezioni di uno stesso fascio di piani, si dicono *prospettivi* mutuamente e col fascio di piani.

Due fasci di rette projettanti una stessa punteggiata si dicono pure *prospettivi*. Questa posizione dei due fasci di rette è identica colla precedente, salvo quando i due fasci hanno comune il centro oppure il piano.

Due fasci di piani finalmente si dicono *prospettivi* quando projettano uno stesso fascio di rette.

Due forme di 1ª specie prospettive sono omografiche; poichè dalla definizione del doppio rapporto di quattro elementi di un fascio

di rette o di piani segue che due quaterne di elementi corrispondenti delle due forme, qualunque siano queste, hanno lo stesso doppio rapporto. E si noti che l'elemento comune alle due forme corrisponde a sè stesso in quell'omografia.

Viceversa: date due forme omografiche, se esse si dispongono in modo da avere due elementi corrispondenti sovrapposti, esse saranno prospettive. Infatti, abbiansi ad esempio due punteggiate omografiche **ABCD** ... e **A'B'C'D'** ..., in cui i punti corrispondenti **A A'** coincidano: esse saranno sezioni di uno stesso fascio di rette; poichè i due fasci concentrici e omografici tra loro, che projettano le due punteggiate dal punto comune alle rette **BB' CC'**, avranno tre elementi uniti (queste due rette e quella che passa pel punto **A** o **A'**), e quindi saranno identici.

Date in un certo ordine varie forme fondamentali di 1ª specie, se ciascuna produce la seguente (elemento per elemento) mediante una projezione od una sezione, due qualunque di esse si dicono *projettive*. Tali sono, p. e.: una punteggiata e un fascio di piani che la projetti, due punteggiate sezioni di un fascio di piani, due fasci di piani projettanti una stessa punteggiata, ecc.

Due forme prospettive sono projettive; ma non viceversa, in generale.

Due forme projettive con una stessa forma sono projettive fra loro.

Projettive diconsi quelle proprietà che si conservano passando da una forma ad una projettiva, nonchè quelle quantità che conservano lo stesso valore passando da una forma ad una projettiva. P. e., il doppio rapporto di quattro elementi di una forma di 1ª specie è una quantità projettiva (onde la denominazione di *projettive* data alle coordinate definite come doppi rapporti ne' §§ 9 e 21); la relazione di armonia è projettiva; ecc.

Due forme projettive omonime sono evidentemente omografiche.

Si può dimostrare che, viceversa: *due forme omografiche sono projettive*. Infatti è chiaro che in questa dimostrazione si può supporre che le due forme siano, p. e., due fasci di rette **a b c d** ..., **a'b'c'd'** ... posti in uno stesso piano. Se dal punto **aa'** si conducono due rette qualunque in questo piano, esse taglieranno risp. quei fasci in due punteggiate **ABCD** ..., **A'B'C'D'** ..., le quali saranno omografiche ed avranno i punti corrispondenti **A A'** coincidenti; e quindi saranno prospettive, cioè sezioni di uno stesso fascio di rette. I due fasci

dati, essendo dunque a loro volta prospettivi con questo terzo fascio, saranno projettivi fra loro.

Esercizio 1. $\frac{\text{sen}\,\alpha\delta}{\text{sen}\,\beta\delta}$ è il rapporto delle distanze di qualunque punto del piano δ dai piani α e β, se $\alpha\,\beta\,\delta$ sono tre piani di un fascio.

Es. 2. Se **ABC**... **L** è un poligono piano o sghembo, e sui lati **AB BC**... **LA** sono presi i punti **M N**... **R**; projettando i punti **A B**... **M N**... da un punto me diante le rette **a b**... **m n**..., si ha

$$\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{MB}}\cdot\frac{\mathbf{BN}}{\mathbf{NC}}\cdots\frac{\mathbf{LR}}{\mathbf{RA}}=\frac{\text{sen}\,\mathbf{am}}{\text{sen}\,\mathbf{mb}}\cdot\frac{\text{sen}\,\mathbf{bn}}{\text{sen}\,\mathbf{nc}}\cdots\frac{\text{sen}\,\mathbf{lr}}{\text{sen}\,\mathbf{ra}}.$$

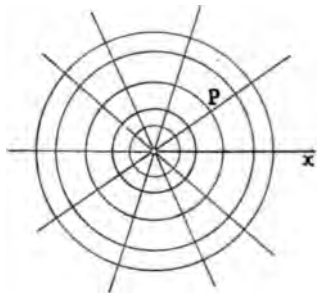
Il 1° membro fu chiamato *rapporto di moltisezione* da *Möbius*.
Se i punti **M N**... **R** sono in una retta o in un piano, quest'espressione vale — 1 o + 1, secondochè il numero de' lati è dispari o pari.

Es. 3. Scelte coordinate projettive per due fasci di piani, l'omografia di essi viene espressa da una equazione bilineare nelle coordinate di due piani corrispondenti.

Es. 4. In due fasci di rette o di piani omografici, vi è una coppia di elementi ortogonali dell'uno che ha per corrispondente una coppia di elementi ortogonali dell'altro. Se **ij i'j'** sono queste due coppie e **a a'** due elementi corrispondenti variabili, si ha **tgia tgj'a'** = costante.

Es. 5. Se in un fascio di piani si ha un'involuzione, vi è una coppia di elementi coniugati e ortogonali. Detti **o o'** questi elementi e **a a'** due qualunque coniugati, si ha **tgoatgoa'** = costante.

del fascio, e il numero ρ che misura il segmento **OP**. Si può, volendo, assumere ρ e φ sempre positivi: allora φ misura l'angolo (positivo in un verso fissato) della direzione **OP** colla direzione positiva di x.



Pei punti di **x** φ è zero o un multiplo di π; per **O**, ρ è nullo e φ indeterminato. Il punto **O** si chiama *polo*, la retta **x** *asse polare*, φ *anomalia*, ρ *vettore*, φ e ρ *coordinate polari*. Due punti aventi lo stesso vettore e le anomalie differenti per un multiplo di 2π, coincidono.

In questo sistema di coordinate ciascun punto sta su una retta del fascio di centro **O** e su uno degli infiniti circoli col centro in **O**: fascio di rette e sistema di circoli, ciascuno dei quali esaurisce il piano.

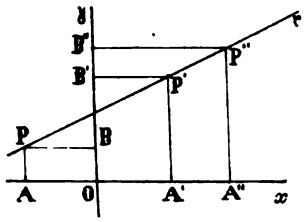
Un modo che si presenta spontaneo per individuare i punti di un piano, consiste nel considerare nel piano due fasci di rette intorno a due punti fissi **O O'**. Per ogni punto del piano passa una retta del primo fascio e una del secondo, ciascuna individuata da un numero (che può misurare un angolo, un rapporto di seni, un doppio rapporto, ecc.), e quindi ogni punto è individuato da due numeri. Un tal sistema di coordinate può dirsi *bipolare*. Da esso si deduce come caso particolare il sistema cartesiano, bastando supporre che **O O'** siano i punti all'infinito di due rette fisse **x y**.

Si potrebbero usare come coordinate nel piano i numeri che misurano le distanze di un punto da due punti fissi **O O'**; in altre parole, considerare i due sistemi di circoli coi centri in **O** e **O'**, e prendere per coordinate le misure dei raggi dei due circoli che passano pel punto che si considera. Ma allora due numeri determinerebbero, a seconda dei casi, due o uno o nessun punto (reale); e ciò è un inconveniente.

Punteggiate in un piano. Baricentri.

§ **28**. Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane (cioè due assi **x y** colle loro direzioni positive, ed un'unità lineare); e consideriamo una retta punteggiata nello stesso piano. Siano **P** $(x\ y)$,

$P'(x'\ y')$, $P''(x''\ y'')$ tre punti di essa, e pongasi $PP'' : P''P' = r$. Se $P\,P'\,P''$ si projettano sull'asse delle x secondo l'asse delle y in



$A\,A'\,A''$, saranno $x\,x'\,x''$ le ascisse di questi punti, e (pel teorema di Talete) sarà anche $AA'' : A''A' = r$, ossia (§ 4)

$$\frac{x''-x}{x'-x''} = r;$$

ed analogamente, projettando sull'asse delle y secondo l'asse delle x in $B\,B'\,B''$, sarà $BB'' : B''B' = r$, ossia

$$\frac{y''-y}{y'-y''} = r;$$

onde risulta

$$\frac{x-x''}{x'-x''} = \frac{y-y''}{y'-y''}:$$

questa è dunque condizione necessaria perchè i tre punti appartengano a una stessa retta. Essa è anche sufficiente; giacchè, se essa si verifica, la retta PP' è tagliata da $A''P''$ e $B''P''$ in due punti tali, che i rapporti delle loro distanze da P e P' sono uguali rispettivamente ai rapporti delle distanze di A'' da A e A' e delle distanze di B'' da B e B'; or questi rapporti, in virtù di quella relazione, sono uguali tra loro; dunque quei due punti coincidono, cioè P sta sulla retta PP'.

Abbiamo anche

$$x'' = \frac{x+rx'}{1+r}, \quad y'' = \frac{y+ry'}{1+r},$$

oppure, ponendo $r = \frac{m}{l}$,

$$x'' = \frac{lx+mx'}{l+m}, \quad y'' = \frac{ly+my'}{l+m}.$$

Queste formole si possono anche scrivere:

$$lx + mx' = kx'',$$
$$ly + my' = ky'',$$

ponendo $\qquad l + m = k;$

e a queste tre equazioni lineari omogenee in $l\ m\ k$, quantità non

tutte nulle, si trae

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è dunque, sotto altra forma, la condizione perchè i tre punti $(x\,y)$, $(x'\,y')$, $(x''\,y'')$ appartengano a una stessa retta.

Essa si sviluppa in vari modi, per esempio:

$$x\,(y' - y'') - y\,(x' - x'') + (x'y'' - x''y') = 0\,,$$
$$(x'y'' - x''y') + (x''y - xy'') + (xy' - x'y) = 0\,.$$

In particolare: se una retta seca gli assi nei punti $(p\,0)$, $(0\,q)$, e se $(x\,y)$ è un punto qualunque di essa, si ha la relazione

$$qx + py - pq = 0\,,$$

ossia

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

§ **29**. Dati nel piano dei punti $\mathbf{P}_1(x_1\,y_1)$, $\mathbf{P}_2(x_2\,y_2)$, $\mathbf{P}_3(x_3\,y_3)$, ..., ed annessi ad essi rispettivamente i numeri (*pesi*) $m_1\,m_2\,m_3\ldots$, si operi su questi punti col procedimento che esponemmo per una punteggiata (§ 5); vale a dire: si trovi quel punto della punteggiata $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ che è baricentro di questi due punti; annessogli il peso $m_1 + m_2$, si trovi il baricentro di esso e $\mathbf{P}_3$; a questo nuovo punto si annetta il peso $m_1 + m_2 + m_3$, e si trovi il baricentro di esso e $\mathbf{P}_4$; e così via. Si troverà infine un punto $\mathbf{P}$ di coordinate

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}\,,\quad \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}\,,$$

indipendente dall'ordine tenuto nella composizione, e che dicesi *baricentro* dei punti $\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3\ldots$ dai pesi $m_1\,m_2\,m_3$, ... Esso non varia se questi pesi si moltiplicano per una stessa quantità.

Se i pesi sono eguali, il baricentro prende il nome di *centro delle medie distanze* dei punti dati. Per due punti è

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\,,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$

ed è il punto medio fra essi; per tre punti è

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\,,\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right),$$

ed è il punto comune alle mediane del triangolo dei tre punti; e così via.

Nel caso di tre punti $P_1\ P_2\ P_3$ non di una stessa punteggiata, si può provare che ogni punto P del piano è baricentro dei tre punti dati, quando ad essi siano applicati tre pesi convenienti. Ciò emerge dall'eseguire in ordine inverso la costruzione del baricentro; del resto, se $x\ y$ sono le coordinate di P, e si stabiliscono le equazioni

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

queste liberate da' denominatori riescono lineari omogenee nelle tre quantità incognite $m_1\ m_2\ m_3$, e determinano i loro mutui rapporti.

Fissati adunque i tre punti $P_1\ P_2\ P_3$ del piano, ogni altro punto è determinato dai valori corrispondenti delle quantità $m_1\ m_2\ m_3$, o meglio, dei rapporti di due di esse alla terza: e viceversa, dato il punto, sono determinati questi rapporti. Perciò possiamo assumere questi due rapporti come coordinate di P, e possiamo anche chiamare i tre numeri $m_1\ m_2\ m_3$ *coordinate omogenee* di P, e precisamente coordinate *baricentriche*.

Le equazioni scritte dianzi legano queste coordinate alle cartesiane $x\ y$, e permettono di passare dall'una all'altra specie di coordinate.

Esercizio 1. Dimostrare il teorema di *Menelao:* « la condizione necessaria e sufficiente, perchè tre punti A′ B′ C′, posti sui lati BC CA AB di un triangolo ABC, siano in linea retta, è

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1 \text{ ».}$$

Es. 2. Applicando la nozione del baricentro, dimostrare il teorema di *Ceva:* « la condizione necessaria e sufficiente, perchè (usando le stesse denominazioni dell'es. prec.) le rette AA′ BB′ CC′ passino per uno stesso punto, è

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \text{ ».}$$

Es. 3. Con lo stesso principio dimostrare che le tre bisettrici degli angoli interni di un triangolo concorrono in un punto. Lo stesso per due bisettrici di angoli esterni e una di angolo interno. Lo stesso per le tre altezze.

Es. 4. I punti medii delle diagonali di un quadrilatero completo (v. § 41) sono in linea retta.

Es. 5. Nel piano, perchè un punto P sia il baricentro di più punti $P_1\ P_2 \ldots$ co' pesi $m_1\ m_2 \ldots$, basta che la projezione di P secondo due direzioni diverse sopra due

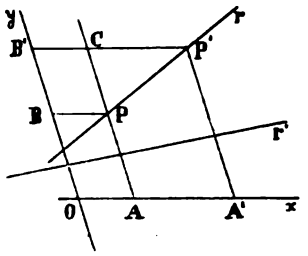
rette (distinte o no) sia il baricentro delle projezioni di $P_1\ P_2 \ldots$ co' pesi $m_1\ m_2 \ldots$ Allora lo stesso avverrà per le projezioni secondo e sopra ogni altra retta.

Se poi **Q** è un punto del piano, e sulle rette $QP_1\ QP_2 \ldots QP$ si portano segmenti proporzionali a $m_1.QP_1$, $m_2.QP_2, \ldots, -(m_1 + m_2 + \ldots).QP$, con segmenti equipollenti ad essi si può chiudere un poligono.

Es. 6. Le coordinate baricentriche di un punto nel piano sono proporzionali alle distanze del punto dai lati del triangolo dei tre punti di riferimento, moltiplicate rispettivamente per le lunghezze dei lati stessi o pei seni degli angoli opposti, ossia sono proporzionali alle aree dei triangoli aventi per un vertice il punto che si considera e per lati opposti rispettivamente i tre lati del triangolo di riferimento. (Quanto ai segni di queste distanze ed aree, si veda il § 31).

Relazioni fra angoli e distanze.

§ 30. Sia **r** una retta, $P(x\,y)$ e $P'(x'\,y')$ due suoi punti, $\rho = PP'$ il numero che misura la loro distanza, $\alpha = xr$ e $\beta = ry$ i numeri che misurano gli angoli delle direzioni positive degli assi coordinati con quella di **r**, $\omega = xy$ il numero che misura l'angolo delle direzioni positive degli assi. Se **P** e **P'** si projettano sull'asse delle x secondo l'asse delle y in **A** e **A'**, essendo x e x' le ascisse di **A** e **A'**, sarà $AA' = x' - x$. E se **P** e **P'** si projettano sull'asse delle **y** secondo l'asse delle x in **B** e **B'**, sarà $BB' = y' - y$. Se **C** è il punto comune alle **AP** **B'P'**, sarà $CP' = AA' = x' - x$, $PC = BB' = y' - y$.



Applicando al triangolo **PP'C** le relazioni [2]-§ 19 (ovvero projettando normalmente sui due assi e su **r**, ed eguagliando la somma delle projezioni di **PC** e **CP'** a quella di **PP'**), si ha

$$[1] \qquad (x' - x) \qquad + (y' - y) \cos \omega = \rho \cos \alpha,$$

$$[2] \qquad (x' - x) \cos \omega + (y' - y) \qquad = \rho \cos \beta,$$

$$[3] \qquad (x' - x) \cos \alpha + (y' - y) \cos \beta = \rho.$$

Applicando la [3]-§ 19 (oppure sostituendo nella [3] le espressioni di $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ ricavate dalle [1] e [2]), si ha poi

$$[4] \qquad \rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2\,(x' - x)\,(y' - y) \cos \omega,$$

relazione che dà la distanza di due punti espressa nelle loro coordinate.

Applicando la [6]-§ 20 (oppure eliminando le quantità $x' - x$, $y' - y$, ρ tra le [1], [2], [3]), si ha

$$[5] \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \operatorname{sen}^2\omega\,;$$

relazione fra gli angoli α e β che una retta qualunque **r** del piano fa con gli assi. La quale relazione del resto deve equivalere all'altra $\mathbf{xr} + \mathbf{ry} = \mathbf{xy}$, cioè:

$$\alpha + \beta = \omega.$$

Applicando la [5]-§ 19, si ha

$$x' - x : y' - y : \rho = \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\omega,$$

ossia

$$[6] \qquad x' - x = \rho\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega}\,, \quad y' - y = \rho\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega}\,.$$

Se **r'** è un'altra retta, e α' β' misurano gli angoli che gli assi fanno con **r'**, projettando **PP'C** su **r'** si ha

$$(x' - x)\cos\alpha' + (y' - y)\cos\beta' = \rho\cos\mathbf{r'r}.$$

Questa equazione e le [1], [2] sono lineari omogenee in $x' - x$, $y' - y$ e ρ, delle quali una è arbitraria; quindi dev'essere

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\mathbf{rr'} \end{vmatrix} = 0,$$

onde

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{vmatrix}\cos\mathbf{rr'} = 0\,,$$

$$[7] \qquad \cos\mathbf{rr'} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 0 \end{vmatrix}\,,$$

$$[8] \qquad \cos\mathbf{rr'} = \frac{\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' - (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\alpha'\cos\beta)\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\,,$$

relazione che esprime il coseno dell'angolo di due rette mediante i coseni degli angoli che esse fanno con gli assi. (Di questi angoli basta darne uno per coppia, essendo $\alpha + \beta = \omega$, $\alpha' + \beta' = \omega$).

La condizione perchè le due rette r r' siano ortogonali è $\cos \mathbf{rr}' = 0$, ossia

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega & \cos\alpha \\ \cos\omega & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' - (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\alpha'\cos\beta)\cos\omega = 0.$$

Applicando la [9]-§ 20 alle rette r r' e agli assi, abbiamo

$$\operatorname{sen}\mathbf{rr}'\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta' - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha' = 0,$$

$$[9]\quad \operatorname{sen}\mathbf{rr}' = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta' - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha') = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha' & \operatorname{sen}\beta' \end{vmatrix}.$$

Infine applichiamo questa relazione alle rette s s', perpendicolari a r r' in modo che sia $\mathbf{rs} = \mathbf{r's'} = \frac{\pi}{2}$. Osservando che $\mathbf{ss}' = \mathbf{rr}'$, e che α α' si aumentano di $\frac{\pi}{2}$ mentre β β' si diminuiscono di $\frac{\pi}{2}$, troviamo

$$[10]\quad \operatorname{sen}\mathbf{rr}' = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha') = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}.$$

Per assi ortogonali le esposte relazioni divengono più semplici, giacchè $\cos\omega = 0$, $\operatorname{sen}\omega = 1$. E si ha

$$x' - x = \rho\cos\alpha, \quad y' - y = \rho\cos\beta,$$
$$\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$
$$\cos\mathbf{rr}' = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta',$$
$$\operatorname{sen}\mathbf{rr}' = \operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\beta'\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'.$$

Si noti che qui $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$, ...

Esercizio 1. Se sulle rette $\mathbf{r}\,\mathbf{s}$ si considerano due coppie di punti $\mathbf{PP}_1$ e $\mathbf{QQ}_1$, si ha (*Carnot*)

$$2\mathbf{PP}_1.\mathbf{QQ}_1 \cos \mathbf{rs} = \mathbf{PQ}_1^2 + \mathbf{P}_1\mathbf{Q}^2 - \mathbf{PQ}^2 - \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{PQ}^2 & \mathbf{PQ}_1^2 \\ 1 & \mathbf{P}_1\mathbf{Q}^2 & \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1^2 \end{vmatrix}.$$

Es. 2. Si ha pure, se $\mathbf{P}(x\,y)$, $\mathbf{P}_1(x_1\,y_1)$, $\mathbf{Q}(\xi\,\eta)$, $\mathbf{Q}_1(\xi_1\,\eta_1)$:

$$\mathbf{PP}_1.\mathbf{QQ}_1 \operatorname{sen} \mathbf{rs} = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} \omega \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ \xi_1 - \xi & \eta_1 - \eta \end{vmatrix}.$$

Es. 3. Per due coppie di rette $\mathbf{rr}'$ $\mathbf{ss}'$ in un piano, si ha

$$\begin{vmatrix} \cos \mathbf{rs} & \cos \mathbf{rs}' \\ \cos \mathbf{r}'\mathbf{s} & \cos \mathbf{r}'\mathbf{s}' \end{vmatrix} = \operatorname{sen} \mathbf{rr}' \operatorname{sen} \mathbf{ss}',$$

la quale non è altro che la [10].

Es. 4. Per due terne di rette $\mathbf{r}\,\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2$, $\mathbf{s}\,\mathbf{s}_1\,\mathbf{s}_2$ in un piano, si ha

$$\begin{vmatrix} \cos \mathbf{rs} & \cos \mathbf{rs}_1 & \cos \mathbf{rs}_2 \\ \cos \mathbf{r}_1\mathbf{s} & \cos \mathbf{r}_1\mathbf{s}_1 & \cos \mathbf{r}_1\mathbf{s}_2 \\ \cos \mathbf{r}_2\mathbf{s} & \cos \mathbf{r}_2\mathbf{s}_1 & \cos \mathbf{r}_2\mathbf{s}_2 \end{vmatrix} = 0;$$

come si vede sviluppando secondo una linea, od anche notando che il primo membro non è altro che il prodotto eseguito per verticali delle due matrici

$$\begin{vmatrix} \cos \mathbf{xr} & \cos \mathbf{xr}_1 & \cos \mathbf{xr}_2 \\ \cos \mathbf{yr} & \cos \mathbf{yr}_1 & \cos \mathbf{yr}_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos \mathbf{xs} & \cos \mathbf{xs}_1 & \cos \mathbf{xs}_2 \\ \cos \mathbf{ys} & \cos \mathbf{ys}_1 & \cos \mathbf{ys}_2 \end{vmatrix},$$

dove $\mathbf{x}\,\mathbf{y}$ indicano due assi ortogonali qualunque.

Es. 5. La [4] può scriversi: $\rho^2 = - \begin{vmatrix} 1 & -\cos\omega & x'-x \\ -\cos\omega & 1 & y'-y \\ x'-x & y'-y & 0 \end{vmatrix}.$

Area di un triangolo.

§ **31**. Sia dato in un piano un triangolo di vertici **A B C**. Un osservatore eretto sul piano da una data banda di esso può percorrere il perimetro del triangolo procedendo in due versi opposti; cioè: andando da **A** in **B**, da **B** in **C** e da **C** in **A**, ovvero andando da **A** in **C**, da **C** in **B** e da **B** in **A**. È evidente che nel primo caso il triangolo rimarrà o sempre a destra o sempre a sinistra dell'osservatore, e nel secondo caso rimarrà sempre dalla parte opposta. Conveniamo, poichè ci sarà utile, di assumere come positivo o come negativo il numero che misura l'area del triangolo, secondochè il perimetro è percorso dall'osservatore in un verso o nell'altro. Se indichiamo con **ABC** questo numero quando il perimetro è percorso nel verso **ABC**, facendo tutte le permutazioni dei vertici **A B C** abbiamo

$$ABC = BCA = CAB = -BAC = -ACB = -CBA.$$

Rispetto a un altro osservatore, eretto sul piano della stessa banda del precedente e in un punto interno al triangolo, il movimento di un punto che percorra il perimetro del triangolo apparirà procedente verso destra o verso sinistra secondochè il perimetro è percorso in un verso o nell'opposto; e precisamente, secondochè rispetto al primo osservatore il triangolo restava a destra o a sinistra.

Che se il secondo osservatore è eretto in un vertice del triangolo, a lui il lato opposto apparirà percorso rispettivamente verso destra o verso sinistra, e quindi l'angolo fra le due direzioni (lati) che da quel vertice vanno agli altri due vertici apparirà descritto rispettivamente con una rotazione verso destra o verso sinistra. Noi converremo di dare all'area lo stesso segno che compete all'angolo suddetto.

Dalla definizione segue che due triangoli **ABC AB'C'**, aventi un vertice **A** comune e i lati opposti **BC B'C'** sulla stessa retta, sono per lo stesso verso o per versi opposti secondochè **BC** e **B'C'** sono nella stessa direzione o in direzioni opposte. E due triangoli **ABC ABC'**, con un lato **AB** comune, sono per lo stesso verso o per versi opposti secondochè i vertici non comuni **C C'** sono dalla stessa banda della retta **AB** o da bande opposte, vale a dire secondochè

le perpendicolari CD C'D' condotte da C e C' alla AB (altezze dei triangoli) sono nella stessa direzione o in direzioni opposte.

Queste osservazioni mostrano che, nell'applicare il teorema « il numero che misura l'area di un triangolo è la metà del prodotto dei numeri che misurano un lato e l'altezza corrispondente », si può tener conto del segno con cui compajono i numeri che misurano ciascun lato e l'altezza corrispondente.

Siano A B C i vertici di un triangolo, e a b c le rette dei lati BC CA AB, sulle quali intenderemo assegnate ad arbitrio le direzioni positive; supporremo pure assegnato nel piano un verso positivo per gli angoli, affinchè siano determinati i segni degli angoli delle direzioni positive di quelle rette. Se CD è perpendicolare a AB, si avrà, in valore assoluto,

$$ABC = \tfrac{1}{2} AB \,.\, CD\,;$$

ma nel triangolo rettangolo ADC è $CD = AC \operatorname{sen} cb$; dunque, sempre in valore assoluto, sarà

$$ABC = \tfrac{1}{2} AB.AC \operatorname{sen} cb.$$

Se ci atteniamo alla convenzione fatta dianzi, questa eguaglianza sussiste anche avuto riguardo ai segni, quando i segmenti AB AC sono positivi sulle rette c b. Nè cessa di sussistere quando uno di questi segmenti o entrambi divengano negativi; poichè l'inversione della direzione positiva su c fa mutar di segno AB e sen cb, ma non il prodotto; e così via.

Ora riferiamo i punti del piano a due assi cartesiani, e siano $P(x\,y)$, $P_1(x_1\,y_1)$, $P_2(x_2\,y_2)$ i vertici di un triangolo. Se r r' indicano le rette dei lati PP_1 PP_2, abbiamo

$$PP_1P_2 = \tfrac{1}{2} PP_1.PP_2 \operatorname{sen} rr'\,;$$

ma, chiamando α β e α' β' gli angoli di r e r' cogli assi coordinati, si ha dalla [9]-§ 30

$$\operatorname{sen} rr' = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha' & \operatorname{sen}\beta' \end{vmatrix},$$

e dalle [6]-§ 30

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\omega}{PP_1}(y_1 - y), \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\omega}{PP_1}(x_1 - x),$$

$$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{\operatorname{sen}\omega}{PP_2}(y_2 - y), \quad \operatorname{sen}\beta' = \frac{\operatorname{sen}\omega}{PP_2}(x_2 - x)\,;$$

quindi sarà

$$PP_1P_2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\omega \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix}.$$

Questo determinante si può scrivere

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \end{vmatrix};$$

e qui aggiungendo alla seconda ed alla terza orizzontale la prima, avremo anche

$$PP_1P_2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\omega \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix};$$

formola che esprime la misura dell'area del triangolo mediante le coordinate dei vertici.

Il determinante si annulla se i tre punti PP_1P_2 sono sulla stessa retta, il che conferma una proposizione del § 28. Esso cambia segno, insieme con PP_1P_2, se due punti si scambiano.

In particolare: se uno dei tre punti è nell'origine **O**, si ha

$$OP_1P_2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\omega \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\omega.(x_1y_2 - x_2y_1).$$

L'espressione dell'area del triangolo in un piano punteggiato e in coordinate cartesiane presenta analogia con quella della distanza di due punti in una retta punteggiata, la quale è $x_1 - x$ ovvero $-\begin{vmatrix} x & 1 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix}$, se $x\,x_1$ sono le ascisse dei due punti.

Esercizio 1. Se **B C D** sono punti di una retta,

$$ABC : ABD : ACD = BC : BD : CD.$$

Es. 2. Se **A B C D** sono punti di un piano,

$$ABC + ACD + ADB = BCD,$$

ossia

$$BCD - CDA + DAB - ABC = 0.$$

Es. 3. Se **A B C .... L** sono vertici di un poligono piano e **P** un punto variabile

del piano, la somma $PAB + PBC + \ldots + PLA$ è costante, e si può definire come area del poligono, anche se questo è concavo.

Es. 4. L'area del poligono di vertici $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2), \ldots, (x_n y_n)$, divisa per $\operatorname{sen}\omega$, è

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_n y_1 - x_1 y_n).$$

Es. 5. Per due terne di punti in un piano PP_1P_2 e QQ_1Q_2, si ha (v. Es. 1 e 3 § 30)

$$16.PP_1P_2.QQ_1Q_2 = 4 \begin{vmatrix} PP_1.QQ_1 \cos(PP_1, QQ_1) & PP_1.QQ_2 \cos(PP_1, QQ_2) \\ PP_2.QQ_1 \cos(PP_2\, QQ_1) & PP_2.QQ_2 \cos(PP_2, QQ_2) \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & PQ^2 & PQ_1^2 & PQ_2^2 \\ 1 & P_1Q^2 & P_1Q_1^2 & P_1Q_2^2 \\ 1 & P_2Q^2 & P_2Q_1^2 & P_2Q_2^2 \end{vmatrix}.$$

In particolare: 16 volte il quadrato dell'area del triangolo di lati $a\,b\,c$ vale

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = - a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

$$= (a + b + c)(- a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$$

Es. 6. Per due gruppi di cinque punti in un piano $PP_1 \ldots P_4$ e $Q\ Q_1 \ldots Q_4$,

$$\begin{vmatrix} PQ^2 & PQ_1^2 & \ldots & PQ_4^2 \\ P_1Q^2 & P_1Q_1^2 & \ldots & P_1Q_4^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ P_4Q^2 & P_4Q_1^2 & \ldots & P_4Q_4^2 \end{vmatrix} = 0;$$

giacchè indicando con $(x\,y)$, $(x_1\,y_1), \ldots (x_4\,y_4)$ e $(x'\,y')$, $(x'_1\,y'_1), \ldots (x'_4\,y'_4)$ le coordinate di quei punti rispetto ad assi cartesiani ortogonali, questo determinante è il prodotto per orizzontali delle due matrici

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4^2 + y_4^2 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x'^2 + y'^2 & -2x' & -2y' \\ 1 & x'^2_1 + y'^2_1 & -2x'_1 & -2y'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x'^2_4 + y'^2_4 & -2x'_4 & -2y'_4 \end{vmatrix}.$$

In particolare (facendo andare all'infinito in direzioni determinate P_4 e Q_4) si ha

per due quaderne di punti in un piano $P \ldots P_3$ e $Q, \ldots Q_3$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & PQ^2 & \ldots & PQ_3^2 \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & P_3Q^2 & \ldots & P_3Q_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Trasformazione delle coordinate.

§ **32**. I punti di un piano siano riferiti a un sistema di coordinate; e si vogliano invece riferire ad un altro sistema, del quale sia assegnata la connessione col primo. Allora può occorrere di esprimere le nuove coordinate di ciascun punto mediante le primitive; e può occorrere di esprimere le coordinate primitive mediante le nuove, per trasformare le formole che contengono le primitive coordinate in altre che contengano le nuove. Bisogna dunque cercare almeno due equazioni, che leghino le primitive alle nuove coordinate; poichè da tali due equazioni si potranno dedurre quelle in funzione di queste e viceversa; od anche, avendo una formola contenente le coordinate, si potrà eliminare da essa e da quelle due equazioni le primitive coordinate.

Noi esamineremo alcuni casi più ovvii.

Vogliasi passare da due assi cartesiani $x\,y$ di origine O ad altri due $x'\,y'$ di origine O'; siano $x\,y$ le primitive coordinate di un punto P, $X\,Y$ le nuove coordinate dello stesso punto. Considereremo prima due casi particolari, e poi il caso generale.

a) Se i nuovi assi sono paralleli ai primitivi ed hanno le stesse direzioni positive, per definire la loro posizione basta assegnare le coordinate della nuova origine O' rispetto ai primitivi assi; e siano queste $a\ b$. Allora, essendo per ogni projezione parallela

$$\text{proj.}OP = \text{proj.}OO' + \text{proj.}O'P,$$

projettando su x secondo y e su y secondo x, risulta

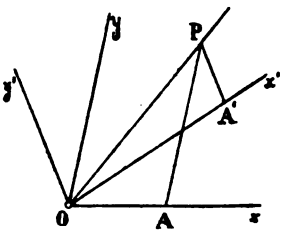
$$[1] \qquad x = a + X, \quad y = b + Y.$$

Queste equazioni esprimono x e y mediante X e Y, e costitui-

scono la *sostituzione* che trasforma ogni funzione di x e y in una funzione di X e Y. Si ha inversamente

$$X = x - a\,, \quad Y = y - b.$$

b) Abbiamo mutato l'origine, ma non le direzioni degli assi. Ora invece muteremo le direzioni degli assi; ma non l'origine; vale a dire supporremo che i nuovi assi passino per **O**; sicchè per fissarne la posizione basta dare uno dei due angoli $\alpha = \mathbf{xx'}$, $\beta = \mathbf{x'y}$, e uno dei due $\alpha' = \mathbf{xy'}$, $\beta' = \mathbf{y'y}$ (essendo $\alpha + \beta = \mathbf{xy}$, $\alpha' + \beta' = \mathbf{xy}$). Se $\mathbf{OA} = x$, $\mathbf{AP} = y$ sono le primitive coordinate di **P**, e $\mathbf{OA'} = X$, $\mathbf{A'P} = Y$ le nuove, abbiamo, per ogni projezione parallela,



$$\text{proj.}\mathbf{OA} + \text{proj.}\mathbf{AP} = \text{proj.}\mathbf{OA'} + \text{proj.}\mathbf{A'P}\,;$$

onde, projettando normalmente sulla direzione normale a una retta **r**, risulta

$$x\cos\left(\mathbf{xr} + \frac{\pi}{2}\right) + y\cos\left(\mathbf{yr} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= X\cos\left(\mathbf{x'r} + \frac{\pi}{2}\right) + Y\cos\left(\mathbf{y'r} + \frac{\pi}{2}\right),$$

ovvero

$$x\,\text{sen}\,\mathbf{xr} + y\,\text{sen}\,\mathbf{yr} = X\,\text{sen}\,\mathbf{x'r} + Y\,\text{sen}\,\mathbf{y'r}\,.$$

Se **r** si fa coincidere successivamente con **y** e con **x**, si ottiene

$$[2] \qquad x = X\frac{\text{sen}\,\mathbf{x'y}}{\text{sen}\,\mathbf{xy}} + Y\frac{\text{sen}\,\mathbf{y'y}}{\text{sen}\,\mathbf{xy}}\,, \quad y = X\frac{\text{sen}\,\mathbf{xx'}}{\text{sen}\,\mathbf{xy}} + Y\frac{\text{sen}\,\mathbf{xy'}}{\text{sen}\,\mathbf{xy}}\,,$$

ovvero, ponendo $\mathbf{xy} = \omega$,

$$[3] \qquad x = X\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\omega} + Y\frac{\text{sen}\,\beta'}{\text{sen}\,\omega}\,, \quad y = X\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\omega} + Y\frac{\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\omega}\,.$$

Queste equazioni dànno x e y espressi mediante X e Y, e costituiscono la sostituzione che trasforma ogni funzione di x e y in una funzione di X e Y. Essa è di 1° grado (lineare) in X e Y, ed è anche *omogenea*.

È bene osservare che, posto $x'y' = \Omega$, deve risultare

$$[4] \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\Omega\,;$$

poichè ciascun membro equivale a OP^2, giusta la [4]-§ 30.

Il determinante dei coefficienti di X e Y nella sostituzione [3] dicesi *modulo* della sostituzione: per la [9]-§ 30 esso vale

$$\begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega} & \frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\omega} \\ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega} & \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\omega} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\alpha' \\ \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\beta' \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}\,.$$

Se ciascuno dei due sistemi di coordinate è ortogonale, e precisamente se $\omega = \frac{\pi}{2}$ e $\Omega = \frac{\pi}{2}$: allora si ha $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\beta' = -\alpha$, e le [3] divengono

$$[3'] \qquad x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha\,, \quad y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha\,;$$

sostituzione di modulo 1.

Se invece, pur essendo i due sistemi ortogonali, si ha $\omega = \frac{\pi}{2}$ e $\Omega = -\frac{\pi}{2}$: allora $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\alpha' = \alpha - \frac{\pi}{2}$, $\beta' = \pi - \alpha$, e la sostituzione diventa

$$[3''] \qquad x = X\cos\alpha + Y\operatorname{sen}\alpha\,, \quad y = X\operatorname{sen}\alpha - Y\cos\alpha\,,$$

di modulo -1.

Entrambe queste sostituzioni (*ortogonali*) dànno

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2.$$

La prima sostituzione corrisponde al caso, che le direzioni positive dei primitivi assi possano portarsi a coincidere con quelle dei nuovi assi mediante una rotazione nel piano comune intorno al punto O e per un angolo α. La seconda corrisponde al caso, che occorra una rotazione di due diedri retti intorno alla comune bisettrice degli angoli xx' yy', per portare a coincidere le direzioni positive dei primitivi assi con quelle dei nuovi.

c) Se da ultimo si tratta di mutare l'origine e le direzioni degli assi: allora basta assegnare le coordinate a e b di $\mathbf{O}'$ rispetto a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, più uno degli angoli $\alpha = \mathbf{xx}'$, $\beta = \mathbf{x}'\mathbf{y}$, e uno degli angoli $\alpha' = \mathbf{xy}'$, $\beta' = \mathbf{y}'\mathbf{y}$; in tutto quattro quantità. Noi possiamo prima dagli assi $\mathbf{x}$ $\mathbf{y}$ passare ad altri due paralleli ad essi e di origine $\mathbf{O}'$, e poi da questi altri passare ai due $\mathbf{x}'$ $\mathbf{y}'$ senza mutare più l'origine. E però avremo, per una trasformazione generale di coordinate cartesiane, le formole

$$[5] \qquad x = a + X\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega} + Y\frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\omega}, \quad y = b + X\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega} + Y\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Questa è una sostituzione lineare, ma non omogenea.

È importante osservare che ogni funzione algebrica razionale intera di x e y si trasforma in una funzione algebrica razionale intera di X e Y dello stesso grado della prima. Infatti, i termini della funzione di x e y sono della forma cx^py^q, ove c è una costante e p q sono interi positivi (zero incluso). Ora se in cx^py^q si sostituiscono a x e y le loro espressioni in X e Y, essendo queste di 1° grado, il prodotto si comporrà di termini della forma CX^rY^s, e non potrà certamente la somma $r+s$ riescire superiore a $p+q$; dunque il grado della funzione non può crescere. Ma non può neanche diminuire; altrimenti, nel ritornare dai nuovi assi ai primitivi, il grado, per ripristinarsi, dovrebbe crescere; il che è impossibile.

§ 33. Esamineremo il caso, che si voglia passare da coordinate cartesiane a coordinate polari. L'ipotesi più semplice è: che le coordinate cartesiane siano ortogonali, il polo sia l'origine stessa $\mathbf{O}$, e l'asse polare sia la $\mathbf{x}$. Allora, se $\mathbf{OA} = x$, $\mathbf{AP} = y$ sono le coordinate cartesiane di $\mathbf{P}$, e $\rho = \mathbf{OP}$, $\varphi = \widehat{\mathbf{x},\mathbf{OP}}$ le coordinate polari dello stesso punto $\mathbf{P}$, il triangolo rettangolo $\mathbf{OAP}$ porge

$$\mathbf{OA} = \mathbf{OP}\cos\widehat{\mathbf{x},\mathbf{OP}}, \qquad \mathbf{AP} = \mathbf{OP}\operatorname{sen}\widehat{\mathbf{x},\mathbf{OP}},$$

ovvero

$$[6] \qquad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\varphi.$$

Questa sostituzione, che serve appunto al passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari, cioè trasforma ogni funzione di x e y in una di ρ e φ, è *trascendente*.

Si ha pure

$$[6'] \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

relazioni che servono per la trasformazione inversa, cioè per passare dalle coordinate polari alle cartesiane.

Sia invece $\mathbf{xy} = \omega$; e, scelto per polo l'origine **0**, sia una retta **r** l'asse polare; sicchè basta dare uno dei due angoli $\mathbf{xr} = \alpha$, $\mathbf{ry} = \beta$. Il triangolo **0AP** porge

$$y : x : \rho = \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) : \operatorname{sen}(\beta - \varphi) : \operatorname{sen}\omega,$$

ovvero

$$x = \rho \frac{\operatorname{sen}(\beta - \varphi)}{\operatorname{sen}\omega}, \qquad y = \rho \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Che se il polo è un punto qualunque **0′** e **r** è l'asse polare; allora basta assegnare le coordinate cartesiane $a\,b$ di **0′** e uno dei due angoli $\mathbf{xr} = \alpha$, $\mathbf{ry} = \beta$. E si ha

$$x = a + \rho \frac{\operatorname{sen}(\beta - \varphi)}{\operatorname{sen}\omega}, \qquad y = b + \rho \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \varphi)}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Esercizio 1. Portando l'origine nel punto (2, —3),

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 18 \text{ diviene } X^2 + Y^2 - 31.$$

Es. 2. Prendendo per nuovi assi le bisettrici degli angoli dei primitivi, si ha

$$x \operatorname{sen}\omega = X \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\omega - Y \cos\tfrac{1}{2}\omega, \quad y \operatorname{sen}\omega = X \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\omega + Y \cos\tfrac{1}{2}\omega,$$

e $x^2 - y^2$ diviene $-2XY$.

Es. 3. Verificare l'identità [4] mediante la sostituzione [3].

Es. 4. La sostituzione inversa della [3] è

$$X = x \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\Omega} - y \frac{\operatorname{sen}\beta'}{\operatorname{sen}\Omega}, \quad Y = -x \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\Omega} + y \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\Omega}.$$

Es. 5. La sostituzione lineare

$$x = \lambda X + \mu Y, \quad y = \lambda' X + \mu' Y$$

dicesi *ortogonale*, se trasforma $x^2 + y^2$ in $X^2 + Y^2$. Le condizioni all'uopo sono

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = 1, \quad \mu^2 + \mu'^2 = 1, \quad \lambda\mu + \lambda'\mu' = 0;$$

e però uno solo dei coefficienti $\lambda\,\mu\,\lambda'\,\mu'$ è arbitrario.

La sostituzione inversa è

$$X = \lambda x + \lambda' y, \quad Y = \mu x + \mu' y;$$

ed essendo ortogonale, porge

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1, \quad \lambda'^2 + \mu'^2 = 1, \quad \lambda\lambda' + \mu\mu' = 0.$$

Il modulo della sostituzione $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ vale $+1$ ovvero -1. A seconda di questi due casi, si può (chiamando α un angolo conveniente) dare alla sostituzione la forma [3'] o la [3''].

Es. 6. Se $(\rho\ \varphi)$ e $(\rho'\ \varphi')$ sono le coordinate polari di due punti, il quadrato della distanza fra essi è $\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\varphi - \varphi')$.

Es. 7. $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$ si può, introducendo coordinate polari, trasformare in $\rho^2(\rho^2 - a^2\cos 2\varphi)$.

Equazioni di luoghi geometrici.
Punti determinati da equazioni.

§ **34**. Poniamo una equazione fra le due coordinate variabili $x\ y$ di un punto del piano; e supponiamo che, per ogni valore reale di una delle due variabili compreso entro certi limiti, questa equazione determini uno o più valori reali dell'altra, e quindi uno o più punti; p. e. che ad ogni valore di x compreso in un certo intervallo corrispondano uno o più valori di y. Se inoltre l'equazione data è tale che y sia funzione continua di x nell'intervallo da $x = a$ a $x = b$ (compreso nell'intervallo precedente); allora a due valori di x fra a e b, e la cui differenza tenda a zero, corrispondono due gruppi di valori di y; valori che si possono accoppiare in modo che la differenza fra due omologhi tenda a zero, e quindi che la distanza dei due punti corrispondenti tenda pure a zero. Pertanto, variando x da a a b, otteniamo una o più serie *continue* di punti; l'insieme delle quali costituirà una o più linee (rette o curve), che formeranno il *luogo* dei punti aventi la proprietà (o soggetti alla condizione) che le loro coordinate soddisfanno la equazione proposta. (Nei casi più comuni le equazioni che si presentano tra x e y hanno i caratteri suddetti; ma può accadere che un'equazione non presenti quei caratteri, e quindi che l'insieme dei punti che la soddisfanno non presenti continuità).

Viceversa: se una proprietà è comune ai punti di una o più linee in un piano ed esclusiva per essi, queste linee formano il *luogo* dei punti aventi quella proprietà; e se la proprietà può esser tradotta in un'equazione fra le coordinate $x\ y$ di uno qualunque dei punti del luogo, questa si dirà l'*equazione del luogo*, o equazione che *rappresenta* analiticamente il luogo; mentre il luogo dei punti soddisfacenti a una stessa equazione tra x e y si dice rappresentare geometricamente quell'equazione.

Queste cose valgono anche quando le coordinate che si adoperano non siano cartesiane.

Dal punto di vista della Geometria analitica, conviene classificare i luoghi subordinatamente alle proprietà delle loro equazioni. Così: scelte le coordinate cartesiane, si dicono *luoghi algebrici* quelli la cui equazione è algebrica, *trascendenti* gli altri. Se l'equazione è algebrica e riducibile a razionale e intera, essa può essere di 1°, 2°, 3°, . . . grado nelle coordinate; e il luogo si dirà rispettivamente di 1°, 2°, 3°, . . . *grado*.

Potrebbe nella equazione comparire una sola coordinata, e l'altra esser quindi arbitraria. Così: una equazione con la sola x fornisce uno o più valori di x, e quindi rappresenta altrettante rette parallele all'asse delle y.

Poniamo fra le coordinate di un punto del piano due equazioni. Se esiste una o più coppie di valori reali delle coordinate che soddisfanno le due equazioni, queste determineranno uno o più punti, cioè una serie *discreta* di punti. Se esistono coppie di valori non entrambi reali soddisfacenti alle equazioni, diremo che tali coppie determinano *punti immaginarî*; ai quali estenderemo le nozioni di distanza, ecc. mercè le relative formole già trovate pe' punti reali.

Se ciascuna delle due equazioni rappresenta un luogo, questi punti reali e immaginarî saranno i punti comuni ai due luoghi.

Più di due equazioni indipendenti fra le due coordinate non possono coesistere.

La retta come luogo di 1° grado.

§ **35**. Cominciamo dallo studiare i luoghi di 1° grado.

L'equazione di 1° grado più generale fra le coordinate cartesiane $x\,y$ è

$$[1] \qquad ax + by + c = 0,$$

dove $a\,b\,c$ sono quantità costanti qualunque.

Se $b = 0$, l'equazione si riduce a

$$ax + c = 0, \text{ ovvero } x = -\frac{c}{a};$$

e il luogo è una retta parallela all'asse delle y. Essa coincide con l'asse delle y se inoltre $c = 0$; sicchè l'equazione di quest'asse è $x = 0$.

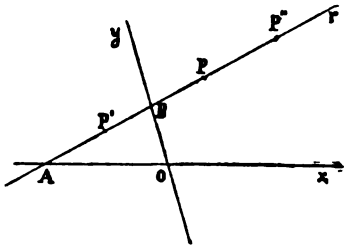
Se $a = 0$, l'equazione si riduce a

$$by + c = 0, \text{ ovvero } y = -\frac{c}{b};$$

e il luogo è una retta parallela all'asse delle x. Essa diviene quest'asse se anche $c = 0$; sicchè l'equazione dell'asse delle x è $y = 0$.

Se a e b non sono nulli, l'equazione [1] può scriversi

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a};$$



e ponendo

$$-\frac{a}{b} = m, \quad -\frac{b}{a} = \frac{1}{m} = n,$$
$$-\frac{c}{a} = p, \quad -\frac{c}{b} = q,$$

prende le forme seguenti:

[2] $$y = mx + q,$$

[3] $$x = ny + p.$$

La [2] mostra che ad ogni valore di x corrisponde un valore di y, e quindi un punto P del luogo. Se $P'(x'y')$ e $P''(x''y'')$ sono due di questi punti, si ha

[2'] $$y' = mx' + q, \quad y'' = mx'' + q;$$

dalle quali due equazioni in m e q si trae

$$m = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \quad q = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''};$$

e sostituendo nella [2], questa diviene

[4] $$x(y' - y'') + y(x'' - x') + (x'y'' - x''y') = 0.$$

Or questa (§ 28) è la condizione perchè i tre

su una retta. Dunque il luogo rappresentato dalla equazione [1] è una retta; cioè la retta dei due punti **P′ P″**.

Se $c = 0$, l'equazione [1] è soddisfatta da $x = 0$, $y = 0$, e però la retta passa per l'origine. Così:

$$y'x - x'y = 0$$

è l'equazione della retta per l'origine e pel punto $(x' \; y')$;

$$x - y = 0, \; x + y = 0$$

sono le equazioni delle rette che bisecano gli angoli degli assi; ecc.

Invece di risolvere le [2′] rispetto a m e q, si può osservare che, sottraendo la prima di esse dalla seconda e dalla [2], si ha

$$y'' - y' = m(x'' - x'), \quad y - y' = m(x - x'),$$

e dividendo
$$\frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{x'' - x'};$$

che equivale alla [4] giusta il § 28.

O altrimenti ancora: se **P P′ P″** appartengono al luogo rappresentato dalla equazione [1], le tre equazioni

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax' + by' + c &= 0 \\ ax'' + by'' + c &= 0 \end{aligned}$$

coesisteranno per valori non tutti nulli di $a \; b \; c$; e quindi dovrà verificarsi la condizione

[5]
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

che equivale ancora alla [4], cioè esprime essere i tre punti **P P′ P″** in linea retta.

O altrimenti: dalle $-c : a = p$, $-c : b = q$ si trae $a = -c : p$, $b = -c : q$; quindi sostituendo nella [1] e dividendo per $-c$, avremo

[6]
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1;$$

or questa è la condizione perchè il punto $(x\,y)$ stia sulla retta dei due punti $A(p\,0)$, $B(0\,q)$.

Resta così provato in vari modi che: *ogni equazione di 1° grado in coordinate cartesiane* (nel piano punteggiato) *rappresenta una retta.*

E viceversa: *ogni retta è rappresentata da un'equazione di 1° grado*; poichè se $(x'\,y')$ e $(x''\,y'')$ sono due punti dati della retta, l'equazione di questa è la [4] o la [5], cioè di 1° grado.

§ 36. Cerchiamo il significato geometrico dei numeri $m\,n\,p\,q$.

Sia **r** la retta rappresentata dalla equazione [1].

Per $y = 0$ la [1] dà $x = -c : a = p$; onde p misura il segmento **OA** che la retta **r** taglia sull'asse delle x. E similmente q misura il segmento **OB** che la retta **r** taglia sull'asse delle y.

Dalla $y'' - y' = m(x'' - x')$ si trae $m = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$; ora dalle [6]-§ 30 si ha $\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{\text{sen}\mathbf{xr}}{\text{sen}\mathbf{ry}}$; dunque

$$m = \frac{\text{sen}\mathbf{xr}}{\text{sen}\mathbf{ry}}, \quad n = \frac{\text{sen}\mathbf{ry}}{\text{sen}\mathbf{xr}}.$$

(Per assi ortogonali risulta

$$m = \text{tg}\mathbf{xr}).$$

E qui notiamo che si ha in conseguenza (v. § 21)

$$[7] \quad \text{tg}\mathbf{xr} = \frac{m\,\text{sen}\omega}{1 + m\cos\omega} = \frac{a\,\text{sen}\omega}{a\cos\omega - b}, \quad \text{tg}\mathbf{ry} = \frac{\text{sen}\omega}{m + \cos\omega} = \frac{b\,\text{sen}\omega}{b\cos\omega - a}.$$

Si scorge che il numero m (o n) dipende solo dalla direzione della retta, e però dicesi *rapporto direttivo*; mentre p e q dipendono anche dalla posizione della retta.

Un'equazione non si altera se si moltiplicano o dividono tutti i suoi termini per uno stesso numero arbitrario, e in particolare se si dividono per uno dei coefficienti (che non sia nullo). Ond'è che, per scrivere l'equazione di una retta, non è necessario conoscere i valori dei tre coefficienti $a\,b\,c$, ma basta conoscere i rapporti di due di essi al rimanente. Così: dati $a : c$ e $b : c$, son noti $p = -c : a$ e $q = -c : b$, e l'equazione è

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1;$$

dati $a:b$ e $c:b$, son noti $m=-a:b$ e $q=-c:b$, e l'equazione è

$$y=mx+q;$$

dati $b:a$ e $c:a$, son noti $n=-b:a$ e $p=-c:a$, e l'equazione è

$$x=ny+p.$$

Ne segue che ogni formola, la quale esprima il valore di una grandezza geometrica relativa alla retta, come

$$-\frac{c}{a},\ -\frac{a}{b},\ldots,\frac{a\,\mathrm{sen}\,\omega}{a\cos\omega-b},\ldots,$$

deve esplicitamente contenere solo i rapporti di due delle $a\ b\ c$ alla rimanente, o almeno deve potersi ridurre a tale. In altre parole: dev'essere omogenea di grado zero nelle $a\ b\ c$.

Ne segue altresì che due equazioni rappresentano la stessa retta, se i coefficienti dell'una sono ordinatamente proporzionali a quelli dell'altra; e viceversa.

Che se nelle equazioni di due rette sono proporzionali solo i coefficienti di x e y, allora le due rette sono parallele; e viceversa.

Se nella equazione della retta supponiamo a e b impiccolire indefinitamente, ma non c; allora p e q crescono indefinitamente, e quindi la retta va all'infinito. In questo senso diciamo che l'equazione

$$0x+0y+c=0 \text{ (o più brevemente } c=0)$$

rappresenta la retta all'infinito del piano.

Si noti che pel punto immaginario $(x_1+ix_2,\ y_1+iy_2)$ passa la retta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{x-x_1}{x_2}=\frac{y-y_1}{y_2}.$$

Essa passa anche per l'altro punto immaginario $(x_1-ix_2,\ y_1-iy_2)$ e pel punto reale $(x_1\ y_1)$, ed è parallela alla retta $y_2x-x_2y=0$.

Intersezione di due rette.

§ 37. Due rette, le cui equazioni siano

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

hanno comune quel punto le cui coordinate soddisfanno ambedue queste equazioni, cioè

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Questi valori sono finiti e determinati, e individuano un punto unico a distanza finita, finchè non è nullo il denominatore $ab' - a'b$.

Se il denominatore $ab' - a'b$ è nullo; allora x e y divengono infinite, il punto va all'infinito, e le due rette sono parallele. La condizione $ab' - a'b = 0$ può scriversi $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$; od anche $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (d'accordo con una osservazione fatta nel § prec.).

Se inoltre è nullo uno dei numeratori di x e y, p. e. $ab' - a'b = 0$ e $bc' - b'c = 0$; allora $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ e $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, onde $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$, ovvero $ac' - a'c = 0$; e però è nullo anche l'altro numeratore. Allora x e y sono indeterminate, e il punto comune alle due rette è indeterminato; e però le due rette coincidono (il che si accorda pure col § prec.).

Fa eccezione il caso in cui l'annullarsi di $ab' - a'b$ e $bc' - b'c$ provenga dall'essere $b = 0$ e $b' = 0$. Allora non è certo in generale $ac' - a'c = 0$; onde x è indeterminata e y infinita, e le due rette sono parallele all'asse delle y.

Indicheremo per brevità i determinanti $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$, ... con $[ab']$, $[ac']$, ...

Fascio e rete di rette.

§ 38. Tre rette di equazioni

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0,$$

in generale non hanno uno stesso punto comune, ossia non appartengono a un fascio: la condizione per ciò è che una delle tre equazioni sia conseguenza delle altre due, e quindi che sia

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Indicheremo brevemente con $[ab'c'']$ questo determinante.

Quando questa condizione si verifica, si possono evidentemente determinare due quantità λ e μ tali, che coesistano le equazioni

$$\lambda a + \mu a' = a'', \quad \lambda b + \mu b' = b'', \quad \lambda c + \mu c' = c'';$$

sicchè l'equazione $a''x + b''y + c'' = 0$ si potrà scrivere

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0.$$

Questa è dunque l'equazione generale di una retta del fascio determinato dalle due $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$.

Quando son date le coordinate x' y' del centro di un fascio; allora, se la retta di equazione

$$ax + by + c = 0$$

passa pel punto $(x'\ y')$, si ha

$$ax' + by' + c = 0;$$

e sottraendo, l'equazione della retta diviene

$$a(x - x') + b(y - y') = 0$$

o anche

$$y - y' = m(x - x'), \quad x - x' = n(y - y').$$

Ai singoli valori di $a : b$ o di m o di n corrispondono le singole rette del fascio che ha per centro il punto $(x' y')$.

§ 39. Già osservammo che, date le equazioni di due rette **r r'**

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

l'equazione di una retta qualunque **s** del fascio da esse determinato si può porre sotto la forma

$$[1] \qquad \lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0.$$

Ciò risulta pure dall'osservare che, qualunque siano i numeri λ e μ, quest'ultima equazione (*combinazione lineare* delle due date equazioni), essendo di 1° grado in $x\,y$, rappresenta una retta; ed essendo soddisfatta dai valori di x e y che annullano $ax + by + c$ e $a'x + b'y + c'$, questa retta passa pel punto comune alle due rette date **r r'**, ossia appartiene al fascio da esse determinato.

Ai singoli valori del parametro $\lambda : \mu$ corrispondono le singole rette del fascio. P. es. a $\lambda = 0$ e $\mu \gtrless 0$, onde $\lambda : \mu = 0$, corrisponde **r'**; a $\lambda \gtrless 0$ e $\mu = 0$, onde $\lambda : \mu = \infty$, corrisponde **r**.

Per quella retta del fascio che passa per un punto dato $(x_1\ y_1)$, sarà

$$\lambda(ax_1 + by_1 + c) + \mu(a'x_1 + b'y_1 + c') = 0;$$

di qui ricavando $\lambda : \mu$ e sostituendo nella [1], si ottiene come equazione della retta domandata

$$\frac{ax + by + c}{ax_1 + by_1 + c} = \frac{a'x + b'y + c'}{a'x_1 + b'y_1 + c'}.$$

La [1] ordinata diviene

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c') = 0.$$

Per quella retta del fascio che passa per l'origine, sarà

$$\lambda c + \mu c' = 0, \quad \lambda : \mu = c' : -c;$$

onde l'equazione della retta sarà

$$(ac' - a'c)x + (bc' - b'c)y = 0.$$

Per quella retta del fascio che è parallela a una retta data

$$a''x + b''y + c'' = 0,$$

sarà
$$\frac{\lambda a + \mu a'}{a''} = \frac{\lambda b + \mu b'}{b''}$$

ovvero
$$\lambda(ab'' - a''b) + \mu(a'b'' - a''b') = 0;$$

e però l'equazione della retta sarà

$$\frac{ax + by + c}{ab'' - a''b} = \frac{a'x + b'y + c'}{a'b'' - a''b'}.$$

Se $p\ p'\ p''$ sono le ascisse dei punti $\mathbf{A}\ \mathbf{A}'\ \mathbf{A}''$ comuni alle $\mathbf{r}\ \mathbf{r}'\ \mathbf{s}$ e all'asse delle x, la [1] dà $\lambda(ap'' + c) + \mu(a'p'' + c') = 0$, onde

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{a'}{a} \cdot \frac{p'' - p'}{p'' - p} = -\frac{a'}{a} \cdot \frac{\mathbf{A}'\mathbf{A}''}{\mathbf{A}\mathbf{A}''}.$$

Similmente, se un'altra retta $\mathbf{s}'$ del fascio corrisponde al rapporto $\lambda' : \mu'$ e seca l'asse delle x in $\mathbf{A}'''$, sarà $\frac{\lambda'}{\mu'} = -\frac{a'}{a} \cdot \frac{\mathbf{A}'\mathbf{A}'''}{\mathbf{A}\mathbf{A}'''}$; e quindi deduciamo

$$\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}''}{\mathbf{A}'\mathbf{A}''} : \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}'''}{\mathbf{A}'\mathbf{A}'''} = (\mathbf{A}\mathbf{A}'\mathbf{A}''\mathbf{A}''') = (\mathbf{r}\mathbf{r}'\mathbf{s}\mathbf{s}').$$

Dunque: il doppio rapporto, che con due rette fisse $\mathbf{r}\ \mathbf{r}'$ del fascio fanno due rette qualunque dello stesso, è dato dal rapporto dei valori di $\mu : \lambda$ corrispondenti a queste due rette. — In particolare: a due valori opposti di $\mu : \lambda$ corrispondono due rette armoniche con $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$.

Il principio qui invocato (dovuto a Lamè) è di grande utilità, e si estende a luoghi qualunque. Se infatti $f = 0$ $f' = 0$ sono le equazioni di due luoghi, $\lambda f + \mu f' = 0$ è l'equazione di un luogo, il quale certo passa per tutti i punti comuni a' due dati. Or se questi sono dello stesso grado, si può dimostrare che $\lambda f + \mu f' = 0$, al variare di $\lambda : \mu$, rappresenta *tutti* gli ∞ luoghi di quel grado, che hanno gli stessi punti comuni che $f = 0$ e $f' = 0$ (*fascio*, *serie semplice*, *gruppo binomio* di curve); la quale circostanza molto agevola lo studio di tali sistemi di curve.

§ 40. Combinando linearmente le equazioni di tre rette $\mathbf{r}\ \mathbf{r}'\ \mathbf{r}''$

mediante tre numeri arbitrari λ μ ν, si forma l'equazione di una retta:

$$[1]\ \lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')+\nu(a''x+b''y+c'')=0$$

ovvero

$$(\lambda a+\mu a'+\nu a'')\,x+(\lambda b+\mu b'+\nu b'')\,y+(\lambda c+\mu c'+\nu c'')=0.$$

Ad ogni coppia di valori dei rapporti $\lambda:\nu$, $\mu:\nu$ corrisponde una retta del piano. Più generalmente: se $f=0$, $f'=0$, $f''=0$ sono le equazioni di tre luoghi, $\lambda f+\mu f+\nu f''=0$ rappresenta un luogo che passa pe' punti comuni a quei tre (se ne hanno). Se quei tre luoghi son dello stesso grado, $\lambda f+\mu f'+\nu f''=0$, al variare di $\lambda:\nu$ e $\mu:\nu$, rappresenta ∞^2 luoghi di quel grado (*rete*, *serie doppia*, *gruppo trinomio* di curve).

È importante notare che, se r r' r'' non appartengono a un fascio, ogni retta del piano si può rappresentare coll'equazione [1], dove a $\lambda:\nu$ e $\mu:\nu$ si diano valori convenienti, perfettamente individuati dalla retta stessa. Infatti, perchè l'equazione [1] coincida coll'equazione di una data retta

$$a_0x+b_0y+c_0=0,$$

bisogna e basta che sia

$$\frac{\lambda a+\mu a'+\nu a''}{a_0}=\frac{\lambda b+\mu b'+\nu b''}{b_0}=\frac{\lambda c+\mu c'+\nu c''}{c_0};$$

si hanno così due equazioni lineari omogenee in $\lambda\,\mu\,\nu$, dalle quali si ricavano univocamente $\lambda:\nu$, $\mu:\nu$.

Indicando il valor comune dei tre fratti con ρ, abbiamo le tre equazioni

$$\lambda a+\mu a'+\nu a''=\rho a_0,\quad \lambda b+\mu b'+\nu b''=\rho b_0,\quad \lambda c+\mu c'+\nu c''=\rho c_0,$$

e da queste ricaviamo

$$\frac{\lambda}{\rho}=\frac{[a_0b'c'']}{[ab'c'']},\quad \frac{\mu}{\rho}=\frac{[ab_0c'']}{[ab'c'']},\quad \frac{\nu}{\rho}=\frac{[ab'c_0]}{[ab'c'']},$$

onde

$$\lambda:\mu:\nu=[a_0b'c'']:[ab_0c'']:[ab'c_0].$$

Fa eccezione (come già avvertimmo) il caso $[ab'c''] = 0$, in cui le tre rette $r\, r'\, r''$ appartengono a un fascio. Allora la [1] non rappresenta che le rette del fascio.

Notazione abbreviata.

§ **41**. Denotando con $L\ M\ N\ldots$ funzioni lineari di x e y, si può concisamente indicare con $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ le equazioni delle varie rette del piano, anzi le rette stesse. Questa *notazione abbreviata*, della quale il Plücker ha mostrato l'utilità (1828), permette sovente di rendere più spediti i calcoli e più espressive le formole. A tale scopo conferisce non poco il ricordare che, se $L = 0$ e $M = 0$ sono due rette, $\lambda L + \mu M = 0$ è una retta del fascio da esse determinato, $\lambda : \mu$ essendo un parametro (del quale ci è noto il significato geometrico); e che, se $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ non sono tre rette non di un fascio, l'equazione di ogni altra retta del piano può ricever la forma

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0.$$

Accenniamo alcune applicazioni della notazione abbreviata.

1° È chiaro che $\lambda L + \mu M = 0$ è la retta che unisce il punto $(L = 0,\ M = 0)$ al punto $(\lambda L + \mu M + \nu N = 0,\ N = 0)$; e così pure $\mu M + \nu N = 0$ unisce i punti $(M = 0,\ N = 0)$, $(\lambda L + \mu M + \nu N = 0,\ L = 0)$; e $\lambda L + \nu N = 0$ unisce i punti $(L = 0,\ N = 0)$, $(\lambda L + \mu M + \nu N = 0,\ M = 0)$.

E di qui apparisce il significato geometrico di $\lambda : \mu$, $\mu : \nu$ e $\nu : \lambda$ nella $\lambda L + \mu M + \nu N = 0$.

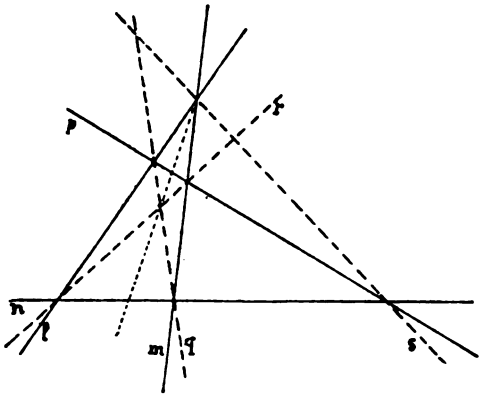
2° Inoltre $\lambda L - \mu M = 0$, $\mu M - \nu N = 0$, $\nu N - \lambda L = 0$ sono le rette coniugate armoniche alle tre precedenti rispetto alle coppie $(L = 0,\ M = 0)$, $(M = 0,\ N = 0)$, $(N = 0,\ L = 0)$; e siccome una delle ultime tre equazioni è conseguenza delle altre due (infatti sommandole si ha $0 = 0$); così queste tre rette concorrono in un punto, individuato dalle equazioni $\lambda L = \mu M = \nu N$. Onde il teorema:

Se dei tre punti in cui una retta seca i lati di un triangolo si

prendono i coniugati armonici rispetto alle coppie di vertici esistenti su' medesimi lati, le tre rette che uniscono questi punti ai vertici opposti passano per un punto.

Il teorema inverso si dimostra facilmente, come il lettore può verificare.

3° Consideriamo la figura che dicesi *quadrilatero completo* (Carnot, *De la corrélation etc.*). Essa è formata da quattro rette o *lati*, i quali si secano mutuamente in sei punti o *vertici*. Questi si dividono in tre coppie di vertici *opposti*, cioè uno su due lati e uno sugli altri due; e si dicono *diagonali* le tre rette di queste coppie di vertici. Dimostreremo che: *se si considerano due lati e una diagonale uscenti da uno stesso vertice, la diagonale ha per coniugata armonica rispetto a' due lati la retta che unisce il vertice al punto comune alle altre due diagonali.*



Siano infatti $L=0$, $M=0$, $N=0$ e $P=\lambda L+\mu M+\nu N=0$ i lati del quadrilatero, e pongasi

$$Q=\mu M+\nu N=P-\lambda L$$
$$R=\nu N+\lambda L=P-\mu M$$
$$S=\lambda L+\mu M=P-\nu N:$$

saranno $Q=0$, $R=0$, $S=0$ le diagonali; e la coniugata armonica di $S=\lambda L+\mu M=0$ rispetto a $L=0$ e $M=0$ sarà $\lambda L-\mu M=0$ ossia $Q-R=0$, e quindi passerà pel punto comune alle altre due diagonali; dunque ecc.

Segue da questo teorema che: *ciascuna diagonale è secata dalle altre due in punti armonici rispetto ai due vertici che unisce* (Pappo).

Risulta dallo stesso teorema un modo per risolvere con la sola riga il problema: date tre rette in un fascio, costruire la coniugata armonica di una rispetto alle altre due. Poichè, se **l m s** sono le tre rette, tirando da un punto di **s** due traversali **n p**, e unendo i punti

ove incontrano **l** e **m** mediante le **q r**, il punto **qr** sta sulla coniugata di **s** rispetto a **l** e **m**.

E ne risulta anche un modo per costruire con la sola riga, dati tre punti di una retta, il punto coniugato armonico di uno di essi rispetto agli altri due. Poichè, se **A B C** sono i tre punti, tirando per **C** un'altra retta e prendendovi due punti **D E**, le rette **AD BE** individuano un punto e le **AE BD** un altro punto, e la retta per questi due punti seca la **ABC** nel coniugato armonico di **C** rispetto a **A** e **B**.

Quadrangolo completo è la figura determinata da quattro punti o *vertici*, uniti per due da sei rette o *lati*, a due a due *opposti* (cioè non passanti per uno stesso vertice). I tre punti comuni a due lati opposti si dicono punti *diagonali*.

I quattro lati e due diagonali di uno stesso quadrilatero completo sono i sei lati di un quadrangolo completo; sicchè le proprietà di queste due figure sono in sostanza le stesse.

4° *Se i lati di un triangolo incontrano rispettivamente i lati di un altro triangolo in tre punti di una retta, le tre rette che uniscono i vertici dell'un triangolo rispettivamente ai vertici dell'altro passano per un punto. E viceversa* (Desargues).

Siano infatti $L=0$, $M=0$, $N=0$ i lati del 1° triangolo, e $\lambda L+\mu M+\nu N=0$ la retta su cui essi incontrano i lati del 2° triangolo: saranno

$$\lambda' L+\mu M+\nu N=0,\quad \lambda L+\mu' M+\nu N=0,\quad \lambda L+\mu M+\nu' N=0$$

questi lati; e le tre congiungenti dei vertici corrispondenti de' due triangoli saranno

$$\begin{aligned}(\mu-\mu')\,M-(\nu-\nu')\,N&=0,\\(\nu-\nu')\,N-(\lambda-\lambda')\,L&=0,\\(\lambda-\lambda')\,L-(\mu-\mu')\,M&=0;\end{aligned}$$

le quali concorrono nel punto per cui

$$(\lambda-\lambda')\,L=(\mu-\mu')\,M=(\nu-\nu')\,N.$$

Il teorema inverso si dimostra osservando che, se $L=0$, $M=0$, $N=0$ sono i lati del 1° triangolo, e se le rette che uniscono i suoi vertici a quelli del 2° concorrono e quindi hanno equazioni della forma

$$mM-nN=0,\quad nN-lL=0,\quad lL-mM=0\,;$$

allora i lati del 2° triangolo sono

$$-lL+mM+nN=0,\ lL-mM+nN=0,\ lL+mM-nN=0\ ;$$

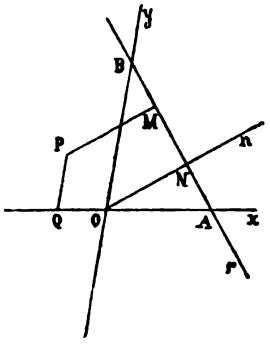
e però secano rispettivamente i lati $L=0$, $M=0$, $N=0$ del 1° sulla retta

$$lL+mM+nN=0.$$

Due triangoli, i cui vertici siano a due a due sopra tre rette per un punto, e i cui lati corrispondenti si sechino in tre punti di una retta, si dicono *omologici*. Quel punto e quella retta si dicono *centro* e *asse di omologia* (Poncelet).

Equazione normale di una retta.

§ **42**. Data una retta **r**, sia **n** la retta normale a **r** e condotta per l'origine **O**. Scelta per direzione positiva sulla **n** quella dell'origine verso la retta **r**, siano α β gli angoli **xn ny** di questa direzione con le direzioni positive degli assi, e ρ la distanza **ON** fra l'origine **O** e la retta **r**. Siano finalmente p e q le lunghezze dei segmenti **OA OB** che la retta **r** taglia sugli assi. Projettando questi segmenti su **n**, avremo



$$\rho=p\cos\alpha,\quad \rho=q\cos\beta,$$

ovvero
$$\frac{1}{p}=\frac{\cos\alpha}{\rho},\quad \frac{1}{q}=\frac{\cos\beta}{\rho};$$

e sostituendo nella equazione della retta **r**, che è

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$$

essa diviene

[1] $$x\cos\alpha+y\cos\beta-\rho=0.$$

Questa dicesi forma *normale* dell'equazione della retta (Hesse).

Essa dipende da due parametri: uno è ρ, e l'altro è α o β (essendo $\alpha + \beta = \omega$).

Per ridurre l'equazione generale

$$ax + by + c = 0$$

a forma normale, si osservi che, dovendo questa equazione e la [1] rappresentare una stessa retta, i loro coefficienti saranno proporzionali, ossia sarà

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{-\rho}{c};$$

e queste due equazioni, con la $\alpha + \beta = \omega$, serviranno a determinare le tre incognite ρ α β.

Dalle dette due equazioni ricaviamo

$$\cos\alpha = -\frac{a}{c}\rho, \quad \cos\beta = -\frac{b}{c}\rho;$$

e sostituendo nella $\alpha + \beta = \omega$, o meglio nella

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \operatorname{sen}^2\omega,$$

troviamo $\quad (a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)\,\rho^2 = c^2\operatorname{sen}^2\omega,$

onde

$$[2] \qquad \rho = \frac{c\operatorname{sen}\omega}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}};$$

dove $\pm$ è il segno di c, poichè ρ e $\operatorname{sen}\omega$ sono positivi.

Avuto ρ, risulta

$$[3] \quad \cos\alpha = \frac{a\operatorname{sen}\omega}{\mp\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}, \quad \cos\beta = \frac{b\operatorname{sen}\omega}{\mp\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}.$$

Le formole [2] e [3] risolvono la questione. Sostituendo nella [1], possiamo dire più concisamente: che il primo membro dell'equazione di una retta $ax + by + c = 0$ sotto forma normale è

$$[4] \qquad \frac{(ax + by + c)\operatorname{sen}\omega}{\mp\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}.$$

Per assi ortogonali le formole si semplificano, e si ha

$$\rho = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\mp\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\mp\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

È bene osservare che

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega = -\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 1 & \cos\omega \\ b & \cos\omega & 1 \end{vmatrix}.$$

Distanze, angoli, triangoli.

§ 43. Siano date le coordinate $x\,y$ di un punto **P**, e sia data la equazione normale di una retta **r** (vale a dire, siano date le tre quantità ρ α e β del § prec.). Cerchiamo la formola che esprime la distanza **Pr** fra il punto e la retta.

Prendiamo **OQ** $= x$, **QP** $= y$; e tirato il segmento **PM** normale a **r**, sicchè **PM** $=$ **Pr**, eguagliamo le projezioni normali delle due spezzate **OQP**, **ONMP** sulla retta **n**; avremo

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = \rho + 0 + \mathbf{MP} = \rho - \mathbf{Pr},$$

onde

$$-\mathbf{Pr} = x\cos\alpha + y\cos\beta - \rho \text{ (*)}.$$

Se l'equazione della retta è data nella forma generale, basta ridurla a forma normale; e quindi si ottiene

$$\mathbf{Pr} = \frac{(ax + by + c)\operatorname{sen}\omega}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}},$$

ove $\pm$ è il segno di c.

Queste espressioni di **Pr** hanno valori positivi o negativi, secondochè il punto **P** e l'origine si trovano dalla stessa banda della **r** o da bande opposte; perocchè sulla retta **n** si era fissato come verso positivo quello che va dall'origine verso **r**. Si vede che la distanza di un punto **P** da una retta **r** è il primo membro, cambiato di segno, dell'equazione normale di **r**, nel quale si sostituiscano le coordinate di **P**.

(*) La condizione perchè il punto **P** stia sulla retta **r** è **Pr** $= 0$, cioè $x\cos\alpha + y\cos\beta - \rho = 0$. Si ottiene così un'altra dimostrazione dell'equazione normale della retta. Questa dimostrazione (a differenza della prima) vale anche nel caso che la retta passi per l'origine.

Per assi ortogonali sarà

$$\mathbf{Pr} = \frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

§ **44**. L'angolo di due rette **r r'** si determina facilmente, quando sono date le equazioni delle due rette sotto forma normale

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - \rho = 0, \quad x\cos\alpha' + y\cos\beta' - \rho' = 0.$$

Scegliendo infatti le direzioni positive sulle **r r'** in modo che, tirando le normali **n n'** per l'origine, riesca $\mathbf{rn} = \mathbf{r'n'} = \frac{\pi}{2}$; abbiamo $\mathbf{rr'} = \mathbf{nn'}$, e quindi $\mathbf{rr'} = \alpha' - \alpha = \beta - \beta'$, ed anche (§ 30)

$$\cos\mathbf{rr'} = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}[\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' - (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\alpha'\cos\beta)\cos\omega]$$

$$\operatorname{sen}\mathbf{rr'} = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta).$$

Se le equazioni delle due rette son date nella forma generale, basta sostituire in queste formole le espressioni di $\cos\alpha$, $\cos\beta$ trovate al § 42, e le analoghe di $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$; si otterrà così per l'angolo delle due rette

$$\mathbf{r}(ax + by + c = 0), \quad \mathbf{r'}(a'x + b'y + c' = 0):$$

$$\cos\mathbf{rr'} = \frac{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega}{\pm\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)(a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\omega)}}$$

$$\operatorname{sen}\mathbf{rr'} = \frac{(ab' - a'b)\operatorname{sen}\omega}{\pm\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)(a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\omega)}};$$

e quindi anche

$$\operatorname{tg}\mathbf{rr'} = \frac{(ab' - a'b)\operatorname{sen}\omega}{aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega}.$$

La condizione perchè le due rette **r r'** siano parallele è $\operatorname{sen}\mathbf{rr'} = 0$, ossia

$$ab' - a'b = 0;$$

che non differisce dalla già trovata (§ 37).

E la condizione perchè le due rette **r r'** siano ortogonali è $\cos\mathbf{rr'} = 0$, ossia

$$aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega = 0.$$

Quindi l'equazione della retta che passa pel punto dato $(x'y')$ ed è perpendicolare alla retta $\mathbf{r}(ax + by + c = 0)$, è

$$\frac{x - x'}{a - b\cos\omega} = \frac{y - y'}{b - a\cos\omega}.$$

Per assi ortogonali si ha

$$\cos\mathbf{rr}' = \frac{aa' + bb'}{\pm\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}}, \quad \operatorname{sen}\mathbf{rr}' = \frac{ab' - a'b}{\pm\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}}$$

$$\operatorname{tg}\mathbf{rr}' = \frac{ab' - a'b}{aa' - bb'} = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

(dove si è posto $m = -a : b$, $m' = -a' : b'$). La condizione di ortogonalità diventa

$$aa' + bb' = 0, \quad \text{ovvero } mm' = -1.$$

E l'equazione della perpendicolare a $\mathbf{r}$ da $(x'y')$ è

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b}, \text{ ovvero } y - y' = -\frac{1}{m}(x - x').$$

In tutte queste relazioni non appariscono i termini noti c e c' delle equazioni delle due rette, ma solo i coefficienti di x e y, cioè $a\ b\ a'\ b'$ o meglio i rapporti $a : b$, $a' : b'$. Ciò accade, perchè l'angolo di due rette non muta quando alle rette si sostituiscano due loro parallele, vale a dire quando si alterino ad arbitrio c e c', conservando costanti i rapporti $a : b$, $a' : b'$.

È bene osservare che

$$aa' + bb' - (ab' + a'b)\cos\omega = -\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a' & 1 & \cos\omega \\ b' & \cos\omega & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 45. L'area del trilatero o triangolo, formato da tre rette $\mathbf{r}\ \mathbf{r}'\ \mathbf{r}''$ di date equazioni, si può calcolare come segue. Siano

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

le equazioni date; e nel determinante $[ab'c'']$ chiamiamo $A \ldots$ i

suddeterminanti complementari di a ... Allora, calcolando le coordinate dei punti $\mathrm{r'r''}$ $\mathrm{r''r}$ $\mathrm{rr'}$, vertici del triangolo, giusta il § 37 abbiamo

$$\mathrm{r'r''}\left(\frac{A}{C}, \frac{B}{C}\right), \quad \mathrm{r''r}\left(\frac{A'}{C'}, \frac{B'}{C'}\right), \quad \mathrm{rr'}\left(\frac{A''}{C''}, \frac{B''}{C''}\right);$$

e sostituendo queste coordinate nella formola che esprime l'area del triangolo di dati vertici (§ 31), otteniamo

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\omega \begin{vmatrix} \frac{A}{C} & \frac{B}{C} & 1 \\ \frac{A'}{C'} & \frac{B'}{C'} & 1 \\ \frac{A''}{C''} & \frac{B''}{C''} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{2CC'C''} \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Ora l'ultimo determinante equivale, com'è noto, al quadrato di $[ab'c'']$; dunque la formola richiesta è

$$\frac{[ab'c'']^2}{[a'b''].[a''b].[ab']} \operatorname{sen}\omega.$$

Esercizio 1. Luogo dei punti equidistanti da due punti fissi. È una retta.

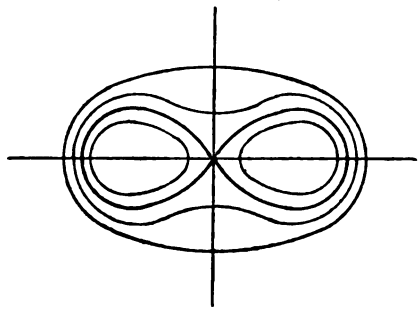
Es. 2. Equazione del circolo, come luogo dei punti le cui distanze da un punto fisso sono eguali a un segmento dato. Il circolo è un luogo di 2° grado. In coordinate polari l'equazione è $\rho =$ costante, se il polo cade nel centro.

Es. 3. Luogo dei punti, i quadrati delle cui distanze da due punti fissi, moltiplicati per numeri assegnati, dànno una somma costante. È un circolo, che si riduce a una retta se la somma di quei numeri è nulla.

Es. 4. Luogo dei punti, le cui distanze da due punti fissi dànno una somma costante. È una curva chiusa ovale di 2° grado (*ellisse*). Se la retta dei due punti dati si prende come asse delle x e la sua perpendicolare nel mezzo del segmento fra i punti dati come asse delle y, e se si chiama $2c$ la lunghezza di questo segmento e $2a$ la somma data, l'equazione del luogo è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Es. 5. Luogo dei punti, per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi. Ritenute le convenzioni dell'Es. 4, ma chiamando ora $2a$ la differenza data, l'equazione del luogo è la stessa che nell'Es. 4. Mentre ivi era $a > c$, ora sarà $c > a$, per una nota proprietà del triangolo; onde si preferisce scrivere l'equazione così: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$. Quest'equazione rappresenta ora una curva di 2° grado composta di due rami aperti (*iperbole*).

Es. 6. Luogo dei punti, per cui è costante il prodotto delle distanze da due punti fissi. Ritenute ancora le convenzioni dell'Es. 4 e detto m^2 il prodotto dato, il luogo è una curva di 4° grado, avente per equazione $(x^2 + y^2 - c^2)^2 - 4c^2x^2 = m^4$.



Se $m < c$, esso si compone di due parti chiuse distinte *(ovali di Cassini)*. Se $m = c$, quelle due parti vengono a congiungersi in un punto, che forma un nodo per il luogo *(lemniscata* di *Giacomo Bernoulli)*. Se $m > c$, quelle due parti si confondono in una sola, cioè il luogo si compone di un'ovale unica. (Nella figura sono segnati i casi diversi corrispondentemente agli stessi due punti fissi e quindi allo stesso c, ma a valori diversi di m).

Es. 7. Luogo dei punti, per cui è costante il rapporto delle distanze da due punti fissi. È un circolo.

Es. 8. Luogo dei punti le cui distanze da un punto fisso e da una retta fissa serbano un rapporto costante. È un'ellisse o un'iperbole, secondochè quel rapporto è minore o maggiore di 1.

Es. 9. Luogo dei punti equidistanti da un punto fisso e da una retta fissa. È una curva di 2° grado composta di un ramo aperto *(parabola)*.

Es. 10. Luogo dei punti, le cui distanze da due rette fisse sono uguali o in un dato rapporto. È una retta; e quando si prescinda dal segno, è una coppia di rette in armonia con le due rette date.

È anche una retta il luogo de' punti, le cui distanze da rette fisse, moltiplicate per numeri assegnati, dànno una somma costante.

Es. 11. Costruire per punti la curva di equazione polare $\rho = a\varphi$ *(spirale* di *Archimede)*.

Es. 12. Lo stesso per $\rho = a\,e^{m\varphi}$, dove e è la base dei logaritmi di *Nepero* (*spirale logaritmica*).

Es. 13. Lo stesso per $\rho\varphi = a$ (*spirale iperbolica*).

Es. 14. Calcolare la distanza fra due rette parallele di date equazioni.

Es. 15. L'angolo di due rette si può trovare mediante la formola

$$\mathrm{tg}\,\mathbf{rr}' = \frac{\mathrm{tg}\,\mathbf{xr}' - \mathrm{tg}\,\mathbf{xr}}{1 + \mathrm{tg}\,\mathbf{xr}'\,\mathrm{tg}\,\mathbf{xr}},$$

sostituendovi le espressioni (§ 36) di $\mathrm{tg}\,\mathbf{xr}$, $\mathrm{tg}\,\mathbf{xr}'$.

Es. 16. L'equazione della retta pei due punti $\mathbf{rr}'$ $\mathbf{r}_0\mathbf{r}_1$ è

$$[a'b_0c_1](ax + by + c) - [ab_0c_1](a'x + b'y + c') = 0$$

ovvero $$[a_1bc'](a_0x + b_0y + c_0) - [a_0bc'](a_1x + b_1y + c_1) = 0.$$

Es. 17. L'area di un triangolo, date le coordinate dei vertici, si può ottenere anche calcolando un lato e la sua distanza dal vertice opposto.

Es. 18. Formare le equazioni delle mediane di un triangolo di dati vertici, e dedurne che queste concorrono in un punto.

Es. 19. Lo stesso per le perpendicolari ai lati nei punti medî.

Es. 20. Formare le equazioni delle bisettrici degli angoli interni ed esterni di un triangolo, date le coordinate dei vertici o le equazioni dei lati. Dedurne che tre bisettrici, scelte a dovere, concorrono in un punto.

Es. 21. Formare le equazioni delle altezze di un triangolo, date le coordinate dei vertici o le equazioni dei lati. Dedurne che le tre altezze concorrono in un punto.

Es. 22. La retta dei due punti $\mathbf{P}'(x' \; y')$, $\mathbf{P}''(x'' \; y'')$ è secata dalla retta $ax + by + c = 0$ o in un punto $\mathbf{Q}$, tale che

$$\frac{\mathbf{P}'\mathbf{Q}}{\mathbf{P}''\mathbf{Q}} = \frac{ax' + by' + c}{ax'' + by'' + c}.$$

Es. 23. Dedurne il teorema di *Menelao* e l'inverso, come pure il teorema di *Ceva* e l'inverso, date le coordinate dei vertici del triangolo.

Es. 24. Determinare le coordinate del piede della perpendicolare dall'origine o da un punto dato a una retta data.

Es. 25. L'equazione polare della retta è $\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = \rho_0$, ove $(\rho_0 \; \varphi_0)$ è il piede della normale dal polo alla retta.

Es. 26. Equazione polare della retta per due punti $(\rho' \; \varphi')$, $(\rho'' \; \varphi'')$.

Es. 27. Per ogni punto $\mathbf{P}$ della retta $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$ del fascio determinato dalle due $\mathbf{r}(ax + by + c = 0)$, $\mathbf{r}'(a'x + b'y + c = 0)$, si ha

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\mathbf{P}\mathbf{r}'}{\mathbf{P}\mathbf{r}}\sqrt{\frac{a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\omega}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}}.$$

Es. 28. Tra le rette di questo fascio, quella perpendicolare alla retta $a_0x + b_0y + c_0 = 0$ ha per equazione

$$\frac{ax + by + c}{a_0a + b_0b - (a_0b + ab_0)\cos\omega} = \frac{a'x + b'y + c'}{a_0a' + b_0b' - (a_0b' + a'b_0)\cos\omega}.$$

Es. 29. Tra le rette del fascio determinare quelle che fanno un angolo dato con una retta data.

Es. 30. Il doppio rapporto di quattro rette del fascio, corrispondenti ai quattro valori $\lambda_0 : \mu_0$, $\lambda_1 : \mu_1$, $\lambda_2 : \mu_2$, $\lambda_3 : \mu_3$ di $\lambda : \mu$, è

$$\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}, \; \frac{\lambda_1}{\mu_1}, \; \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \; \frac{\lambda_3}{\mu_3}\right) = \frac{[\lambda_0\mu_2][\lambda_1\mu_3]}{[\lambda_0\mu_3][\lambda_1\mu_2]}.$$

Es. 31. Indicando con $P = 0$, $Q = 0, \ldots$ le equazioni delle varie rette del piano, le coppie di rette corrispondenti di due fasci projettivi si possono rappresentare colle equazioni

$$\lambda P + \mu Q = 0, \; \lambda P' + \mu Q' = 0;$$

dove la coppia varia col variare di $\lambda : \mu$, e dove $(P = 0,\ P' = 0)$ e $(Q = 0,\ Q' = 0)$ sono due coppie di rette corrispondenti qualunque.

Es. 32. Il luogo dei punti d'intersezione delle rette corrispondenti di due fasci omografici è una curva di 2° grado. Rappresentando i due fasci come nell'Es. prec., l'equazione del luogo si ottiene eliminando $\lambda : \mu$ tra le due equazioni $\lambda P + \mu Q = 0$, $\lambda P' + \mu Q' = 0$; essa è dunque $PQ' - P'Q = 0$, equazione di 2° grado nelle $x\ y$. Quest'equazione mostra come il luogo cercato passi pei centri dei due fasci.

Essa può anche scriversi

$$(\lambda_1 P + \mu_1 Q)(\lambda_2 P' + \mu_2 Q') - (\lambda_1 P' + \mu_1 Q')(\lambda_2 P + \mu_2 Q) = 0,$$

qualunque siano le quantità date $\lambda_1 : \mu_1$, $\lambda_2 : \mu_2$, purchè differenti. Dedurne che quel luogo di 2° grado si può generare in infiniti modi come luogo dei punti d'intersezione delle rette corrispondenti di due fasci omografici; cioè che le rette, che congiungono due punti fissi di un tal luogo ai singoli suoi punti, formano due fasci omografici.

Es. 33. Se si prendono per nuovi assi cartesiani due rette di equazioni

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

dette $X\ Y$ le nuove coordinate del punto $(x\ y)$, si ha

$$ax + by + c = kY, \quad a'x + b'y + c' = k'X,$$

dove k e k' non dipendono dal punto considerato.

Piani punteggiati omografici.

§ 46. Siano $x\ y$ coordinate cartesiane di un punto **P** in un piano π, e $x'\ y'$ coordinate cartesiane di un punto **P'** in un altro piano π'. Poniamo fra $x\ y$ e $x'\ y'$ le seguenti equazioni:

$$[1] \qquad x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''},$$

ove $a\ b \ldots$ sono dati numeri reali.

A ogni coppia di valori di x e y corrisponde mercè le [1] una coppia di valori di $x'\ y'$, ossia ad ogni punto **P** un punto **P'**.

Indicando con $A \ldots$ i suddeterminanti complementari di $a \ldots$ nel determinante $\Delta = [ab'c'']$, e supponendo questo diverso da zero; dalle [1] si trae

$$Ax' + A'y' + A'' =$$

$$= \frac{(aA + a'A' + a''A'')\,x + (bA + b'A' + b''A'')\,y + (cA + c'A' + c''A'')}{a''x + b''y + c''} =$$

$$= \frac{\Delta x}{a''x + b''y + c''},$$

$$Bx' + B'y' + B'' = \frac{\Delta y}{a''x + b''y + c''}, \quad Cx' + C'y' + C'' = \frac{\Delta}{a''x + b''y + c''},$$

e dividendo

$$[2] \qquad x = \frac{Ax' + A'y' + A''}{Cx' + C'y' + C''}, \quad y = \frac{Bx' + B'y' + B''}{Cx' + C'y' + C''};$$

le quali equazioni, inverse delle [1], provano che ad ogni punto **P'** corrisponde un punto **P**.

La corrispondenza fra' punti dei due piani è dunque univoca.

A punti di una retta corrispondono punti di una retta; giacchè, se x y verificano un'equazione di 1° grado

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

x' e y' verificano, in virtù delle [2], l'equazione di 1° grado

$$(\alpha A + \beta B + \gamma C)\, x' + (\alpha A' + \beta B' + \gamma C')\, y' + (\alpha A'' + \beta B'' + \gamma C'') = 0,$$

che può scriversi

$$[\alpha\, b'\, c'']\, x' + [a\, \beta\, c'']\, y' + [a\, b'\, \gamma] = 0.$$

Quindi al punto comune a due rette in π corrisponde il punto comune alle due rette corrispondenti a quelle in π'. E alle rette di un fascio in π corrispondono univocamente le rette di un fascio in π'.

In particolare: alle rette $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$ corrispondono gli assi $x' = 0$, $y' = 0$ e la retta all'infinito in π'. Ecc.

Il doppio rapporto di quattro rette di un fascio in π è eguale al doppio rapporto delle quattro rette corrispondenti in π'. Infatti: se

$$\alpha x + \ldots = 0, \quad \alpha' x + \ldots = 0,$$
$$\lambda(\alpha x + \ldots) + \mu(\alpha' x + \ldots) = 0, \quad \lambda'(\alpha x + \ldots) + \mu'(\alpha' x + \ldots) = 0$$

sono le equazioni di quattro rette di un fascio in π, le equazioni delle quattro corrispondenti sono

$$[\alpha b' c'']x' + \ldots = 0, \quad [\alpha' b' c'']x' + \ldots = 0,$$
$$\lambda[(\alpha b' c'')x' + \ldots] + \mu[(\alpha' b' c'')x' + \ldots] = 0,$$
$$\lambda'[(\alpha b' c'')x' + \ldots] + \mu'[(\alpha' b' c'')x' + \ldots = 0;$$

ora il doppio rapporto delle prime quattro è (§ 39) $\frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}$, e quello delle corrispondenti è lo stesso.

Ne segue che: il doppio rapporto di quattro punti di una punteggiata in π è eguale al doppio rapporto dei quattro punti corrispondenti in π'.

Ai punti di una linea curva in π corrispondono punti di un'altra curva in π', e viceversa. Se l'una è di grado n, l'altra è pure di grado n.

Poichè nelle [1] entrano nove coefficienti arbitrarî, o meglio i rapporti di otto fra essi al rimanente; è chiaro che la corrispondenza è determinata, se a quattro punti dati nell'un piano si vuole che corrispondano quattro punti dati nell'altro piano. Bisogna però che tre qualunque dei quattro punti dati in ciascun piano non siano in una retta, cioè che quei quattro punti siano i vertici di un quadrangolo propriamente detto.

§ **47.** Suppongasi che ai punti di un piano π corrispondano univocamente i punti di un piano π'; che a quattro punti dati **A B C D**, vertici di un quadrangolo in π, corrispondano quattro punti dati **A' B' C' D'**, vertici di un quadrangolo in π'; che a punti in linea retta in π corrispondano punti in linea retta in π', e che due quaterne di punti corrispondenti abbiano eguali i doppî rapporti; vale a dire che ad ogni punteggiata di π corrisponda una punteggiata omografica in π'. Allora ai lati **AB** e **CD**, **AC** e **DB**, **AD** e **BC** del quadrangolo **ABCD** corrispondono i lati **A'B'** e **C'D'**, **A'C'** e **D'B'**, **A'D'** e **B'C'** del quadrangolo **A'B'C'D'**; ai punti diagonali **AB.CD**, **AC.DB**, **AD.BC**, che diremo **E F G**, corrispondono i punti diagonali omologhi **E' F' G'**; ad ogni punto dato su un lato di **ABCD** corrisponde un punto individuato sul corrispondente lato di **A'B'C'D'**; ad ogni retta in π corrisponde in π' una retta, che potremo costruire mediante i punti in cui incontra due lati di **A'B'C'D'**; per ogni punto di π, considerandolo come centro di un fascio, possiamo costruire il punto corrispondente; ad ogni fascio di rette in π corrisponderà un fascio di rette omografico in π'; ecc.

Chiamiamo *omografici* o *collineari* due piani punteggiati, i cui elementi si corrispondano nel modo anzidetto. Vedremo poi che sono *projettivi*.

È chiaro che l'omografia tra due piani può sempre tradursi in equazioni del tipo delle [1]; basta infatti determinare i coefficienti

di queste in guisa che a A B C D corrispondano A′ B′ C′ D′, perchè siano soddisfatte tutte le altre condizioni.

Scelte come assi coordinati rette corrispondenti, le equazioni si riducono alla forma

$$x' = \frac{mx}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{ny}{ax + by + c}.$$

Le rette all'infinito dei due piani si corrispondono se nelle [1] $a'' = 0$ e $b'' = 0$. Allora su due rette corrispondenti qualunque si hanno punteggiate omografiche coi punti all'infinito corrispondenti, cioè punteggiate *simili*. E la corrispondenza fra' due piani dicesi *affinità*. Le equazioni dell'affinità si riducono a una sostituzione lineare

$$x' = ax + by + c, \quad y' = a'x + b'y + c';$$

e l'affinità è determinata, quando a tre dati punti dell'un piano si assegnano come corrispondenti tre dati punti dell'altro, con la condizione che i punti di ciascuna terna non siano in una retta.

Scegliendo come assi coordinati rette corrispondenti, la sostituzione diviene

$$x' = mx, \quad y' = ny.$$

Se $P_0\, P_1\, P_2$ sono tre punti dell'un piano e $P'_0\, P'_1\, P'_2$ i corrispondenti, abbiamo (dicendo $\omega\ \omega'$ gli angoli dei due sistemi di assi)

$$P_0'P_1'P_2' = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\omega' \begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\omega' \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} mn$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\omega'}{\operatorname{sen}\omega}\, mn\, .\, P_0P_1P_2;$$

sicchè nell'affinità è costante il rapporto fra le aree di due triangoli corrispondenti.

Se inoltre $m = n$, si ha $x' : x = y' : y = m$, e le due figure (ove sia anche $\omega = \omega'$) sono *simili*, col rapporto di similitudine m per le distanze e m^2 per le aree.

Se $m = n = 1$, le figure sono *eguali*.

Se nell'omografia determinata dalle [1] fosse nullo il determinante $\Delta = [ab'c'']$, allora le tre rette

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0, \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

del piano π avrebbero comune un punto *singolare*, corrispondente a tutti i punti di π'; poichè le equazioni [1], facendone sparire i denominatori, rappresentano per ogni punto dato $(x'\ y')$ due rette di π che si taglierebbero precisamente in quel punto singolare. Però, siccome in tal caso si possono determinare due numeri $\lambda\ \mu$ tali che $\lambda(ax + \ldots) + \mu(a'x + \ldots)$ s'identifichi con $a''x + \ldots$; così quelle due rette, la cui intersezione determina il punto corrispondente a $(x'\ y')$, coincideranno se

$$\lambda x' + \mu y' = 1,$$

vale a dire se il punto $(x'\ y')$ si prende sulla retta del piano π' rappresentata da questa equazione. Ad ogni punto di questa retta *singolare* corrisponde dunque non solo il punto singolare di π, ma tutti i punti di una retta passante per questo; retta che varia col variare del punto $(x'\ y')$ sulla retta singolare, e che descrive in tal modo un fascio omografico a questa punteggiata. Si vede poi facilmente che ad una retta qualunque di π corrisponde sempre la retta singolare in π'; ma se quella passa pel punto singolare, allora le corrispondono nel piano π' infinite rette formanti fascio colla retta singolare.

§ 48. I due piani omografici π e π' possono essere distinti od anche sovrapposti. In quest'ultimo caso si possono cercare i punti che nell'omografia corrispondono a sè stessi, cioè i punti *uniti* (*doppî*, *tautologi*). Riferiti i due piani sovrapposti agli stessi assi cartesiani, dovremo porre nelle [1] $x' = x$, $y' = y$. Se introduciamo un'incognita ausiliaria t ponendo

$$a''x + b''y + c'' = t,$$

abbiamo

$$ax + by + c = tx$$
$$a'x + b'y + c' = ty,$$

ovvero

$$[3] \qquad \begin{cases} (a-t)x + by + c = 0 \\ a'x + (b'-t)y + c' = 0 \\ a''x + b''y + (c''-t) = 0. \end{cases}$$

Queste tre equazioni lineari in $x\ y$ coesistono se

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} a-t & b & c \\ a' & b'-t & c' \\ a'' & b'' & c''-t \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$t^3 - (a + b' + c'')\, t^2 + (A + B' + C'')\, t - \Delta = 0.$$

Questa equazione di 3° grado fornisce tre valori di t, per ciascuno dei quali le equazioni [3] in x e y si accordano a determinare una coppia di valori di x e y, e quindi un punto.

Esistono dunque in generale tre punti uniti. Essi possono essere: reali e distinti; reali, di cui due coincidenti (se quell'equazione di 3° grado ha una radice doppia); reali e tutti tre coincidenti (se essa ha radice tripla); uno reale e due immaginarî (ma con le coordinate omonime complesse-coniugate).

Nel 1° caso i tre punti uniti sono vertici di un triangolo, i cui tre lati sono le rette unite dell'omografia; nell'ultimo caso due di queste rette sono immaginarie; nel 2° e nel 3° caso due rette unite o tutte tre coincidono.

Esercizio 1. Oltre ai casi considerati di omografie di piani sovrapposti, ve ne sono ancora due notevoli. Quando il determinante che compare nell'equazione [4] ha tutti i suoi suddeterminanti nulli per un certo valore di t, questo valore è radice doppia o tripla dell'equazione [4]; ed inoltre è tale che, sostituito a t nelle tre equazioni [3], le rende identiche tra loro; sicchè una qualunque di queste equazioni rappresenterà allora una retta, di cui tutti i punti sono punti uniti. Ne segue che allora due rette corrispondenti qualunque s'incontrano su questa retta fissa, e che su esse l'omografia determina due punteggiate prospettive; sicchè le congiungenti i punti corrispondenti formano un fascio di rette unite. Quindi due punti corrispondenti qualunque del piano sono in linea retta col centro di questo fascio; centro che sarà un punto unito dell'omografia posto fuori della retta di punti uniti, se quel certo valore di t è solo radice doppia della [4]; e che è posto invece su quella retta, se quel valore è radice tripla. Una tale omografia dicesi *omologia*, di cui sono *centro* ed *asse* il centro del fascio di rette unite e la retta di punti uniti.

Es. 2. Se **A B C** sono i tre punti uniti di un'omografia, e sulle **BC CA AB** si hanno tre coppie qualunque di punti corrispondenti; il prodotto dei tre doppî rapporti (costanti) di queste coppie con le rispettive coppie **BC CA AB** è l'unità.

Es. 3. Due punti corrispondenti qualunque, e i tre punti d'intersezione della loro congiungente colle tre rette unite, hanno doppî rapporti, che non variano col variare della coppia di punti corrispondenti.

CAPITOLO V.

Piano rigato.

Coordinate di rette nel piano.

§ **49**. Per individuare una retta in un piano si può procedere in varî modi. Ad esempio, si considerino nel piano due rette fisse o assi **x** e **y**: ogni altra retta del piano seca ciascuna di esse in un punto, e, noti questi due punti, è individuata la retta. Per la determinazione dei punti sugli assi occorrono due numeri, uno per asse, i quali saranno dunque le *coordinate* della retta. Così possiamo adoperare le ascisse p e q di quei punti, scegliendo come origine il punto **O** comune ai due assi; oppure adoperare altri sistemi di coordinate.

Risulta intanto che il piano rigato è una forma di 2ª specie.

Consideriamo il piano anche come punteggiato, e scegliamo le stesse due rette **x** e **y** come assi cartesiani. Se x y sono le coordinate di un punto della retta **r** che vogliamo individuare, l'equazione della **r** come luogo avrà la forma

$$ax + by + c = 0;$$

e per scriverla occorrerà conoscere, non già a b c, ma i rapporti di due di essi al rimanente; quindi potremo assumere come coordinate della retta due cotali rapporti. E potremo anche chiamare i tre numeri $a\,b\,c$ *coordinate omogenee* della retta **r**.

Scegliamo i due rapporti $a : c$ e $b : c$, e poniamo

$$\frac{a}{c} = u, \quad \frac{b}{c} = v;$$

diremo u e v le *coordinate Plückeriane* della retta (dal nome del grande geometra PLÜCKER che le introdusse nella scienza). Il loro significato geometrico emerge dalle (§ 35)

$$u = \frac{a}{c} = -\frac{1}{p}, \quad v = \frac{b}{c} = -\frac{1}{q};$$

esse sono dunque i valori opposti e inversi dei segmenti che la retta taglia sugli assi.

Il rapporto $\frac{u}{v} = \frac{a}{b} = -m$ diviene (§ 36)

$$\frac{u}{v} = -\frac{\operatorname{sen} \mathbf{xr}}{\operatorname{sen} \mathbf{ry}};$$

esso non dipende che dalla direzione della retta **r**, e per rette parallele è costante. Perciò a e b si possono definire *coordinate omogenee* di una direzione.

Se la retta **r** non passa per l'origine, la sua equazione può dividersi per c, e diviene

$$ux + vy + 1 = 0;$$

la quale contiene le u v allo stesso modo che le x y.

Date x e y, l'equazione è soddisfatta da infinite coppie di valori di u e v, e precisamente dalle coordinate di tutte le rette che passano pel punto $(x\ y)$; onde si può chiamare *l'equazione del punto*, considerato come centro di un fascio di rette.

In particolare: per ogni retta parallela all'asse delle x (o delle u) è $u = 0$; onde $u = 0$ è l'equazione del punto all'infinito su quell'asse. E $v = 0$ è l'equazione del punto all'infinito sull'altro asse. Per la retta all'infinito è $(u = 0,\ v = 0)$.

L'equazione $\frac{u}{v} = m$ individua il punto all'infinito su quelle rette parallele **r** per cui $\frac{\operatorname{sen} \mathbf{xr}}{\operatorname{sen} \mathbf{ry}} = -m$.

Per ogni retta che passi per l'origine risultano u e v infiniti. Ma se il limite del rapporto $\frac{u}{v} = -\frac{\operatorname{sen} \mathbf{xr}}{\operatorname{sen} \mathbf{ry}}$ è determinato, esso individua la retta.

Alcune applicazioni.

§ 50. L'intima connessione fra i sistemi cartesiano e plückeriano, per le coordinate dei punti e delle rette, ci dispensa dal trattare direttamente le principali questioni del piano rigato, permettendoci di ricondurle a quelle del piano punteggiato. Valgano alcuni esempî:

Date due rette $\mathrm{r}(u\ v)$, $\mathrm{r}'(u'\ v')$; una retta s del fascio da esse determinato ha per equazione (§ 39)

$$\lambda(ux + vy + 1) + \mu(u'x + v'y + 1) = 0$$

ovvero

$$(\lambda u + \mu u')x + (\lambda v + \mu v')y + (\lambda + \mu) = 0,$$

ed ha quindi per coordinate

$$\left(\frac{\lambda u + \mu u'}{\lambda + \mu},\ \frac{\lambda v + \mu v'}{\lambda + \mu}\right),$$

ove $\mu : \lambda$ ha il significato geometrico indicato al § 39. E se si pone $\mu : \lambda = r$, le dette coordinate della s divengono

$$\left(\frac{u + ru'}{1 + r},\ \frac{v + rv'}{1 + r}\right).$$

Le coordinate della s' armonica di s rispetto a r e r' sono poi

$$\left(\frac{u - ru'}{1 - r},\ \frac{v - rv'}{1 - r}\right).$$

La condizione perchè tre rette $\mathrm{r}(u\ v)$, $\mathrm{r}'(u'\ v')$, $\mathrm{r}''(u''\ v'')$ appartengano a un fascio è (§ 38)

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$u(v' - v'') + v(u'' - u') + (u'v'' - u''v') = 0,$$

$$\frac{u - u'}{u'' - u'} = \frac{v - v'}{v'' - v'}, \text{ ecc.}$$

Se le rette $r'(u'\ v')$, $r''(u''\ v'')$ sono fisse e $r(u\ v)$ varia, questa equazione è quella del punto comune a quelle due rette $r\ r'$.

Date nel piano tre rette non di un fascio $r(u\ v)$, $r'(u'\ v')$, $r''(u''\ v'')$, ogni retta del piano ha coordinate della forma (§ 40)

$$\left(\frac{\lambda u + \mu u' + \nu u''}{\lambda + \mu + \nu}, \frac{\lambda v + \mu v' + \nu v''}{\lambda + \mu + \nu}\right),$$

e possono assumersi come sue coordinate omogenee i numeri $\lambda\ \mu\ \nu$.

La distanza fra un punto $P(x\ y)$ e una retta $r(u\ v)$ è (§ 43)

$$Pr = \frac{(ux + vy + 1)\operatorname{sen}\omega}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega}}.$$

L'angolo di due rette è dato da (§ 44)

$$\operatorname{tg} rr' = \frac{(uv' - u'v)\operatorname{sen}\omega}{uu' + vv' - (uv' + u'v)\cos\omega}, \text{ ecc.}$$

L'area del trilatero determinato da tre rette è (§ 45)

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\omega \frac{\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u' & v' & 1 \\ u'' & v'' & 1 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'' & v'' \\ u & v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}}.$$

§ **51**. Quelle rette, le cui coordinate plückeriane $u\ v$ soddisfanno una stessa equazione lineare

$$au + bv + c = 0,$$

passano tutte pel punto di coordinate cartesiane $\left(\frac{a}{c}\ \frac{b}{c}\right)$ (§ 49); vale a dire che questo punto ha per equazione $au + bv + c = 0$ in coordinate di rette.

Le coordinate della retta pei due punti di equazioni

$$au + bv + c = 0, \quad a'u + b'v + c' = 0$$

sono

$$u = \frac{[bc']}{[ab']}, \quad v = \frac{[ca']}{[ab']}.$$

Un punto qualunque di questa retta ha per equazione

$$\lambda(au + bv + c) + \mu(a'u + b'v + c') = 0.$$

E così via.

In generale: se esiste una serie continua di rette, le cui coordinate $u\ v$ soddisfanno una data equazione $f(u\ v) = 0$ (la quale esprimerà una condizione geometrica per la retta di coordinate $u\ v$), l'insieme di queste rette si dice costituire un *inviluppo*.

Date due equazioni fra u e v; se esistono coppie di valori reali di u e v soddisfacenti queste equazioni, esse determinano altrettante rette, formanti un gruppo discreto di punti; e se esistono coppie di valori non entrambi reali, diremo che esse determinano *rette immaginarie*.

Si noti che le due rette immaginarie $(u_1 + iu_2, v_1 + iv_2)$, $(u_1 - iu_2, v_1 - iv_2)$ han comune un punto reale, la cui equazione è

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sistemi piani omografici e correlativi.

§ 52. Se fra le rette variabili $r(u\ v)$, $r'(u'\ v')$ di due piani rigati $\pi\ \pi'$ poniamo le equazioni

$$u' = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}, \quad v' = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''};$$

applicando i procedimenti del § 46 e seg. con le debite mutazioni, troviamo che: se il determinante $[ab'c'']$ non è nullo, la corrispon-

denza fra le rette r r' è univoca; a rette di un fascio corrispondono rette di un fascio; ai punti di ciascun piano corrispondono univocamente i punti dell'altro piano, e precisamente ai punti di una retta i punti della retta corrispondente; quaterne di punti o rette corrispondenti hanno lo stesso doppio rapporto. Insomma i due piani sono *omografici* (secondo la definizione del § 47).

La corrispondenza è determinata, se a quattro date rette di π formanti un quadrilatero (completo) si scelgono come corrispondenti quattro date rette di π' formanti quadrilatero (completo).

Se i due piani π π' sono sovrapposti, esistono in generale tre rette unite; ma possono anche presentarsi i casi particolari già trattati di omografie, in cui il numero dei punti uniti e delle rette unite si riduce a due od uno, ovvero diventa infinito. Ecc.

Fra gli elementi di un piano punteggiato π e quelli di un piano rigato π' si pongano le equazioni

$$[1] \qquad u' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad v' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''};$$

onde si ricava, se $[ab'c'']$ non è nullo,

$$[2] \qquad x = \frac{Au' + A'v' + A''}{Cu' + C'v' + C''}, \quad y = \frac{Bu' + B'v' + B''}{Cu' + C'v' + C''}.$$

Allora a ogni punto $P(x\,y)$ di π corrisponde una retta $r'(u'\,v')$ di π', e ad ogni retta r' di π' un punto P di π; a punti di una retta in π corrispondono rette per un punto in π', punteggiata e fascio projettivi; a rette per un punto in π corrispondono punti in una retta di π', fascio e punteggiata projettivi. A punti di un luogo di grado n in π corrispondono rette di un inviluppo di grado n in π'. Ecc.

Questa corrispondenza tra i due piani dicesi *reciprocità* o *correlazione*. Essa è determinata, se a quattro dati punti, di cui tre qualunque non in linea retta, si fanno corrispondere quattro date rette, di cui tre qualunque non per un punto. E può sempre venire espressa da due equazioni del tipo considerato [1] o dell'altro equivalente [2], od anche dalle seguenti equazioni (conseguenze di quelle), che stabiliscono la corrispondenza tra le rette $(u\,v)$ di π e i punti $(x'\,y')$ di π':

$$[1'] \qquad u = \frac{ax' + a'y' + a''}{cx' + c'y' + c''}, \quad v = \frac{bx' + b'y' + b''}{cx' + c'y' + c''}$$

ossia

$$[2'] \qquad x' = \frac{Au + Bv + C}{A''u + B''v + C''}, \quad y' = \frac{A'u + B'v + C'}{A''u + B''v + C''}.$$

Se i due piani coincidono, si può cercare quei punti che stanno sulle rette corrispondenti, ovvero quelle rette che passano pei punti corrispondenti. Riferendo punti e rette agli stessi due assi, per due elementi corrispondenti uniti $(x\,y)$ e $(u'\,v')$ dovrà aversi $u'x + v'y + 1 = 0$; ed eliminando da questa equazione le $u'\,v'$ mediante le [1], o le $x\,y$ mediante le [2], risulterà

$$[3] \quad ax^2 + b'y^2 + (b + a')\,xy + (c + a'')\,x + (c' + b'')\,y + c'' = 0,$$

$$[4] \quad Au'^2 + B'v'^2 + (B + A')u'v' + (C + A'')u' + (C' + B'')v' + C'' = 0.$$

Si hanno dunque ∞ punti di un luogo di 2° grado, e ∞ rette di un inviluppo di 2° grado.

È notevole il caso in cui

$$b = a', \quad c = a'', \quad c' = b'';$$

allora ad un punto, sia che si consideri come appartenente a π, sia che si consideri come appartenente a π', corrisponde la stessa retta risp. in π' ed in π; e viceversa.

Un altro caso notevole si ha quando l'equazione [3] si riduce a $0 = 0$, cioè quando

$$a = b' = c'' = 0, \quad b = -a', \quad c = -a'', \quad c' = -b'',$$

sicchè le [1] diventano

$$u' = -\frac{by + c}{cx + c'y}, \quad v' = \frac{bx - c'}{cx + c'y}.$$

Confrontando con ciò che diventano le [1'], si vede che anche in questo caso ad ogni punto corrisponde in ambi i modi una stessa retta; ma questa retta passa sempre per quel punto, e non è altro che la congiungente di questo al punto fisso $\left(\frac{c'}{b}, -\frac{c}{b}\right)$. Il determinante $[ab'c'']$ è allora nullo, e ad una retta qualunque del piano corrisponde questo punto fisso, mentre ad una retta passante per esso corrisponde ogni suo punto.

Esercizio 1. Le formole per la trasformazione delle coordinate delle rette sono le seguenti.

Se $u\ v$ sono le primitive e $U\ V$ le nuove; si ha (conservando le notazioni del § 32 e seg.), per una traslazione degli assi,

$$U = \frac{u}{au + bv + 1}, \qquad V = \frac{v}{au + bv + 1};$$

e se invece si muta la direzione degli assi,

$$U = \frac{u \operatorname{sen}\beta + v \operatorname{sen}\alpha}{(au + bv + 1)\operatorname{sen}\omega}, \qquad V = \frac{u \operatorname{sen}\beta' + v \operatorname{sen}\alpha'}{(au + bv + 1)\operatorname{sen}\omega}.$$

Es. 2. Cercare direttamente, indipendentemente dalle coordinate cartesiane, le principali formole del piano rigato.

Es. 3. Un'equazione bilineare fra le coordinate $x\ y$ e $x'\ y'$ di due punti variabili di due piani fissi, determina una correlazione fra questi due piani; sicchè due punti che la soddisfino sono ciascuno sulla retta corrispondente all'altro nella correlazione. E viceversa.

Es. 4. Lo stesso per un'equazione bilineare fra le coordinate $u\ v$ e $u'\ v'$ di due rette variabili di due piani fissi.

Es. 5. Un'equazione bilineare fra le coordinate $x\,y$ di un punto di un piano e le coordinate $u'\ v'$ di una retta di un altro piano, determina un'omografia fra' due piani.

CAPITOLO VI.

Stelle di rette e di piani.

Coordinate degli elementi di una stella.

§ **53**. Ciascuna retta di una data stella di rette è secata da un dato piano (che non passi pel centro della stella) in un punto, e per coordinate delle singole rette della stella si possono assumere le coordinate dei rispettivi punti del piano punteggiato. Si possono anche considerare due rette fisse della stella come assi di due fasci di piani; per ogni retta della stella passa un piano dell'un fascio e un piano dell'altro, e le coordinate dei due piani nei due fasci individueranno quella retta, ossia ne saranno le coordinate.

Quindi la stella di rette è una forma di 2ª specie.

Un sistema di rette parallele non è che una stella col centro all'infinito.

Ciascun piano di una data stella di piani è secato da un dato piano (che non passi pel centro della stella) in una retta, e per coordinate dei singoli piani della stella si possono assumere le coordinate delle rispettive rette del piano rigato. Si possono anche considerare due piani fissi della stella come sostegni di due fasci di rette aventi lo stesso centro della stella; ogni piano della stella contiene una retta dell'un fascio e una dell'altro, e le coordinate di queste due rette faranno da coordinate del piano.

Quindi la stella di piani è una forma di 2ª specie.

Possono i piani della stella esser tutti paralleli a una retta: allora il centro è all'infinito.

Projezioni su un piano.

§ 54. Quelle rette di una stella che passano per dati punti A B C... secano un piano π' in punti A' B' C'..., che diconsi le *projezioni* di quelli dal centro della stella sul piano π'. Se un punto P percorre il segmento AB, la sua projezione P' percorre il segmento A'B' *projezione* di AB; se P percorre il perimetro del triangolo ABC, P' percorre il perimetro del triangolo A'B'C' *projezione* di ABC; ecc.

Se le rette projettanti son parallele, A'.., A'B'..., A'B'C'... sono le projezioni di A..., AB..., ABC... su π', secondo la comune direzione di quelle parallele (che in particolare può essere normale a π'). Allora le projezioni di una figura su piani paralleli sono uguali.

Sia π un piano, ABC un triangolo in esso. Se un lato AB del triangolo ABC giace in π', e C' è la projezione normale di C su π', sarà ABC' la projezione normale di ABC su π'. Tirata CD normale a AB, sarà anche C'D normale a AB, ed avremo.

$$ABC' : ABC = C'D : CD.$$

Ora C'D : CD equivale al coseno dell'angolo delle due rette cui questi segmenti appartengono, e questo angolo è misurato dallo stesso numero che il diedro dei due piani $\pi\,\pi'$; dunque

$$ABC' = ABC \cos\pi\pi'.$$

Se solo un vertice A cade in π', la retta $\pi\pi'$ passa per A, e in un punto E di essa s'incontrano BC e B'C'. Avremo, come dianzi,

$$AEB' = AEB \cos\pi\pi', \quad AEC' = AEC \cos\pi\pi';$$

e quindi, sommando o sottraendo secondo i casi,

$$AB'C' = ABC \cos\pi\pi'.$$

Se nessun vertice cade in π', si può sostituire a π un piano parallelo per un vertice; e quindi anche allora

$$A'B'C' = ABC \cos\pi\pi'.$$

In generale dunque: *se un triangolo si projetta normalmente su un piano, l'area del triangolo projezione è uguale all'area di esso triangolo moltiplicata pel coseno del diedro dei piani dei due triangoli.*

Forme di 2ª specie omografiche e projettive.

§ **55**. Quando una stella di rette (o di piani) è secata da un piano, a ciascun elemento della stella corrisponde ciascun elemento del piano punteggiato (o rigato), e viceversa. Dicesi allora che il piano è *sezione* della stella, e che la stella *projetta* il piano. La stella ed il piano si dicono anche *prospettivi*; e *prospettivi* si dicono pure due piani sezioni di una medesima stella, o due stelle che projettino un medesimo piano.

Se una serie di piani punteggiati (o rigati) e di stelle di rette (o di piani) è tale, che ciascuna di queste forme si possa dedurre dalla precedente mediante una projezione o una sezione, od anche che due consecutive siano sempre prospettive; allora due qualunque di queste forme si dicono *projettive*. Quindi due forme projettive a una terza sono projettive fra loro.

Una stella di rette (o di piani) e un piano punteggiato (o rigato) possono porsi in tale corrispondenza, che: 1° a quattro dati elementi della stella corrispondano quattro dati elementi del piano, con la condizione che tre qualunque dei quattro elementi dati in ciascuna forma non appartengano a una stessa forma di 1ª specie; 2° ad elementi costituenti un fascio nella stella corrispondano nel piano elementi costituenti una forma di 1ª specie omografica al fascio. Infatti, la cosa avviene evidentemente quando la stella è prospettiva al piano; altrimenti è all'uopo necessario e sufficiente che la sezione della stella con un piano riesca omografica al piano dato. La stella e il piano dati si dicono allora *omografici* (o *collineari*).

Due stelle di rette (o di piani) possono essere riferite l'una all'altra in guisa che: 1° a quattro dati elementi dell'una corrispondano quattro dati elementi nell'altra, con la condizione che tre qualunque dei quattro elementi dati in ciascuna stella non siano di un fascio; 2° ad elementi costituenti un fascio nell'una stella corrispondano nell'altra elementi di un fascio omografico. Infatti, la cosa è evidentemente così quando le due stelle sono prospettive a uno

stesso piano; altrimenti è facile vedere come sia necessario e sufficiente che, secando ciascuna stella con un piano, i due piani riescano omografici. Due stelle in tali condizioni si dicono *omografiche* (o *collineari*).

§ **56.** *Due forme di 2ª specie prospettive sono evidentemente omografiche.* Se sono due piani, hanno infiniti punti uniti sulla retta comune; e se sono due stelle, hanno infiniti piani uniti per la retta che unisce i due centri.

Due piani omografici distinti π *e* π', *aventi una retta di punti uniti* (pel che basta che essi abbiano tre punti uniti), *sono prospettivi.* Infatti: se **AA′ BB′** sono due coppie qualunque di punti corrispondenti, le rette **AB A′B′** saranno corrispondenti, e quindi taglieranno in uno stesso punto la retta di punti uniti comune ai due piani π π'; onde le rette **AA′ BB′** si taglieranno. Poichè adunque tutte le rette congiungenti coppie di punti corrispondenti dei due piani si tagliano mutuamente (senza stare evidentemente in uno stesso piano), esse passeranno per uno stesso punto; sicchè quei due piani omografici saranno sezioni della stella avente questo punto per centro.

Analogamente si dimostrerebbe che: *due stelle omografiche, aventi un fascio di piani uniti, sono prospettive.*

Due forme di 2ª specie omografiche, in qualunque loro posizione, sono projettive. È chiaro che basterà dimostrare questa proposizione per due piani omografici. Siano dunque π e π' questi piani. Dicendo **A A′** due loro punti corrispondenti qualunque, consideriamo la stella avente per centro un punto qualunque **S** della retta **AA′** e projettante il piano π'. Questa stella taglierà un piano qualunque π_1 condotto per **A** secondo una forma omografica (prospettiva) a π' e quindi anche a π; e i due piani omografici π e π_1 avranno un punto unito **A**. Consideriamo in π una punteggiata qualunque **r** passante per **A**: le corrisponderà nel piano omografico π_1 una punteggiata $\mathbf{r}_1$ passante per **A** e prospettiva a quella, cioè sezione di uno stesso fascio di rette. Sia $\mathbf{S}_1$ il centro di questo fascio, e conduciamo per **r** un piano qualunque π_2: la stella di centro $\mathbf{S}_1$ projetta π_1 su π_2 secondo un piano, che sarà omografico a π ed avrà comune con questo la retta di punti uniti **r**; onde, come vedemmo, i due piani π_2 e π saranno prospettivi. In conseguenza, dei piani π' π_1 π_2 π essendo due consecutivi qualunque prospettivi, π' e π saranno projettivi.

Forme di 2ª specie correlative.

§ 57. Consideriamo da una parte un piano punteggiato e una stella di rette, dall'altra un piano rigato e una stella di piani. Una forma dell'una coppia e una dell'altra possono esser poste in tale corrispondenza, che: 1° a quattro dati elementi dell'una forma corrispondano quattro elementi dell'altra, con la condizione che tre qualunque degli elementi dati di ciascuna forma non appartengano a una forma di 1ª specie; 2° ad elementi costituenti una forma di 1ª specie corrispondano elementi di una forma di 1ª specie omografica a quella. Infatti ciò fu provato per un piano punteggiato ed uno rigato; ora ogni altro caso si riduce a questo mercè una o due sezioni.

Due forme di 2ª specie, così riferite l'una all'altra, si dicono *correlative* o *reciproche*.

Due forme di 2ª specie correlative a una terza sono omografiche fra loro. E due forme, di cui una sia omografica e l'altra correlativa a una terza, sono correlative fra loro.

La teoria completa dell'omografia o projettività delle forme di 1ª, 2ª e 3ª specie è dovuta principalmente a *Möbius*, *Steiner* e *Chasles*. Quest'ultimo espose, facendone applicazioni svariate, il *principio di omografia*, il quale consiste in ciò, che « le proprietà projettive di una figura non cessano di valere quando a questa si sostituisca una sua figura omografica ». Tale principio è assai importante; poichè permette di dedurre immediatamente dalle proprietà projettive di una figura dotata di particolarità *metriche* (v. pag. 4) quelle di una figura omografica più generale, cioè non avente quelle particolarità; così dalle proprietà projettive del rettangolo, del circolo, dei cilindri, della sfera, si deducono immediatamente le proprietà del quadrilatero, delle sezioni coniche, dei coni, delle superficie di 2° grado.

Si osservi però che già prima dei tre geometri nominati si conosceva la teoria delle projezioni, cioè di quel caso particolare dell'omografia che costituisce l'*omologia* o *prospettività* di due forme; anzi il *Poncelet* aveva destinato il suo *Traité des propriétés projectives des figures* a mostrare appunto, come questa corrispondenza tra due forme desse un metodo fecondo per dedurre da proprietà di figure particolari quelle di figure più generali.

A *Chasles* e a *Plücker* è poi dovuta una teoria completa delle correlazioni o reciprocità tra due piani o tra due spazi. Questa teoria, e l'introduzione che il *Plücker*

fece delle coordinate della retta nel piano e di quelle del piano nello spazio, parallelamente alle coordinate del punto nel piano e nello spazio, posero in piena luce la *legge di dualità*, che governa tutta la geometria projettiva. La legge di dualità si può enunciare così: « 1° Ogni teorema di geometria projettiva relativo al piano non cessa di valere se vi si scambiano le parole *punto* e *retta* (e quindi *punteggiata* e *fascio*, *luogo* e *inviluppo*, ecc.); 2° ogni teorema di geometria projettiva in generale non cessa di valere se vi si scambiano *punti* e *piani* (e quindi piani punteggiati con piani rigati, stelle di piani con stelle di rette, rette punteggiate con fasci di piani, ecc.) ».

Di questa legge il lettore avrà già potuto osservare varî casi particolari che ci si sono presentati. E non è difficile persuadersi che essa vale in generale, se si pon mente al fatto, che in tutte le dimostrazioni analitiche di teoremi projettivi si potrebbero scambiare le coordinate di punti colle coordinate di rette o di piani.

Una teoria più ristretta che quella della dualità o delle correlazioni, la teoria cioè *delle polari reciproche* (polarità rispetto ad una curva o superficie di 2° grado), aveva condotto sul principio del secolo i geometri della Scuola politecnica di Parigi e segnatamente il *Poncelet*, ad applicare il metodo enunciato per dedurre da teoremi noti altri nuovi teoremi mediante scambî di parole. Ma al *Gergonne* (*Annales de Mathématiques*, XVII, XVIII, 1827 e seg.) spetta il merito di avere esposta la legge di dualità in tutta la sua generalità, indipendentemente da qualsiasi trasformazione delle figure.

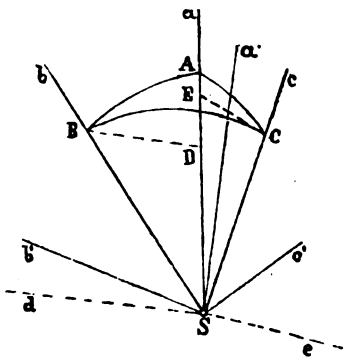
Triedrometria e trigonometria sferica.

§ **58**. Siano **a b c** tre rette di una stella. Esse determinano tre piani **bc ca ab**, che indicheremo con $\alpha\ \beta\ \gamma$. Scegliamo le pagine positive su questi piani, e quindi le direzioni positive sulle rette della stella **a′ b′ c′** normali ai piani medesimi. Saranno anche **a b c** normali ai piani **b′c′ c′a′ a′b′**, che indicheremo con $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$; e quindi determineranno le pagine positive su questi piani. Il triedro che ha per facce gli angoli **bc ca ab**, e quello che ha per facce gli angoli **b′c′ c′a′ a′b′**, si diranno *supplementari* o *polari*. Gli angoli **b′c′ c′a′ a′b′** saranno misurati dagli stessi numeri che i diedri $\beta\gamma\ \gamma\alpha\ \alpha\beta$, formati dalle pagine positive dei piani $\alpha\ \beta\ \gamma$ ed aventi per spigoli **a b c**; e gli angoli **bc ca ab** saranno misurati dagli stessi numeri che i diedri $\beta'\gamma'\ \gamma'\alpha'\ \alpha'\beta'$ aventi per spigoli **a′ b′ c′**.

Consideriamo una sfera che abbia per centro il centro **S** della stella. Percorrendo le rette della stella **a** . . . a partire da **S** nelle loro direzioni positive fino a incontrare la sfera, si individuano sulla sfera altrettanti punti **A** . . . Se una retta descrive un angolo piano **ab** nel verso positivo, il corrispondente punto della sfera descrive un arco di circolo massimo **AB** nel verso *positivo*. Quindi nel triangolo sferico **ABC** i lati **BC CA AB** hanno le stesse misure degli angoli **bc ca ab**, facce del triedro **abc** corrispondente a quel triangolo sferico.

I triangoli **ABC A'B'C'** si dicono *supplementari* o *polari*. Il secondo ha per vertici i *poli* dei lati del primo, e viceversa. I lati **B'C' C'A' A'B'** del secondo hanno le stesse misure degli angoli formati dai lati del primo.

Nei piani β γ tiriamo le rette **d** e normali a **a**, sicchè gli angoli retti **ad ae** siano positivi (*); e tiriamo **BD CE** normali a **a**. Se si assume il raggio della sfera come unità, risulta



$$SD = \cos ab, \quad DB = \operatorname{sen} ab,$$
$$SE = \cos ac, \quad EC = \operatorname{sen} ac;$$

quindi projettando normalmente **SB** e **SDB** su **c**, abbiamo

$$\cos bc = \cos ab \cos ac + \operatorname{sen} ab \cos dc;$$

e projettando **SC** e **SEC** su **d**, abbiamo

$$\cos dc = \cos ac \,.\, 0 + \operatorname{sen} ac \cos de = \operatorname{sen} ac \cos dc.$$

Ma $de = \beta\gamma$; quindi sostituendo concludiamo

$$\cos bc = \cos ab \cos ac + \operatorname{sen} ab \operatorname{sen} ac \cos \beta\gamma.$$

(*) Nella figura le pagine positive di β γ si suppongono scelte in modo che gli angoli **ab ac** siano positivi.

Otteniamo così le tre importanti relazioni fra le facce del triedro e uno dei suoi diedri:

$$\cos bc = \cos ca \cos ab - \operatorname{sen} ca \operatorname{sen} ab \cos\beta\gamma,$$

$$\cos ca = \cos ab \cos bc - \operatorname{sen} ab \operatorname{sen} bc \cos\gamma\alpha,$$

$$\cos ab = \cos bc \cos ca - \operatorname{sen} bc \operatorname{sen} ca \cos\alpha\beta.$$

Dalla prima si trae

$$\cos\beta\gamma = \frac{\cos ca \cos ab - \cos bc}{\operatorname{sen} ca \operatorname{sen} ab},$$

e quindi

$$\operatorname{sen}^2\beta\gamma = 1 - \cos^2\beta\gamma = \frac{\operatorname{sen}^2 ca \operatorname{sen}^2 ab - (\cos ca \cos ab - \cos bc)^2}{\operatorname{sen}^2 ca \operatorname{sen}^2 ab}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 ca)(1 - \cos^2 ab) - (\cos ca \cos ab - \cos bc)^2}{\operatorname{sen}^2 ca \operatorname{sen}^2 ab},$$

onde

$$\frac{\operatorname{sen}^2\beta\gamma}{\operatorname{sen}^2 bc} = \frac{1 - \cos^2 bc - \cos^2 ca - \cos^2 ab + 2\cos bc \cos ca \cos ab}{(\operatorname{sen} bc \operatorname{sen} ca \operatorname{sen} ab)^2}.$$

Il 2° membro evidentemente non si altera permutando **a b c**; e però esso equivale anche a $\frac{\operatorname{sen}^2\gamma\alpha}{\operatorname{sen}^2 ca}$ e $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\beta}{\operatorname{sen}^2 ab}$. Dunque avremo, in valore assoluto,

$$\frac{\operatorname{sen}\beta\gamma}{\operatorname{sen} bc} = \frac{\operatorname{sen}\gamma\alpha}{\operatorname{sen} ca} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\beta}{\operatorname{sen} ab},$$

vale a dire: *i seni delle facce del triedro sono proporzionali ai seni dei diedri opposti.*

Noi dimostreremo in seguito (§ 67) che questa proposizione è vera anche quando si tien conto dei segni: ma nella triedrometria ordinaria, essendo le facce e i diedri che si considerano sempre compresi fra 0 e π, e quindi avendo i seni positivi, basta considerare i valori assoluti.

Da' calcoli ora fatti si ricava

$$1 + 2\cos bc \cos ca \cos ab - \cos^2 bc - \cos^2 ca - \cos^2 ab = \operatorname{sen}^2 ca \operatorname{sen}^2 ab \operatorname{sen}^2\beta\gamma.$$

Il secondo membro è il prodotto di tre seni quadrati, numeri che stanno fra 0 e 1; dunque il primo membro è sempre compreso fra 0 e 1; e però la sua radice quadrata può assumersi come seno di un certo angolo. Nulla impedisce di definire questo angolo come il *quantum* del triedro **abc** (STAUDT, 1842); sicchè potremo porre

$$\mathrm{sen}^2\mathbf{abc} = 1 + 2\cos\mathbf{bc}\cos\mathbf{ca}\cos\mathbf{ab} - \cos^2\mathbf{bc} - \cos^2\mathbf{ca} - \cos^2\mathbf{ab}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\mathbf{ab} & \cos\mathbf{ac} \\ \cos\mathbf{ba} & 1 & \cos\mathbf{bc} \\ \cos\mathbf{ca} & \cos\mathbf{cb} & 1 \end{vmatrix},$$

e precisamente

$$\mathrm{sen}\mathbf{abc} = \mathrm{sen}\mathbf{bc}\,\mathrm{sen}\mathbf{ca}\,\mathrm{sen}\alpha\beta = \mathrm{sen}\mathbf{ca}\,\mathrm{sen}\mathbf{ab}\,\mathrm{sen}\beta\gamma = \mathrm{sen}\mathbf{ab}\,\mathrm{sen}\mathbf{bc}\,\mathrm{sen}\gamma\alpha.$$

Applicando le esposte relazioni al triedro **a'b'c'**, e ricordando che $\mathbf{a'b'} = \alpha\beta, \ldots,$ $\mathbf{ab} = \alpha'\beta', \ldots,$ troviamo le seguenti:

$$\cos\beta\gamma = \cos\gamma\alpha\cos\alpha\beta - \mathrm{sen}\gamma\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\beta\cos\mathbf{bc},$$

$$\cos\gamma\alpha = \cos\alpha\beta\cos\beta\gamma - \mathrm{sen}\alpha\beta\,\mathrm{sen}\beta\gamma\cos\mathbf{ca},$$

$$\cos\alpha\beta = \cos\beta\gamma\cos\gamma\alpha - \mathrm{sen}\beta\gamma\,\mathrm{sen}\gamma\alpha\cos\mathbf{ab}.$$

Qui possiamo porre

$$\mathrm{sen}^2\alpha\beta\gamma = 1 + 2\cos\beta\gamma\cos\gamma\alpha\cos\alpha\beta - \cos^2\beta\gamma - \cos^2\gamma\alpha - \cos^2\alpha\beta,$$

e precisamente

$$\mathrm{sen}\alpha\beta\gamma = \mathrm{sen}\beta\gamma\,\mathrm{sen}\gamma\alpha\,\mathrm{sen}\mathbf{ab} = \mathrm{sen}\gamma\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\beta\,\mathrm{sen}\mathbf{bc} = \mathrm{sen}\alpha\beta\,\mathrm{sen}\beta\gamma\,\mathrm{sen}\mathbf{ca}.$$

Si noti che $\mathrm{sen}\mathbf{abc}$ muta segno se si scambiano due delle rette **abc**; onde

$$\mathrm{sen}\mathbf{abc} = \mathrm{sen}\mathbf{bca} = \mathrm{sen}\mathbf{cab} = -\mathrm{sen}\mathbf{acb} = -\mathrm{sen}\mathbf{bac} = -\mathrm{sen}\mathbf{cba}.$$

Si noti inoltre che $\mathrm{sen}\mathbf{abc}$ si riduce a zero, quando è zero uno dei suoi fattori $\mathrm{sen}\mathbf{bc}$ $\mathrm{sen}\mathbf{ca}$ $\mathrm{sen}\mathbf{ab}$, o uno dei tre $\mathrm{sen}\beta\gamma$ $\mathrm{sen}\gamma\alpha$ $\mathrm{sen}\alpha\beta$;

ossia quando due delle rette **a b c** coincidono, e quando tutte tre sono di un fascio.

Diviene poi sen**abc** uguale all'unità, quando ciascuno di quei seni vale 1; ossia quando le rette **a b c** sono mutuamente normali, come pure i piani $\alpha\ \beta\ \gamma$. Questo è il caso del triedro trirettangolo.

Lo stesso dicasi di sen$\alpha\beta\gamma$.

Se il triedro **abc** è rettangolo, e precisamente se i piani $\beta\ \gamma$ sono perpendicolari in modo che sia l'angolo $\beta\gamma = \frac{\pi}{2}$; allora le precedenti relazioni divengono

$$\cos \mathbf{bc} = \cos \mathbf{ca} \cos \mathbf{ab},$$

$$\operatorname{sen} \mathbf{ca} = \operatorname{sen} \mathbf{bc} \operatorname{sen} \gamma\alpha, \qquad \operatorname{sen} \mathbf{ab} = \operatorname{sen} \mathbf{bc} \operatorname{sen} \alpha\beta,$$

$$\cos \gamma\alpha = -\operatorname{sen} \alpha\beta \cos \mathbf{ca}, \quad \cos \alpha\beta = -\operatorname{sen} \gamma\alpha \cos \mathbf{ab}.$$

Tutte le relazioni dianzi dimostrate si applicano al triangolo sferico **ABC**, bastando mutare gli angoli **bc ca ab** nei lati **BC CA AB** del triangolo. Ma non intendiamo qui sviluppare tutta la trigonometria sferica, benchè in quelle relazioni vi siano già i fondamenti di essa.

Torniamo a un triedro qualunque. Ed osserviamo che, se **a**″ è la retta comune ai due piani perpendicolari α e **aa**′, il triedro rettangolo **a**″**ca** dà sen**ca** sen$\alpha\beta$ = sen**a**″**a** = cos**aa**′, potendo supporsi **a**″**a**′ $= \frac{\pi}{2}$; onde l'espressione sen**bc** sen**ca** sen$\alpha\beta$ di sen**abc** diviene sen**bc** cos**aa**′. Avremo dunque

$$\operatorname{sen} \mathbf{abc} = \operatorname{sen} \mathbf{bc} \cos \mathbf{aa}' = \operatorname{sen} \mathbf{ca} \cos \mathbf{bb}' = \operatorname{sen} \mathbf{ab} \cos \mathbf{cc}'.$$

Esercizio 1. In un triedro qualunque si ha

$$\cot \mathbf{bc} \operatorname{sen} \mathbf{ca} + \cos \mathbf{ca} \cos \alpha\beta + \operatorname{sen} \alpha\beta \cot \beta\gamma = 0, \text{ ecc.}$$

Es. 2. In un triedro rettangolo si ha

$$-\operatorname{tg} \mathbf{ab} = \operatorname{tg} \mathbf{bc} \cos \gamma\alpha = \operatorname{sen} \mathbf{ca} \operatorname{tg} \alpha\beta,$$

$$-\operatorname{tg} \mathbf{ca} = \operatorname{tg} \mathbf{bc} \cos \alpha\beta = \operatorname{sen} \mathbf{ab} \operatorname{tg} \gamma\alpha,$$

$$\cos \mathbf{bc} = \cot \gamma\alpha \cot \alpha\beta.$$

Es. 3. Posto in un triedro qualunque $\mathbf{bc} + \mathbf{ca} + \mathbf{ab} = 2s$, si ha

$$\operatorname{sen}^2 \mathbf{abc} = 4 \operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s - \mathbf{bc}) \operatorname{sen}(s - \mathbf{ca}) \operatorname{sen}(s - \mathbf{ab}).$$

Es. 4. Posto inoltre $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 2\sigma$, si ha

$$\operatorname{sen}^2\alpha\beta\gamma = 4\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}(\sigma - \beta\gamma) \operatorname{sen}(\sigma - \gamma\alpha) \operatorname{sen}(\sigma - \alpha\beta).$$

Es. 5. $\operatorname{sen}\alpha\beta\gamma = \dfrac{\operatorname{sen}^2 \mathbf{abc}}{\operatorname{sen}\mathbf{bc}\operatorname{sen}\mathbf{ca}\operatorname{sen}\mathbf{ab}}$, $\quad \operatorname{sen}\mathbf{abc} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha\beta\gamma}{\operatorname{sen}\beta\gamma\operatorname{sen}\gamma\alpha\operatorname{sen}\alpha\beta}$.

Es. 6.
$$\frac{\operatorname{sen}\mathbf{abc}}{\operatorname{sen}\alpha\beta\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\mathbf{bc}}{\operatorname{sen}\beta\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\mathbf{ca}}{\operatorname{sen}\alpha\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\mathbf{ab}}{\operatorname{sen}\alpha\beta}.$$

Es. 7. Trovare pel triedro e pel triangolo sferico gli analoghi dei teoremi di *Ceva* e di *Menelao* relativi al triangolo rettilineo.

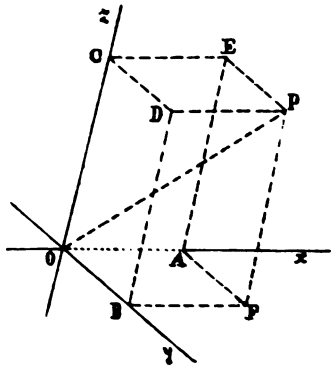
CAPITOLO VII.

Spazio punteggiato.

Coordinate.

§ **59**. Per individuare i punti dello spazio il sistema di coordinate più in uso è quello che dicesi *cartesiano*, non essendo che un'estensione dell'omonimo sistema pei punti di un piano.

Fissiamo un punto **O** nello spazio; e per questo punto conduciamo tre rette **x y z**, le quali non stiano in un piano, e quindi determinino tre piani distinti **yz zx xy**. Immaginiamo lo spazio solcato da una serie di piani paralleli a **yz**, da una serie di piani paralleli a **zx**, e da una serie di piani paralleli a **xy**. Per un punto qualunque **P** dello spazio passa un piano di ciascuna serie; questi tre piani secano rispettivamente le rette **x y z** in tre punti **A B C**, i quali individueranno i tre numeri x y z, che misurano i segmenti **OA OB OC** riferiti a una stessa unità lineare (o anche a differenti unità), quando su quelle tre rette si siano assegnate le direzioni positive. Viceversa: dati questi numeri x y z, sono individuati i punti **A B C**, e quindi i tre piani per essi, ed il punto **P** comune a questi tre piani. I numeri x y z si possono dunque assumere come coordinate del punto **P**, e diconsi *cartesiane* o *parallele*.



Resta così provato che lo spazio punteggiato è una forma di 3ª specie.

Il punto **O** dicesi *origine* delle coordinate, le rette **x y z** e i piani **yz zx xy** diconsi *assi* e *piani* delle coordinate. Quando gli assi (e quindi anche i piani) sono mutuamente ortogonali, le coordinate si dicono *ortogonali*.

Pei punti dei piani **yz zx xy** è rispettivamente $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Pei punti di un asse sono nulle le coordinate relative agli altri due assi. Per l'origine sono nulle tutte tre le coordinate.

Punti di eguale x sono in un piano parallelo a **yz**, ecc.

I tre piani coordinati dividono lo spazio in otto triedri. Le direzioni positive degli assi determinano quel triedro che contiene i punti di coordinate tutte positive; nel triedro opposto si trovano i punti di coordinate tutte negative; e negli altri sei triedri si trovano i punti che hanno due coordinate di un segno e una del segno opposto. I punti (x, y, z), $(-x, -y, -z)$ sono simmetrici rispetto all'origine; e se gli assi sono ortogonali, i punti (x, y, z), $(-x, y, z)$ sono simmetrici rispetto al piano **yz**, e i punti (x, y, z), $(x, -y, -z)$ rispetto all'asse **x**; ecc.

I tre piani coordinati e i loro paralleli pel punto **P** costituiscono un parallelepipedo, di cui **O** e **P** sono due vertici opposti, il *vettore* **OP** è una diagonale, e **A B C** sono altri tre vertici. Se si projetta il punto **P** mediante rette parallele agli assi **x y z** sui piani **yz zx xy** nei punti **D E F**, questi saranno i rimanenti vertici del parallelepipedo. I punti **D E F** hanno ciascuno due coordinate comuni con **P** e la terza nulla.

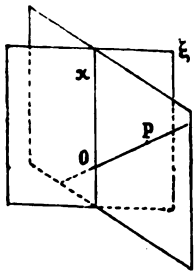
Le coordinate $x\ y\ z$ di **P** misurano le projezioni **OA OB OC** del suo vettore **OP** sugli assi, fatte parallelamente ai piani coordinati. Esse misurano anche i lati della spezzata **OAFP** e (salvo l'ordine) delle spezzate **OBFP OBDP**...

§ 60. Noi abbiamo ridotto la determinazione dei punti dello spazio a quella degli elementi di tre forme di 1ª specie, che sono le tre punteggiate sulle rette **x y z**, o meglio le tre serie (fasci) di piani paralleli a **yz zx xy**. Più generalmente: se consideriamo tre fasci di piani i cui assi non concorrano in un punto, per ogni punto dello spazio passa un piano di ciascun fascio; e scelti ad arbitrio dei sistemi di coordinate per i piani di questi fasci, le coordinate dei tre piani suddetti faranno da coordinate per il loro unico punto comune.

Il sistema delle coordinate *polari* è il seguente:

Sia **O** un punto fisso (*polo*), **x** una retta per esso (*asse polare*),

e ξ un piano per x (*piano polare*). Per un punto qualunque **P** passa un piano del fascio che ha per asse **x**; in questo piano esiste un fascio di rette che ha per centro **O** e di cui una retta passa per **P**; e su questa retta esiste una punteggiata di cui **P** è un elemento. È chiaro che, scelti quei sistemi di coordinate che più piacciano per gli elementi del fascio di piani, del fascio di rette e della punteggiata, si ottengono tre coordinate per **P**. Sceglieremo come tali: il numero φ che misura il diedro del piano **xP** col piano ξ, il numero θ che misura l'angolo della retta **OP** con **x**, e il numero ρ che misura il segmento **OP**.



Qui **P** è determinato come punto comune alle seguenti tre superficie (mutuamente ortogonali): un piano per **x**, cioè il piano **xP**; un cono di rotazione che ha **O** per vertice e **x** per asse, cioè quello che passa per **OP**; una sfera di centro **O**, cioè quella di raggio **OP**.

Baricentri. Punti di una retta o di un piano.

§ 61. Siano $\mathbf{P}_1(x_1\, y_1\, z_1)$, $\mathbf{P}_2(x_2\, y_2\, z_2)$ due punti, e $m_1\, m_2$ due numeri (*pesi*) che annettiamo ai due punti. Il baricentro dei punti $\mathbf{P}_1\, \mathbf{P}_2$ coi pesi $m_1\, m_2$ è quel punto $\mathbf{P}(x\, y\, z)$ della retta $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, per cui $\mathbf{P}_1\mathbf{P} : \mathbf{P}_2\mathbf{P} = -m_2 : m_1$. Ora projettando $\mathbf{P}_1\, \mathbf{P}_2\, \mathbf{P}$ in $\mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2\, \mathbf{A}$ sulla **x** secondo il piano **yz**, risulta anche $\mathbf{A}_1\mathbf{A} : \mathbf{A}_2\mathbf{A} = -m_2 : m_1$, onde **A** è il baricentro dei punti $\mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2$ coi pesi $m_1\, m_2$; e siccome $\mathbf{OA}_1 = x_1$, $\mathbf{OA}_2 = x_2$, $\mathbf{OA} = x$, così avremo

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

e per analogia

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \qquad z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Ai valori di $m_1 : m_2$ corrispondono univocamente i punti **P** della retta $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. E siccome le tre ultime equazioni equivalgono alle

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{y - y_1}{y - y_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = -\frac{m_2}{m_1};$$

così, eliminando $-m_2 : m_1$, saranno

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

le due condizioni necessarie e sufficienti perchè i tre punti $\mathbf{P}\,\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2$ siano in una retta.

È chiaro che in queste condizioni si possono permutare comunque i tre punti.

Ponendo $m_1+m_2=k$, le formole precedenti dànno le quattro equazioni

$$kx=m_1x_1+m_2x_2,\ ky=m_1y_1+m_2y_2,\ kz=m_1z_1+m_2z_2,\ k=m_1+m_2,$$

lineari omogenee nelle tre quantità $k\ m_1\ m_2$; prendendone tre per volta ed eliminandone queste quantità, otteniamo quattro determinanti nulli, che sono quelli estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

sopprimendovi una verticale alla volta. E basta che si annullino due determinanti, perchè si annullino tutti (*). Tali sono sott'altra forma le condizioni perchè i tre punti siano in una retta.

§ 62. Sia $\mathbf{P}(x\,y\,z)$ il baricentro di tre punti $\mathbf{P}_1(x_1\,y_1\,z_1)$, $\mathbf{P}_2(x_2\,y_2\,z_2)$, $\mathbf{P}_3(x_3\,y_3\,z_3)$ coi pesi $m_1\ m_2\ m_3$. Segue da quel che abbiamo detto pel caso di due punti che

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3},\quad z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Se i tre punti $\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3$ individuano un piano, ad ogni coppia di valori di $m_1 : m_3$, $m_2 : m_3$ corrisponde un punto $\mathbf{P}$ del piano, e vi-

(*) Purchè l'annullarsi di quei due non provenga dall'annullarsi dei suddeterminanti di second'ordine formati colle due verticali che essi hanno comuni.

ceversa. Or togliendo i fratti abbiamo le equazioni

$$\begin{aligned} m_1(x - x_1) + m_2(x - x_2) + m_3(x - x_3) &= 0, \\ m_1(y - y_1) + m_2(y - y_2) + m_3(y - y_3) &= 0, \\ m_1(z - z_1) + m_2(z - z_2) + m_3(z - z_3) &= 0; \end{aligned}$$

dalle quali eliminando i detti rapporti, otteniamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 & x - x_3 \\ y - y_1 & y - y_2 & y - y_3 \\ z - z_1 & z - z_2 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

come condizione perchè i quattro punti $\mathbf{P}\,\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3$ stiano in un piano.

È chiaro che si possono permutare comunque i quattro punti in questa condizione.

Le tre formole che forniscono le coordinate del baricentro di tre punti equivalgono alle quattro seguenti equazioni

$$\begin{aligned} kx &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3, \\ ky &= m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3, \\ kz &= m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3, \\ k &= m_1 + m_2 + m_3; \end{aligned}$$

dalle quali eliminando k m_1 m_2 m_3, troviamo

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

come condizione perchè i quattro punti stiano in un piano.

Del resto questo determinante non differisce dal precedente, com'è facile verificare.

In particolare: tre punti sugli assi coordinati $(p\ 0\ 0)$, $(0\ q\ 0)$, $(0\ 0\ r)$ individuano un piano, e ogni punto $(x\ y\ z)$ di questo piano verifica l'equazione

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

§ **63**. Il baricentro **P** di quattro punti $\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3\,\mathbf{P}_4$ coi pesi $m_1\,m_2\,m_3\,m_4$ ha per coordinate

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + m_4z_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

P. es. il centro delle medie distanze dei quattro punti è

$$\tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),\ \tfrac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4),\ \tfrac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4);$$

ed è facile vedere che per esso passano le quattro rette congiungenti i vertici del tetraedro dei quattro punti ai punti d'intersezione delle mediane delle facce opposte, nonchè le tre rette congiungenti i punti medî di due spigoli opposti del tetraedro. Le prime quattro rette si dividono mutuamente nel rapporto di 3 a 1, e le ultime tre per metà.

Ogni punto **P** dello spazio è baricentro dei quattro punti $\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3\,\mathbf{P}_4$ con convenienti pesi, purchè i quattro punti non giacciano in un piano. Infatti, se $\mathbf{P}(x\,y\,z)$ è dato, abbiamo le quattro equazioni

$$\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 &= kx, \\ m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4 &= ky, \\ m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + m_4z_4 &= kz, \\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 &= k, \end{aligned}$$

le quali individuano i rapporti delle quantità incognite $m_1\,m_2\,m_3\,m_4$ (e k).

I rapporti di tre delle quantità $m_1\,m_2\,m_3\,m_4$ alla rimanente possono perciò assumersi come coordinate dei punti dello spazio; e tutte quattro le quantità costituiscono le *coordinate baricentriche omogenee* dei punti dello spazio, riferiti a un tetraedro $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$.

Esercizio 1. Perchè un punto **P** sia il baricentro di più punti $\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\ldots$ coi pesi $m_1\,m_2\ldots$, basta che le projezioni di **P** secondo tre giaciture diverse (non parallele ad una stessa direzione) sopra tre rette (distinte o no) siano rispettivamente i bari-

centri delle projezioni di $P_1\ P_2 \ldots$ coi pesi $m_1\ m_2 \ldots$ Allora lo stesso avverrà per le projezioni secondo ogni giacitura e sopra ogni retta.

Se poi Q è un punto qualunque, e sulle $QP_1\ QP_2 \ldots QP$ si portano segmenti proporzionali a $m_1.QP_1,\ m_2.QP_2, \ldots, -(m_1 + m_2 + \ldots)QP$, con segmenti equipollenti ad essi si può formare un poligono chiuso.

Es. 2. Le coordinate baricentriche omogenee di un punto sono proporzionali alle distanze del punto dalle facce del tetraedro dei quattro punti di riferimento, moltiplicate per le aree delle facce stesse; ecc.

Relazioni angolari, distanze, angoli.

§ 64. Sia r una retta per l'origine di tre assi x y z. Scelta la direzione positiva sulla r, sia P un punto qualunque della retta, $\rho = OP$ il vettore di P; e siano $x = OA$, $y = AF$, $z = FP$ le coordinate di P.

La projezione normale di OP su qualunque retta è eguale alla projezione della spezzata OAFP; onde projettando successivamente su x y z, abbiamo le equazioni

$$[1] \qquad \begin{cases} \rho \cos xr = x + y \cos xy + z \cos xz, \\ \rho \cos yr = x \cos yx + y + z \cos yz, \\ \rho \cos zr = x \cos zx + y \cos zy + z; \end{cases}$$

e projettando sulla r abbiamo l'altra

$$[2] \qquad \rho = x \cos rx + y \cos ry + z \cos rz.$$

Sostituendo nella [2] i valori di cosrx cosry cosrz tratti dalle [1], troviamo

$$\rho^2 = x(x + y \cos xy + z \cos xz) + y(x \cos yx + y + z \cos yz) + z(x \cos zx + y \cos zy + z),$$

ovvero

$$[3] \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos xy + 2xz \cos xz + 2yz \cos yz;$$

formola che dà il quadrato del vettore di un punto, espresso mediante le coordinate del punto.

Le [1] e la [2] formano un sistema di quattro equazioni lineari omogenee in $\rho\, x\, y\, z$, e soddisfatte da valori non tutti nulli di queste; quindi è

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos rx & \cos ry & \cos rz \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è la relazione fra i coseni degli angoli di una retta **r** con i tre assi. Essa sussiste anche se **r** non passa per l'origine; poichè per angolo di due rette sghembe si definisce l'angolo (costante) delle loro parallele uscenti da un punto. Si può anche riguardare questa relazione come quella che passa fra' mutui angoli di quattro rette di una stella o comunque situate nello spazio.

Risolvendo le tre equazioni [1] rispetto a $x : \rho$, $y : \rho$, $z : \rho$, troviamo

$$[5] \qquad \frac{x}{\begin{vmatrix} \cos xr & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos zy & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos xz \\ \cos yx & \cos yr & \cos yz \\ \cos zx & \cos zr & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xr \\ \cos yx & 1 & \cos yr \\ \cos zx & \cos zy & \cos zr \end{vmatrix}} = \frac{\rho}{\begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho}{\operatorname{sen}^2 xyz}.$$

Sia **r'** un'altra retta. Projettando su **r'** il segmento **OP** e la spezzata **OAFP**, abbiamo la nuova equazione

$$[6] \qquad \rho \cos r'r = x \cos r'x + y \cos r'y + z \cos r'z;$$

la quale con le [1] porge

$$\begin{vmatrix} \cos r'r & \cos r'x & \cos r'y & \cos r'z \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In questo determinante $\cos r'r$ è moltiplicato per $\operatorname{sen}^2 xyz$, e quindi avremo

$$[7] \qquad \cos r'r \operatorname{sen}^2 xyz = - \begin{vmatrix} 0 & \cos r'x & \cos r'y & \cos r'z \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix};$$

equazione che dà il coseno dell'angolo di due rette $r\,r'$, espresso mediante i coseni dei loro angoli con gli assi.

Onde le due rette sono ortogonali, se è nullo l'ultimo determinante.

Se $P(x\,y\,z)$, $P'(x'\,y'\,z')$ sono punti di due rette $r\,r'$ per O, e se $OP = \rho$, $OP' = \rho'$; si ha dalla [6] e dalle [1] applicate alla r',

$$\rho\rho'\cos rr' = x(x' + y'\cos xy + z'\cos xz) + y(x'\cos yx + y' + z'\cos yz) + z(x'\cos zx + y'\cos zy + z')$$

ossia

$$[8] \qquad \rho\rho'\cos rr' = xx' + yy' + zz' + (xy' + x'y)\cos xy + (xz' + x'z)\cos xz + (yz' + y'z)\cos yz.$$

Quando gli assi sono ortogonali, le esposte relazioni si semplificano (poichè $\cos xy = 0, \ldots$), e divengono

$$[1'] \qquad \rho\cos xr = x, \quad \rho\cos yr = y, \quad \rho\cos zr = z,$$

$$[3'] \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$[4'] \qquad \cos^2 xr + \cos^2 yr + \cos^2 zr = 1,$$

$$[5'] \qquad \frac{x}{\cos xr} = \frac{y}{\cos yr} = \frac{z}{\cos zr} = \rho,$$

$$[7'] \qquad \cos rr' = \cos xr \cos xr' + \cos yr \cos yr' + \cos zr \cos zr',$$

$$[8'] \qquad \rho\rho' \cos rr' = xx' + yy' + zz'.$$

Queste relazioni sono di uso frequente. Si aggiunga la seguente:

$$\operatorname{sen}^2 rr' = \begin{vmatrix} 1 & \cos rr' \\ \cos r'r & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos^2 xr + \cos^2 yr + \cos^2 zr, & \cos xr \cos xr' + \cos yr \cos yr' + \cos zr \cos zr' \\ \cos xr' \cos xr + \cos yr' \cos yr + \cos zr' \cos zr, & \cos^2 xr' + \cos^2 yr' + \cos^2 zr' \end{vmatrix},$$

ovvero

$$[9] \qquad \operatorname{sen}^2 \mathbf{rr}' = \begin{vmatrix} \cos\mathbf{xr} & \cos\mathbf{yr} & \cos\mathbf{zr} \\ \cos\mathbf{xr}' & \cos\mathbf{yr}' & \cos\mathbf{zr}' \end{vmatrix}^2,$$

od anche

$$\operatorname{sen}^2 \mathbf{rr}' = \begin{vmatrix} \cos\mathbf{xr} & \cos\mathbf{yr} \\ \cos\mathbf{xr}' & \cos\mathbf{yr}' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\mathbf{xr} & \cos\mathbf{zr} \\ \cos\mathbf{xr}' & \cos\mathbf{zr}' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\mathbf{yr} & \cos\mathbf{zr} \\ \cos\mathbf{yr}' & \cos\mathbf{zr}' \end{vmatrix}^2.$$

Se $\mathbf{P}_1(x_1\, y_1\, z_1)$, $\mathbf{P}_2(x_2\, y_2\, z_2)$ sono due punti di una retta qualunque **r**, le projezioni del segmento $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ sugli assi **x y z** secondo i piani **yz zx xy** sono $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$; e queste sono anche le projezioni sugli assi di un segmento equipollente a $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ e uscente dall'origine **0**. Quindi è lecito in tutte le precedenti relazioni mutare $x\, y\, z$ in $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ e ρ in $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, conservando gli angoli.

Ci dispensiamo dallo scrivere le nuove relazioni. Solo notiamo la seguente, che dà la distanza di due punti, e che si deduce dalla [3]:

$$[10] \qquad \begin{aligned} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^2 = {} & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ & + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\mathbf{xy} + 2(x_2 - x_1)(z_2 - z_1)\cos\mathbf{xz} \\ & + 2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)\cos\mathbf{yz}, \end{aligned}$$

e in assi ortogonali

$$[10'] \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Analogamente: nella [8] $\rho\ \rho'$ possono indicare due segmenti su due rette qualunque **r r'**, e $x\, y\, z$, $x'\, y'\, z'$ le projezioni di questi segmenti sulle tre rette **x y z**.

§ 65. Il secondo membro della [3] è una (*) *forma quadratica* di $x\, y\, z$, che incontreremo sovente, e che perciò indicheremo con $\Phi(x\, y\, z)$.

(*) Una funzione algebrica razionale intera omogenea di più variabili dicesi *forma algebrica* di quelle variabili. Secondochè le variabili sono due, tre, ecc., la forma dicesi *binaria, ternaria,* ecc. E secondochè il suo grado nelle variabili è uno, due, tre, ecc., la forma dicesi *lineare, quadratica, cubica,* ecc.

I secondi membri delle [1] sono *forme lineari* di $x\,y\,z$; e siccome esse sono le semi-derivate parziali della $\Phi(x\,y\,z)$ rispetto a $x\,y\,z$, così le indicheremo con $\Phi_1(x\,y\,z)$, $\Phi_2(x\,y\,z)$, $\Phi_3(x\,y\,z)$.

Insomma porremo

$$\Phi(x\,y\,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos xy + 2xz\cos xz + 2yz\cos yz,$$
$$\Phi_1(x\,y\,z) = x + y\cos xy + z\cos xz,$$
$$\Phi_2(x\,y\,z) = x\cos yx + y + z\cos yz,$$
$$\Phi_3(x\,y\,z) = x\cos zx + y\cos zy + z.$$

Quindi le [1] potranno scriversi

$$\rho\cos xr = \Phi_1(x\,y\,z),\ \rho\cos yr = \Phi_2(x\,y\,z),\ \rho\cos zr = \Phi_3(x\,y\,z),$$

e la [3]

$$\rho^2 = \Phi(x\,y\,z),$$

e la [10]

$$P_1P_2^2 = \Phi(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

Il secondo membro della [8] è una *forma bilineare* di $x\ y\ z$ e $x'\,y'\,z'$. Noi l'indicheremo con $\Phi\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$, cioè porremo

$$\Phi\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$
$$+ (xy' + x'y)\cos xy + (xz' + x'z)\cos xz + (yz' + y'z)\cos yz\,;$$

ed è facile verificare che si ha

$$\Phi\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x & y & z \end{pmatrix},\quad \Phi\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} = \Phi(x\ y\ z),$$

$$\Phi\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = x\Phi_1(x'y'z') + y\Phi_2(x'y'z') + z\Phi_3(x'y'z').$$

Con questo la [8] diviene

$$\rho\rho'\cos rr' = \Phi\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}.$$

Un'altra forma ternaria quadratica che ci occorrerà sovente è

$$\Psi(u\ v\ w) = -\begin{vmatrix} 0 & u & v & w \\ u & 1 & \cos xy & \cos xz \\ v & \cos yx & 1 & \cos yz \\ w & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix},$$

che si sviluppa in

$$\begin{aligned}\Psi(u\ v\ w) = {} & (1 - \cos^2 yz)u^2 + (1 - \cos^2 xz)v^2 + (1 - \cos^2 xy)w^2 \\ & + 2(\cos xz \cos yz - \cos xy)uv + 2(\cos xy \cos zy - \cos xz)uw \\ & + 2(\cos yx \cos zx - \cos yz)vw.\end{aligned}$$

Denotando con $\xi\ \eta\ \zeta$ i piani $yz\ zx\ xy$, e con $x'\ y'\ z'$ le rette normali per O a questi piani, otteniamo (§ 58)

$$\begin{aligned}\Psi(u\ v\ w) &= u^2 \operatorname{sen}^2 yz + v^2 \operatorname{sen}^2 zx + w^2 \operatorname{sen}^2 xy + 2uv \operatorname{sen} yz \operatorname{sen} zx \cos \xi\eta \\ &\quad + 2vw \operatorname{sen} zx \operatorname{sen} xy \cos \eta\zeta + 2wu \operatorname{sen} xy \operatorname{sen} yz \cos \zeta\xi \\ &= u^2 \operatorname{sen}^2 yz + \ldots + 2uv \operatorname{sen} yz \operatorname{sen} zx \cos x'y' + \ldots\end{aligned}$$

Indicheremo con $\Psi_1(u\ v\ w)$, $\Psi_2(u\ v\ w)$, $\Psi_3(u\ v\ w)$ le semiderivate parziali della $\Psi(u\ v\ w)$ rispetto a $u\ v\ w$.

E considereremo anche la forma bilineare

$$\Psi\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & u' & v' & w' \\ u & 1 & \cos xy & \cos xz \\ v & \cos yx & 1 & \cos yz \\ w & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= (1 - \cos^2 yz)uu' + \ldots + (\cos xz \cos yz - \cos xy)(uv' + u'v) + \ldots \\ &= uu' \operatorname{sen}^2 yz + \ldots + (uv' + u'v) \operatorname{sen} yz \operatorname{sen} zx \cos \xi\eta + \ldots \\ &= uu' \operatorname{sen}^2 yz + \ldots + (uv' + u'v) \operatorname{sen} yz \operatorname{sen} zx \cos x'y' + \ldots;\end{aligned}$$

per la quale si verifica similmente che

$$\Psi\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix} = \Psi\begin{pmatrix} u' & v' & w' \\ u & v & w \end{pmatrix}, \quad \Psi\begin{pmatrix} u & v & w \\ u & v & w \end{pmatrix} = \Psi(u\ v\ w),$$

$$\Psi\begin{pmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{pmatrix} = u\Psi_1(u'v'w') + v\Psi_2(u'v'w') + w\Psi_3(u'v'w').$$

Con l'aiuto di queste notazioni, la [4] diviene.

$$\Psi(\cos rx\ \cos ry\ \cos rz) = \operatorname{sen}^2 xyz,$$

e la [7]

$$\cos rr' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 xyz}\,\Psi\begin{pmatrix}\cos rx & \cos ry & \cos rz\\ \cos r'x & \cos r'y & \cos r'z\end{pmatrix};$$

e le [5] si riducono a

$$\frac{x}{\Psi_1(\cos rx\ \cos ry\ \cos rz)} = \frac{y}{\Psi_2(\cos rx\ \cos ry\ \cos rz)} = \frac{z}{\Psi_3(\cos rx\ \cos ry\ \cos rz)}$$
$$= \frac{\rho}{\operatorname{sen}^2 xyz}.$$

Esercizio 1. Si ha

$$x\cos xx' = \rho\cos rx',\ y\cos yy' = \rho\cos ry',\ z\cos zz' = \rho\cos rz';$$

onde

$$x : y : z : \rho = \frac{\cos rx'}{\cos xx'} : \frac{\cos ry'}{\cos yy'} : \frac{\cos rz'}{\cos zz'} : 1$$
$$= \operatorname{sen} ryz : \operatorname{sen} rzx : \operatorname{sen} rxy : \operatorname{sen} xyz$$
$$= \frac{\operatorname{sen} r\xi}{\operatorname{sen} x\xi} : \frac{\operatorname{sen} r\eta}{\operatorname{sen} y\eta} : \frac{\operatorname{sen} r\zeta}{\operatorname{sen} z\zeta} : 1.$$

Es. 2. Se si pone

$$\Phi'(x\ y\ z) = x^2 + \ldots + 2xy\cos' x'y' + \ldots = x^2 + \ldots + 2xy\cos\xi\eta + \ldots,\ \text{ecc.},$$

la relazione [4] può scriversi

$$\Phi'(\cos rx\ \operatorname{sen} yz,\ \cos ry\ \operatorname{sen} zx,\ \cos rz\ \operatorname{sen} xy) = \operatorname{sen}^2 xyz,$$

e la [7]

$$\operatorname{sen}^2 xyz\cos rr' = \Phi'\begin{pmatrix}\cos rx\ \operatorname{sen} yz, & \cos ry\ \operatorname{sen} zx, & \cos rz\ \operatorname{sen} xy\\ \cos r'x\ \operatorname{sen} yz, & \cos r'y\ \operatorname{sen} zx, & \cos r'z\ \operatorname{sen} xy\end{pmatrix}.$$

Es. 3. Nel piano punteggiato e in coordinate cartesiane, si presentano due forme quadratiche analoghe alle due qui introdotte, cioè

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega,\ -\begin{vmatrix}0 & u & v\\ u & 1 & \cos\omega\\ v & \cos\omega & 1\end{vmatrix} = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega.$$

Il lettore ne faccia applicazione, con la scorta del § 30.

Es. 4. Per due coppie di punti nello spazio PP' e QQ', si ha (*Carnot*)

$$2PP'.QQ'\cos(PP', QQ') = \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & PQ^2 & PQ'^2\\ 1 & P'Q^2 & P'Q'^2\end{vmatrix}.$$

Area del triangolo.

§ 66. Siano $P_1(x_1\ y_1\ z_1)$, $P_2(x_2\ y_2\ z_2)$, $P_3(x_3\ y_3\ z_3)$ i vertici di un triangolo. Projettiamoli secondo x sul piano yz in $D_1\ D_2\ D_3$. Se x' y' z' sono le normali per O ai piani yz zx xy, è evidente che i due triangoli $D_1D_2D_3$ $P_1P_2P_3$ hanno la stessa projezione secondo x sul piano y'z', cioè la stessa projezione normale su y'z'; onde questa projezione è espressa (§ 54) così da $D_1D_2D_3\cos xx'$ come da $P_1P_2P_3\cos xr$, se r è la normale al piano $P_1P_2P_3$; e quindi

$$D_1D_2D_3\cos xx' = P_1P_2P_3\cos xr.$$

Ma nel piano yz le coordinate dei vertici del triangolo $D_1D_2D_3$ essendo $(y_1\ z_1)$, $(y_2\ z_2)$, $(y_3\ z_3)$, possiamo applicare la formola del triangolo nel piano punteggiato, ed abbiamo

$$D_1D_2D_3 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} yz \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(y_1 z_2 1)\operatorname{sen} yz \text{ (per brevità)};$$

sarà dunque

$$(y_1 z_2 1)\operatorname{sen} yz \cos xx' = 2P_1P_2P_3 \cos xr;$$

e ricordando (§ 58) che $\operatorname{sen} yz \cos xx' = \operatorname{sen} xyz$,

$$2P_1P_2P_3 \cos xr = (y_1 z_2 1) \operatorname{sen} xyz;$$

e per analogia

$$2P_1P_2P_3 \cos yr = (z_1 x_2 1) \operatorname{sen} xyz,\quad 2P_1P_2P_3 \cos zr = (x_1 y_2 1) \operatorname{sen} xyz.$$

Sostituendo queste espressioni di $2P_1P_2P_3\cos xr$, $2P_1P_2P_3\cos yr$, $2P_1P_2P_3\cos zr$ nel determinante [4]-§ 64, dopo averne moltiplicata la 1ª orizzontale e la 1ª verticale per $\frac{2P_1P_2P_3}{\operatorname{sen} xyz}$, otteniamo

$$\begin{vmatrix} \frac{4(P_1P_2P_3)^2}{\operatorname{sen}^2 xyz} & (y_1\ z_2\ 1) & (z_1\ x_2\ 1) & (x_1\ y_2\ 1) \\ (y_1\ z_2\ 1) & 1 & \cos xy & \cos xz \\ (z_1\ x_2\ 1) & \cos yx & 1 & \cos yz \\ (x_1\ y_2\ 1) & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ed estraendo il 1° elemento da questo determinante, troviamo

$$4(P_1P_2P_3)^2 = -\begin{vmatrix} 0 & (y_1\ z_2\ 1) & (z_1\ x_2\ 1) & (x_1\ y_2\ 1) \\ (y_1\ z_2\ 1) & 1 & \cos xy & \cos xz \\ (z_1\ x_2\ 1) & \cos yx & 1 & \cos yz \\ (x_1\ y_2\ 1) & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix},$$

dalla quale equazione si ricava l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ espressa mediante le coordinate de' vertici.

Può scriversi anche (§ 65)

$$4(P_1P_2P_3)^2 = \psi\Big((y_1\ z_2\ 1)\quad (z_1\ x_2\ 1)\quad (x_1\ y_2\ 1)\Big).$$

Nell'ipotesi di coordinate ortogonali, si ha immediatamente

$$\begin{aligned} P_1P_2P_3\cos xr &= D_1D_2D_3 = \tfrac{1}{2}(y_1\ z_2\ 1), \\ P_1P_2P_3\cos yr &= \tfrac{1}{2}(z_1\ x_2\ 1), \\ P_1P_2P_3\cos zr &= \tfrac{1}{2}(x_1\ y_2\ 1); \end{aligned}$$

quadrando e sommando queste tre eguaglianze, e ricordando che

$$\cos^2 xr + \cos^2 yr + \cos^2 zr = 1,$$

troviamo

$$4(P_1P_2P_3)^2 = (y_1\ z_2\ 1)^2 + (z_1\ x_2\ 1)^2 + (x_1\ y_2\ 1)^2.$$

Si noti l'analogia fra la formola che nello spazio punteggiato esprime l'area del triangolo mediante le coordinate cartesiane dei vertici, e la formola che nel piano (od anche nello spazio) punteggiato esprime la distanza di due punti mediante le coordinate cartesiane dei due punti.

Esercizio. Se $Q_1\ (x\ y\ z)$, $Q_2\ (x'\ y'\ z')$, $Q_3\ (x''\ y''\ z'')$ sono i vertici di un altro triangolo, si trova analogamente, scrivendo $(y\ z'\ 1)$ in luogo di $\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y' & z' & 1 \\ y'' & z'' & 1 \end{vmatrix}$, ecc.:

$$4\ P_1P_2P_3.\ Q_1Q_2Q_3 \cos(P_1P_2P_3,\ Q_1Q_2Q_3) = \psi\begin{pmatrix} (y_1z_2 1) & (z_1x_2 1) & (x_1y_2 1) \\ (yz'1) & (zx'1) & (xy'1) \end{pmatrix}.$$

Per assi ortogonali

$$4\,P_1P_2P_3 \,.\, Q_1Q_2Q_3 \cos(P_1P_2P_3,\ Q_1Q_2Q_3)$$
$$= (y_1z_2 1)\,(yz'1) + (z_1x_2 1)\,(zx'1) + (x_1y_2 1)\,(xy'1).$$

Poichè $(x_1y_2 1) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}, \ldots,$ il 2° membro di quest'ultima relazione si trasforma in

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x - x'' & y - y'' & z - z'' \\ x' - x'' & y' - y'' & z' - z'' \end{vmatrix},$$

e moltiplicando per orizzontali diviene

$$\begin{vmatrix} P_1P_3 . Q_1Q_3 \cos(P_1P_3,\ Q_1Q_3) & P_2P_3 . Q_1Q_3 \cos(P_2P_3,\ Q_1Q_3) \\ P_1P_3 . Q_2Q_3 \cos(P_1P_3,\ Q_2Q_3) & P_2P_3 . Q_2Q_3 \cos(P_2P_3,\ Q_2Q_3) \end{vmatrix},$$

e quindi (§ 65, Es. 4)

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} P_1Q_3^2 + P_3Q_1^2 - P_1Q_1^2 - P_3Q_3^2 & P_2Q_3^2 + P_3Q_1^2 - P_2Q_1^2 - P_3Q_3^2 \\ P_1Q_3^2 + P_3Q_2^2 - P_1Q_2^2 - P_3Q_3^2 & P_2Q_3^2 + P_3Q_2^2 - P_3Q_3^2 - P_2Q_2^2 \end{vmatrix};$$

dunque finalmente (*Bellavitis, Staudt, Sylvester*)

$$16\, P_1P_2P_3 \,.\, Q_1Q_2Q_3 \cos(P_1P_2P_3,\ Q_1Q_2Q_3) = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & P_1Q_1^2 & P_1Q_2^2 & P_1Q_3^2 \\ 1 & P_2Q_1^2 & P_2Q_2^2 & P_2Q_3^2 \\ 1 & P_3Q_1^2 & P_3Q_2^2 & P_3Q_3^2 \end{vmatrix}.$$

Volume del tetraedro.

§ 67. Siano **A B C D** i vertici di un tetraedro, e indichi **ABCD** il numero che misura il volume del tetraedro rispetto a una certa unità di volume. Per un osservatore disposto lungo lo spigolo **AB** col capo in **A** e i piedi verso **B**, la direzione **CD** potrà apparire destrorsa e sinistrorsa; e noi nel primo caso assumeremo il numero **ABCD** positivo, nel secondo negativo (o viceversa). Da questa convenzione segue immediatamente

$$\mathbf{ABCD} = -\,\mathbf{ABDC} = -\,\mathbf{BACD} = \mathbf{BADC},$$

e

$$\mathbf{ABCD} = \mathbf{ACDB} = \mathbf{ADBC};$$

ond'è chiaro che a quelle 12 permutazioni di **A B C D** che sono della classe di **ABCD** corrisponde uno stesso segno, e alle 12 permutazioni dell'altra classe corrisponde il segno opposto.

Questa convenzione mostra che, se un vertice passa da una all'altra banda del piano della faccia opposta, il segno del volume muta; e se il perimetro di una faccia si percorre in verso opposto, ancora il segno muta. Quindi nell'applicare il teorema « la misura del tetraedro è la terza parte del prodotto delle misure di una faccia e dell'altezza corrispondente », noi dobbiamo dare ai due fattori il segno che loro compete, per poter poi porre in relazione, quando occorra, varî tetraedri.

Siano **S A B C** i vertici di un tetraedro, **a b c** le rette cui appartengono gli spigoli **SA SB SC**, e **a' b' c'** le normali per **S** ai piani **bc ca ab**, giusta le convenzioni del § 58.

Il volume del tetraedro **SABC** è la terza parte del prodotto dell'area del triangolo **SAB** per la distanza fra **C** e il piano **SAB**; ora quell'area vale $\frac{1}{2}$**SA.SB** sen**ab**, e quella distanza vale **SC** cos**cc'**; dunque

$$\mathbf{SABC} = \tfrac{1}{6}\,\mathbf{SA.SB.SC}\ \mathrm{sen}\mathbf{ab}\ \mathrm{cos}\mathbf{cc'}.$$

Analogamente

$$\mathbf{SBCA} = \tfrac{1}{6}\,\mathbf{SB.SC.SA}\ \mathrm{sen}\mathbf{bc}\ \mathrm{cos}\mathbf{aa'},$$

$$\mathbf{SCAB} = \tfrac{1}{6}\,\mathbf{SC.SA.SB}\ \mathrm{sen}\mathbf{ca}\ \mathrm{cos}\mathbf{bb'}.$$

Ma **SABC** = **SBCA** = **SCAB**; quindi rimane dimostrata altrimenti la proposizione:

$$\mathrm{sen}\mathbf{ab}\ \mathrm{cos}\mathbf{cc'} = \mathrm{sen}\mathbf{bc}\ \mathrm{cos}\mathbf{aa'} = \mathrm{sen}\mathbf{ca}\ \mathrm{cos}\mathbf{bb'},$$

già data nel § 58. La presente dimostrazione ha il vantaggio di tener conto anche dei segni dei seni e coseni che figurano nell'enunciato.

La medesima proposizione, applicata al triedro **a'b'c'**, porge

$$\mathrm{sen}\mathbf{a'b'}\ \mathrm{cos}\mathbf{c'c} = \mathrm{sen}\mathbf{b'c'}\ \mathrm{cos}\mathbf{a'a} = \mathrm{sen}\mathbf{c'a'}\ \mathrm{cos}\mathbf{b'b};$$

e quindi dividendo membro a membro risulta

$$\frac{\mathrm{sen}\mathbf{ab}}{\mathrm{sen}\mathbf{a'b'}} = \frac{\mathrm{sen}\mathbf{bc}}{\mathrm{sen}\mathbf{b'c'}} = \frac{\mathrm{sen}\mathbf{ca}}{\mathrm{sen}\mathbf{c'a'}},$$

ovvero

$$\frac{\text{sen}\mathbf{ab}}{\text{sen}\alpha\beta} = \frac{\text{sen}\mathbf{bc}}{\text{sen}\beta\gamma} = \frac{\text{sen}\mathbf{ca}}{\text{sen}\gamma\alpha};$$

con che il *teorema dei seni* esposto al § 58 rimane dimostrato anche quando si tien conto dei segni dei varî seni.

Da queste relazioni segue poi

$$\mathbf{SABC} = \tfrac{1}{6}\,\mathbf{SA.SB.SC.sen\,abc}.$$

Cerchiamo ora il volume del tetraedro, date le coordinate dei vertici $\mathbf{P}_1(x_1\,y_1\,z_1)$, $\mathbf{P}_2(x_2\,y_2\,z_2)$, $\mathbf{P}_3(x_3\,y_3\,z_3)$, $\mathbf{P}_4(x_4\,y_4\,z_4)$.

Prendiamo per base del tetraedro il triangolo $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$, e per altezza la distanza fra il vertice $\mathbf{P}_4$ e il piano del triangolo. Questa distanza è la projezione normale del segmento $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_4$ sulla direzione r normale a quel piano, e quindi vale (§ 65)

$$(x_4 - x_1)\cos\mathbf{xr} + (y_4 - y_1)\cos\mathbf{yr} + (z_4 - z_1)\cos\mathbf{zr}.$$

Moltiplicandola per $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$, si ha il triplo del volume del tetraedro; dunque $3\,\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ varrà

$$(x_4 - x_1)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\cos\mathbf{xr} + (y_4 - y_1)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\cos\mathbf{yr} + (z_4 - z_1)\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\cos\mathbf{zr}.$$

Qui sostituendo a $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\cos\mathbf{xr}$,... le loro espressioni trovate nel § 66, risulta $6\,\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ espresso da

$$\text{sen}\mathbf{xyz}\left\{(x_4 - x_1)(y_1 z_2 1) + (y_4 - y_1)(z_1 x_2 1) + (z_4 - z_1)(x_1 y_2 1)\right\},$$

ovvero

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4 = -\tfrac{1}{6}\,\text{sen}\mathbf{xyz}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix},$$

o infine

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4 = -\tfrac{1}{6}\,\text{sen}\mathbf{xyz}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

che è la formola cercata.

Annullando il volume del tetraedro, si ritrova la condizione perchè quattro punti stiano in un piano.

Il volume del tetraedro che ha per vertici l'origine **O** e tre punti $\mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3$ è espresso da

$$\mathbf{OP_1P_2P_3} = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{sen}\,\mathbf{xyz}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Si noti l'analogia della formola che esprime il volume del tetraedro nello spazio punteggiato mediante le coordinate cartesiane dei vertici, con la formola che esprime l'area del triangolo nel piano punteggiato mediante le coordinate cartesiane dei vertici (§ 31), e con la formola che esprime la distanza di due punti in una retta punteggiata mediante le ascisse dei due punti.

Esercizio 1. Per due terne di rette **abc pqr** si ha la relazione (*Staudt*)

$$\mathrm{sen}\,\mathbf{abc}\;\mathrm{sen}\,\mathbf{pqr} = \begin{vmatrix} \cos\mathbf{ap} & \cos\mathbf{aq} & \cos\mathbf{ar} \\ \cos\mathbf{bp} & \cos\mathbf{bq} & \cos\mathbf{br} \\ \cos\mathbf{cp} & \cos\mathbf{cq} & \cos\mathbf{cr} \end{vmatrix}.$$

Si può dimostrare supponendo le sei rette passare per l'origine **O** di tre assi ortogonali **x y z**: allora sen**abc** misura il sestuplo volume del tetraedro che ha un vertice in **O** e gli altri tre vertici sulle **a b c** a distanza 1 da **O**, i quali vertici avranno per coordinate i coseni delle **a b c** con gli assi; sicchè

$$\mathrm{sen}\,\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} \cos\mathbf{ax} & \cos\mathbf{ay} & \cos\mathbf{az} \\ \cos\mathbf{bx} & \cos\mathbf{by} & \cos\mathbf{bz} \\ \cos\mathbf{cx} & \cos\mathbf{cy} & \cos\mathbf{cz} \end{vmatrix},\ \mathrm{sen}\,\mathbf{pqr} = \begin{vmatrix} \cos\mathbf{px} & \cos\mathbf{py} & \cos\mathbf{pz} \\ \cos\mathbf{qx} & \cos\mathbf{qy} & \cos\mathbf{qz} \\ \cos\mathbf{rx} & \cos\mathbf{ry} & \cos\mathbf{rz} \end{vmatrix};$$

moltiplicando, ed osservando che

$$\cos\mathbf{ax}\,\cos\mathbf{px} + \cos\mathbf{ay}\,\cos\mathbf{py} + \cos\mathbf{az}\,\cos\mathbf{pz} = \cos\mathbf{ap},\ \text{ecc.},$$

si ottiene la relazione enunciata.

Es. 2. L'analogo determinante per due quaterne di rette è nullo. Infatti, quel determinante di 4° ordine si può considerare come il prodotto per orizzontali di due matrici a 4 orizzontali e 3 verticali.

Es. 3. Per due tetraedri si ha

$$288.P_1P_2P_3P_4.Q_1Q_2Q_3Q_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & P_1Q_1^2 & P_1Q_2^2 & P_1Q_3^2 & P_1Q_4^2 \\ 1 & P_2Q_1^2 & P_2Q_2^2 & P_2Q_3^2 & P_2Q_4^2 \\ 1 & P_3Q_1^2 & P_3Q_2^2 & P_3P_3^2 & P_3Q_4^2 \\ 1 & P_4Q_1^2 & P_4Q_2^2 & P_4Q_3^2 & P_4Q_4^2 \end{vmatrix}.$$

Si dimostra in modo analogo all'Es. 5 § 31.

In particolare

$$288\,(P_1P_2P_3P_4)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & P_1P_2^2 & P_1P_3^2 & P_1P_4^2 \\ 1 & P_2P_1^2 & 0 & P_2P_3^2 & P_2P_4^2 \\ 1 & P_3P_1^2 & P_3P_2^2 & 0 & P_3P_4^2 \\ 1 & P_4P_1^2 & P_4P_2^2 & P_4P_3^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Es. 4. Il determinante analogo a quest'ultimo, formato per cinque punti dello spazio, è nullo; il che dà una relazione fra i quadrati delle mutue distanze di cinque punti (*Cayley*).

Trasformazione di coordinate.

§ 68. Siano $x\,y\,z$ le coordinate di un punto rispetto a tre assi; e siano $X\,Y\,Z$ le coordinate dello stesso punto rispetto a tre nuovi assi paralleli ai primitivi, e passanti per quel punto che ha per coordinate $a\,b\,c$ rispetto ai primitivi assi. Si ha manifestamente (come al § 32)

$$[1] \qquad x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c\,;$$

e viceversa

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad Z = z - c.$$

Siano invece x y z e X Y Z due terne di assi aventi la stessa origine **0**; e le coordinate di un punto **P** siano $x\ y\ z$ rispetto alla prima terna, $X\ Y\ Z$ rispetto alla seconda. Tracciate le due spezzate **0AFP 0A'F'P**, che hanno i lati misurati rispettivamente dalle coordinate $x\ y\ z$ e $X\ Y\ Z$; sappiamo che le projezioni normali delle due spezzate su una retta qualunque sono eguali. Se x' y' z' sono le normali per **0** ai piani yz zx xy, projettando su esse avremo

$$
[2] \qquad \begin{aligned}
x\cos xx' &= X\cos Xx' + Y\cos Yx' + Z\cos Zx',\\
y\cos yy' &= X\cos Xy' + Y\cos Yy' + Z\cos Zy',\\
z\cos zz' &= X\cos Xz' + Y\cos Yz' + Z\cos Zz';
\end{aligned}
$$

le quali equazioni costituiscono la sostituzione atta ad esprimere $x\ y\ z$ mediante $X\ Y\ Z$ (*).

Che se la 2ª terna di assi qui considerata avesse invece per origine il punto $(a\ b\ c)$, basterebbe nei secondi membri delle [2] aggiungere $a\ b\ c$; come provano le [1].

Le sostituzioni ora trovate pel passaggio da un sistema di coordinate cartesiane ad un altro, sono lineari; e però mediante esse ogni funzione di $x\ y\ z$ si trasforma in una funzione di $X\ Y\ Z$, di forma in generale diversa dalla prima; ma (come al § 32) è chiaro che, se la prima funzione è di un certo grado in $x\ y\ z$, la seconda sarà dello stesso grado in $X\ Y\ Z$.

I nove coefficienti di $X\ Y\ Z$ nelle equazioni [2] non sono indipendenti; poichè i tre coefficienti di X, essendo i coseni degli angoli della retta **X** con le x' y' z', sono legati da una relazione analoga alla [4] § 64 applicata a **X**, e quindi dipendono da due soli parametri indipendenti; e lo stesso dicasi dei tre coefficienti di Y e di quelli di Z. Onde la sostituzione [2] dipende da sei parametri arbitrarî.

(*) Indicando con $\xi\ \eta\ \zeta$ i piani yz zx xy, nelle [2] invece dei coseni si possono introdurre de' seni, essendo $\cos xx' = \operatorname{sen} x\xi$, $\cos Xx' = \operatorname{sen} X\xi$, ecc.

È ovvio il caso che così i primitivi come i nuovi assi siano ortogonali. Allora $x'\,y'\,z'$ coincidono con $x\,y\,z$, e le [2] divengono

$$[3]\qquad \begin{aligned} x &= X\cos Xx + Y\cos Yx + Z\cos Zx,\\ y &= X\cos Xy + Y\cos Yy + Z\cos Zy,\\ z &= X\cos Xz + Y\cos Yz + Z\cos Zz. \end{aligned}$$

Fra i nove coseni che qui entrano passano molte relazioni. Infatti, riferendo ciascuna delle $X\,Y\,Z$ ai tre assi ortogonali $x\,y\,z$, si ha (§ 64)

$$\begin{aligned} \cos^2 Xx + \cos^2 Xy + \cos^2 Xz &= 1,\\ \cos^2 Yx + \cos^2 Yy + \cos^2 Yz &= 1,\\ \cos^2 Zx + \cos^2 Zy + \cos^2 Zz &= 1\,; \end{aligned}$$

ed essendo le $X\,Y\,Z$ mutuamente ortogonali, si ha

$$\begin{aligned} \cos Yx\cos Zx + \cos Yy\cos Zy + \cos Yz\cos Zz &= 0,\\ \cos Zx\cos Xx + \cos Zy\cos Xy + \cos Zz\cos Xz &= 0,\\ \cos Xx\cos Yx + \cos Xy\cos Yy + \cos Xz\cos Yz &= 0. \end{aligned}$$

Del pari, riferendo ciascuna delle $x\,y\,z$ agli assi ortogonali $X\,Y\,Z$, si ha

$$\begin{aligned} \cos^2 xX + \cos^2 xY + \cos^2 xZ &= 1,\\ \cos^2 yX + \cos^2 yY + \cos^2 yZ &= 1,\\ \cos^2 zX + \cos^2 zY + \cos^2 zZ &= 1\,; \end{aligned}$$

ed essendo le $x\,y\,z$ mutuamente ortogonali, si ha

$$\begin{aligned} \cos yX\cos zX + \cos yY\cos zY + \cos yZ\cos zZ &= 0,\\ \cos zX\cos xX + \cos zY\cos xY + \cos zZ\cos xZ &= 0,\\ \cos xX\cos yX + \cos xY\cos yY + \cos xZ\cos yZ &= 0. \end{aligned}$$

È chiaro che, di queste 12 relazioni, le prime 6 esprimono tutte le condizioni imposte e sono indipendenti; mentre le altre sono conseguenza di quelle. Avendosi 6 relazioni indipendenti fra i 9 coseni, la sostituzione [3] dipende solo da 3 parametri.

Esercizio 1. Se l'origine non si cambia e i triedri xyz XYZ sono eguali (congruenti), anche senza essere trirettangoli; allora i piani rispettivamente perpendicolari ai piani degli angoli xX yY zZ lungo le bisettrici di questi angoli hanno comune una retta; intorno alla quale facendo rotare il triedro xyz di un certo angolo,

esso viene a coincidere con XYZ. In questo caso la sostituzione dipende da tre parametri, quali sarebbero gli angoli del piano xy coi due xX yX e l'angolo di xX con XY.

Es. 2. Quando si passa da assi ortogonali ad assi ortogonali con la stessa origine; detta x_1 la retta dei piani xy XY, si possono assumere come parametri della sostituzione i tre angoli $\varphi = xx_1$, $\psi = Xx_1$, $\theta = zZ$. Allora i triedri xXx_1, xYx_1,... forniscono i nove coseni $\cos Xx$, $\cos Yx$,... in funzione di $\varphi\ \psi\ \theta$; e sostituendo, si ottengono le formole di *Eulero:*

$$x = X(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi \cos\psi) + Y(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\psi - \cos\varphi \operatorname{sen}\psi) + Z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi.$$

$$y = X(\cos\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi \cos\psi) + Y(\cos\theta \cos\varphi \cos\psi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi) + Z \operatorname{sen}\theta \cos\varphi,$$

$$z = -X \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi - Y \operatorname{sen}\theta \cos\psi + Z \cos\theta.$$

Alle stesse si perviene passando dagli assi x y z a x_1 y_1 z, essendo nel piano xy y_1 la normale a x_1; poi da questi agli assi x_1 Y_1 Z, essendo Y_1 normale a x_1 nel piano XY; ed infine agli assi X Y Z; pei quali tre passaggi servono le formole del § 32 (prima delle [5]).

Es. 3. La sostituzione [2] trasforma la nota funzione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos xy + 2xz \cos xz + 2yz \cos yz$$

nell'analoga

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY \cos XY + 2XZ \cos XZ + 2YZ \cos YZ.$$

E la sostituzione [3] trasforma

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{in} \quad X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Es. 4. Dicesi *ortogonale* una sostituzione lineare omogenea

$$x = a_1X + b_1Y + c_1Z, \quad y = a_2X + b_2Y + c_2Z, \quad z = a_3X + b_3Y + c_3Z,$$

se trasforma $x^2 + y^2 + z^2$ in $X^2 + Y^2 + Z^2$.

Fra' 9 coefficienti passano molte relazioni. P. es.:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \quad a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0, \quad b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0.$$

Da queste si ricava la sostituzione inversa

$$X = a_1x + a_2y + a_3z, \quad Y = b_1x + b_2y + b_3z, \quad Z = c_1x + c_2y + c_3z;$$

dalla quale si hanno le relazioni analoghe

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \quad a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1,$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0, \quad a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0, \quad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0.$$

Dicendo ξ il modulo della sostituzione, si ha

$$\xi = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm 1,$$

$$b_2c_3 - b_3c_2 = \xi a_1, \ldots.$$

Es. 5. In generale una sostituzione lineare omogenea

$$x_r = a_{r1}y_1 + a_{r2}y_2 + \ldots + a_{rn}ay_n \quad (\text{per } r = 1, 2, \ldots n)$$

dicesi *ortogonale*, se in virtù di essa si ha identicamente

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Allora si hanno le relazioni

$$a_{1r}^2 + a_{2r}^2 + \ldots + a_{nr}^2 = 1, \quad a_{1r}a_{1s} + a_{2r}a_{2s} + \ldots + a_{nr}a_{ns} = 0 \ (s \gtrless r),$$

$$y_r = a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \ldots + a_{nr}x_n,$$

$$a_{r1}^2 + a_{r2}^2 + \ldots + a_{rn}^2 = 1, \quad a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + \ldots + a_{rn}a_{sn} = 0,$$

$$\text{modulo} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \pm 1,$$

$$\begin{vmatrix} a_{r+1,\,r+1} & . & a_{r+1,\,n} \\ . & . & . \\ a_{n,\,r+1} & . & a_{n,\,n} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1r} \\ . & . & . \\ a_{r1} & . & a_{rr} \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

Es. 6. Il determinante o modulo della sostituzione [2] equivale a

$$\frac{\operatorname{sen}\mathbf{XYZ}\ \operatorname{sen}\mathbf{x'y'z'}}{\cos\mathbf{xx'}\ \cos\mathbf{yy'}\ \cos\mathbf{zz'}};$$

e poichè il denominatore equivale a $\operatorname{sen}\mathbf{xyz}\operatorname{sen}\mathbf{x'y'z'}$, il detto modulo si riduce a

$$\frac{\operatorname{sen}\mathbf{XYZ}}{\operatorname{sen}\mathbf{xyz}}.$$

§ 69. Siano **x y z** tre assi ortogonali; e consideriamo il sistema polare che ha l'origine **O** per polo, la **z** per asse, e **xz** per piano polare. Se $x\ y\ z$ e $\rho\ \theta\ \varphi$ sono le coordinate cartesiane e le coordinate polari di uno stesso punto **P** riferito a quei tre assi ed a quel sistema polare, projettando normalmente **OP** sul piano **xy** in **OF**, si ha $\mathbf{OF} = \mathbf{OP}\operatorname{sen}\theta$; e quindi eguagliando le projezioni di **OP** e **OF**

su x e su y, risulta

$$x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi.$$

Proiettando poi **OP** su **z**, si ha

$$z = \rho \cos\theta.$$

Così si esprimono $x\ y\ z$ in $\rho\ \theta\ \varphi$. Viceversa:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Equazioni di luoghi (superficie e linee).

§ **70**. Fra le tre coordinate di un punto dello spazio, p. e. fra le coordinate cartesiane $x\ y\ z$, pongasi una equazione. Ogni coppia di valori reali di x e y individua un punto nel piano **xy**. Supponiamo che, per quelle coppie che individuano punti di una data porzione del piano, l'equazione determini uno o più valori per z, e quindi un punto o un gruppo di punti discreti. Se, variando x e y con continuità, anche i detti valori di z variano con continuità, noi avremo altrettante serie doppie continue di punti, le quali formeranno una o più superficie; e queste costituiranno il *luogo* dei punti, le cui coordinate soddisfanno la data equazione.

Viceversa: se i punti di una o più superficie, e solo essi, verificano una condizione, che possa venir tradotta in una equazione fra le tre coordinate di un punto; questa è l'equazione del luogo di quei punti.

Se nell'equazione non figura una coordinata, p. e. z; allora nel piano **xy** i punti soddisfacenti all'equazione formano una linea; e z essendo libera, tutti i punti di quelle rette che sono parallele all'asse **z** e si appoggiano alla detta linea formeranno il luogo. Questo è dunque un *cilindro*, con le generatrici parallele all'asse **z**.

Se nell'equazione entra una sola coordinata, p. e. x; allora essa determina un gruppo di valori di x, e quindi il luogo si compone di un gruppo di piani paralleli al piano **yz**.

Quando fra le tre coordinate si hanno due equazioni; se ciascuna determina come luogo una superficie, il loro insieme determinerà la linea comune alle due superficie; e questa sarà il luogo dei punti le cui coordinate soddisfanno ad entrambe le equazioni.

Viceversa: se i punti di una linea, ed essi soli, verificano delle condizioni che si possano tradurre in due equazioni fra le coordinate di un punto qualunque della linea, queste due equazioni rappresenteranno analiticamente la linea (*).

Conviene classificare e denominare i luoghi (superficie e linee), a seconda dei caratteri delle loro equazioni in coordinate cartesiane. I primi che si presentano sono i luoghi superficiali rappresentati da equazioni algebriche di 1° 2° 3°... grado, e che perciò si dicono *superficie algebriche di 1° 2° 3°... grado;* nonchè le linee rappresentate da due di tali equazioni.

Tre equazioni fra le tre coordinate determinano in generale una o più terne di valori delle coordinate, e quindi uno o più punti. Questi sono reali, se i valori corrispondenti delle coordinate sono reali; e sono immaginarî, se qualcuna delle coordinate è immaginaria.

Il piano come luogo di 1° grado.

§ **71**. L'equazione generale di 1° grado in coordinate cartesiane è

$$[1] \qquad ax + by + cz + d = 0;$$

ove $a\ b\ c\ d$ sono numeri dati, che supponiamo reali, e che possono in parte annullarsi.

Se c non è zero, per ogni data coppia di valori reali di x e y la equazione individua un valore di z e quindi un punto del luogo.

(*) Può accadere però che una linea non si possa ottenere che come parte della intersezione di due superficie: allora essa non si potrà più rappresentare con due equazioni, ma bensì con tre equazioni di superficie passanti per essa.

Se $P_1(x_1\, y_1\, z_1)$, $P_2(x_2\, y_2\, z_2)$, $P_3(x_3\, y_3\, z_3)$ sono tre di questi punti, si ha

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0,$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0;$$

le quali equazioni e la [1] sono lineari omogenee in $a\, b\, c\, d$ e coesistono per valori non tutti nulli di queste; onde sarà

$$[2] \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora scegliendo nel piano xy i tre punti $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ non in una retta, neanche i tre punti $P_1\, P_2\, P_3$ saranno in una retta; e l'ultima equazione esprimerà la condizione perchè il punto $(x\, y\, z)$ stia nel piano individuato dai tre punti $P_1\, P_2\, P_3$ (§ 62). In altre parole, essa sarà l'equazione del piano per questi tre punti.

Dunque: *il luogo determinato dalla equazione di 1° grado* [1] *è un piano.* E viceversa.

L'asse x ha comune col luogo il punto per cui $y = 0$ e $z = 0$, e quindi $ax + d = 0$, $x = -\frac{d}{a}$; l'asse y il punto $\left(z=0,\, x=0,\, y=-\frac{d}{b}\right)$, e l'asse z il punto $\left(x=0,\, y=0,\, z=-\frac{d}{c}\right)$.

Posto

$$-\frac{d}{a} = p, \qquad -\frac{d}{b} = q, \qquad -\frac{d}{c} = r,$$

onde

$$a = -\frac{d}{p}, \qquad b = -\frac{d}{q}, \qquad c = -\frac{d}{r},$$

la [1] diviene, se d non è zero,

$$[3] \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1\,;$$

ed è l'equazione del piano che determina sugli assi i segmenti $p\, q\, r$.

L'equazione generale [1] non dipende da' quattro coefficienti $a\ b\ c\ d$, ma dai rapporti di tre di essi al rimanente. Quindi un piano può essere assoggettato a condizioni tali, che possano tradursi in non più di tre equazioni fra' rapporti di tre coefficienti al rimanente, ossia in tre equazioni omogenee nei quattro coefficienti.

Il piano avente per equazione la [1] ha comune col piano xy una retta; pei punti della quale $z = 0$, e quindi $ax + by + d = 0$.

E la equazione

$$ax + by + d = 0$$

rappresenta il piano passante per quella retta e parallelo all'asse z, poichè essa non contiene la z (o anche perchè per questa equazione r riesce infinito).

Analogamente per le equazioni $ax + cz + d = 0$, $by + cz + d = 0$.

L'equazione $ax + d = 0$ rappresenta un piano parallelo a yz. E così via.

Se nell'equazione [1] manca il termine noto d, il piano passa per l'origine.

Se un piano passa per un punto dato $(x_1\ y_1\ z_1)$, la sua equazione può ricevere la forma

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0;$$

e variando i coefficienti $a\ b\ c$, o meglio i rapporti di due di essi al rimanente, questa equazione può rappresentare i singoli piani pel punto $(x_1\ y_1\ z_1)$, i quali formano una stella.

Se nella [1] i coefficienti $a\ b\ c$ decrescono indefinitamente mentre d resta finito, i segmenti $p\ q\ r$ crescono indefinitamente, cioè tre (non in linea retta) e quindi tutti i punti del piano vanno a distanza infinita. Ciò si esprime dicendo che, per $a\ b\ c$ nulli, la [1] è l'equazione del piano all'infinito.

Fascio di piani.

§ 72. I punti della retta comune a due piani $\pi\ \pi'$ di equazioni

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

sono quelli le cui coordinate soddisfanno a queste due equazioni. Tali punti soddisfanno anche ad una qualunque combinazione lineare delle due date equazioni, qual è

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

ovvero

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + (\lambda c + \mu c')z + (\lambda d + \mu d') = 0.$$

Qualunque siano λ e μ, questa equazione rappresenta un piano; e variando il rapporto $\lambda : \mu$, può rappresentare i singoli piani del fascio determinato da π e π'.

Per un piano mobile π'' del fascio il corrispondente valore di $\lambda : \mu$ è uguale al rapporto $\operatorname{sen}\pi''\pi' : \operatorname{sen}\pi''\pi$ moltiplicato per un fattore che non varia col variare di π''.

A valori opposti di $\lambda : \mu$ corrispondono due piani del fascio armonici con π e π'.

Per $\lambda = 0$ e $\mu \gtrless 0$, si ha π'. Per $\lambda \gtrless 0$ e $\mu = 0$, si ha π.

Passa per un punto dato $(x'\ y'\ z')$ quel piano del fascio per cui

$$\lambda(ax' + by' + cz' + d) + \mu(a'x' + b'y' + c'z' + d') = 0,$$

e che quindi ha per equazione

$$\frac{ax + by + cz + d}{ax' + by' + cz' + d} = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{a'x' + b'y' + c'z' + d'}.$$

È parallelo all'asse delle x quel piano del fascio per cui

$$a\lambda + a'\mu = 0,$$

ossia il piano

$$[ba']y + [ca']z + [da'] = 0.$$

Similmente sono paralleli agli assi y z i due piani

$$[ab']x + [cb']z + [db'] = 0, \quad [ac']x + [bc']y + [dc'] = 0.$$

I punti comuni a' due piani $\pi\ \pi'$ sono all'infinito, quando nelle ultime tre equazioni sono nulli i coefficienti delle coordinate (poichè solo allora esse rappresentano il piano all'infinito); dunque i due

piani sono paralleli quando si verificano le due condizioni

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

cioè quando i coefficienti delle coordinate nelle loro equazioni sono proporzionali.

Ciò si vede anche osservando che due piani paralleli staccano dagli assi segmenti proporzionali. (Se l'origine è in uno dei due piani, occorre prima portarnela fuori mediante una semplice traslazione degli assi).

Di qui segue che i rapporti di due dei tre coefficienti $a\ b\ c$ al rimanente individuano, non questo piano, ma la sua giacitura; e si possono quindi chiamare le *due coordinate* di quella giacitura. Od anche possiamo assumere $a\ b\ c$ come le *tre coordinate omogenee* della giacitura.

I due piani $\pi\ \pi'$ coincidono quando

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}.$$

Equazioni di una retta.

§ **73.** Le equazioni di due piani π e π', o anche due combinazioni lineari di esse, considerate come coesistenti, sono soddisfatte da tutti e soli i punti di una retta; e quindi sono *le equazioni della retta* come luogo di punti.

In particolare: se una retta è individuata da due punti $(x_1\ y_1\ z_1)$, $(x_2\ y_2\ z_2)$, è chiaro che passano per la retta e sono paralleli agli assi x y z i seguenti piani

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1};$$

e quindi due di queste si possono assumere come equazioni della retta. Scriveremo più brevemente

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Di qui segue che le equazioni di una qualunque retta r pel punto $(x_1\, y_1\, z_1)$ possono ricevere la forma

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n};$$

e variando $l\ m\ n$, o meglio i rapporti di due alla terza, si hanno le singole rette della stella che ha per centro il punto $(x_1\, y_1\, z_1)$.

Se gli assi sono ortogonali, detta ρ la distanza dal punto fisso $(x_1\, y_1\, z_1)$ al punto mobile $(x\, y\, z)$ di r, si ha dalle [5']-§ 64 e dalla osservazione fatta in fine di quel §,

$$\frac{x-x_1}{\cos xr}=\frac{y-y_1}{\cos yr}=\frac{z-z_1}{\cos zr}=\rho;$$

onde, paragonando con le equazioni precedenti, risulta

$$\frac{\cos xr}{l}=\frac{\cos yr}{m}=\frac{\cos zr}{n}=\pm\sqrt{\frac{\cos^2 xr+\cos^2 yr+\cos^2 zr}{l^2+m^2+n^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Se gli assi sono obliqui, si ha invece dalle [5]-§ 64

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix}\cos xr & \cos xy & \cos xz\\ \cos yr & 1 & \cos yz\\ \cos zr & \cos zy & 1\end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{\begin{vmatrix}1 & \cos xr & \cos xz\\ \cos yx & \cos yr & \cos yz\\ \cos zx & \cos zr & 1\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{z-z_1}{\begin{vmatrix}1 & \cos xy & \cos xr\\ \cos yx & 1 & \cos yr\\ \cos zx & \cos zy & \cos zr\end{vmatrix}}=\frac{\rho}{\operatorname{sen}^2 xyz};$$

e quindi $l\ m\ n$ sono proporzionali a questi tre determinanti, che sono lineari e omogenei in $\cos xr$ $\cos yr$ $\cos zr$.

Viceversa: essendo $l\, m\, n$ proporzionali a $x-x_1\ y-y_1\ z-z_1$, si ha dalle [1]-§ 64

$$\cos xr : \cos yr : \cos zr$$

$$= l+m\cos xy+n\cos xz : l\cos yx+m+n\cos yz : l\cos zx+m\cos zy+n.$$

Possiamo scrivere più brevemente, giusta il § 65,

$$l : m : n = \psi_1(\cos xr \cos yr \cos zr) : \psi_2(\cos xr \ldots) : \psi_3(\cos xr \ldots),$$

e

$$\frac{\cos xr}{\Phi_1(l\,m\,n)} = \frac{\cos yr}{\Phi_2(l\,m\,n)} = \frac{\cos zr}{\Phi_3(l\,m\,n)} = \frac{\operatorname{sen} xyz}{\pm\sqrt{\Phi(l\,m\,n)}}.$$

Per un sistema di rette parallele non variano $\cos xr$ $\cos yr$ $\cos zr$; e quindi $l\,m\,n$ mantengono costanti i mutui rapporti. Dunque i rapporti di due dei numeri $l\,m\,n$ al terzo si possono definire come le *due coordinate* di una direzione, e $l\,m\,n$ come le *tre coordinate omogenee* della direzione stessa.

Stella di piani.

§ 74. Tre piani $\Pi\,\Pi'\,\Pi''$ di equazioni

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + \ldots = 0, \quad a''x + \ldots = 0,$$

hanno comune il punto le cui coordinate soddisfanno le tre equazioni, cioè il punto di coordinate

$$x = -\frac{[d\,b'\,c'']}{[a\,b'\,c'']}, \quad y = -\frac{[a\,d'\,c'']}{[a\,b'\,c'']}, \quad z = -\frac{[a\,b'\,d'']}{[a\,b'\,c'']}.$$

Se il denominatore è nullo, cioè se

$$[a\,b'\,c''] = 0;$$

il punto va all'infinito, le tre rette in cui si tagliano i piani a due a due sono parallele, e i tre piani formano la superficie laterale di un prisma.

Se oltre al denominatore sono nulli i numeratori (per il che basta, sotto certe restrizioni, che sia nullo uno di essi); $x\,y\,z$ sono indeterminate, e ogni terna di valori di esse che soddisfi due delle tre

equazioni soddisfa pure la rimanente; e però la retta comune a due piani sta sul rimanente, ossia i tre piani appartengono a un fascio. Il criterio analitico, perchè i tre piani $\Pi\,\Pi'\,\Pi''$ appartengano a un fascio, consiste dunque nell'annullarsi del determinante $[a\,b'\,c'']$ e di un altro determinante di 3° ordine della matrice (*)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix},$$

e quindi degli altri due.

Del resto, lo stesso risulta dall'osservare che, nel caso in cui i tre piani formino fascio, l'equazione di uno di essi deve ridursi ad una combinazione lineare di quelle degli altri due.

Caso più particolare ancora è quello, in cui ogni terna di valori di $x\,y\,z$ soddisfacente una delle tre equazioni soddisfa le altre due. Allora i tre piani coincidono, e i coefficienti omologhi delle tre equazioni sono proporzionali.

Se i tre piani $\Pi\,\Pi'\,\Pi''$ hanno un sol punto comune, è chiaro che una combinazione lineare delle loro equazioni, cioè

$$\lambda(ax+\ldots)+\mu(a'x+\ldots)+\nu(a''x+\ldots)=0,$$

rappresenta un piano che passa pel punto comune ai tre dati piani; e, variando i due rapporti $\lambda:\nu$, $\mu:\nu$, può rappresentare i singoli piani della stella.

Fra questi si può cercare: quello che passa per una retta individuata sia da due punti sia da due piani; quello che è parallelo a un piano dato, ecc.

§ **75**. Quattro piani $\Pi\,\Pi'\,\Pi''\,\Pi'''$, le cui equazioni siano

$$ax+\ldots=0,\quad a'x+\ldots=0,\quad a''x+\ldots=0,\quad a'''x+\ldots=0,$$

(*) Se il determinante che si annulla insieme con $[a\,b'\,c'']$ è p. e. $[a\,b'\,d'']$, ci vuole questa restrizione: che non siano nulli i determinanti di 2° ordine della matrice $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix}$, dal che seguirebbe che $[a\,b'\,c'']$ e $[a\,b'\,d'']$ sono nulli, ma non $[a\,c'\,d'']$ e $[b\,c'\,d'']$ in generale.

non appartengono ad una stella, ossia non hanno un punto comune, se non quando si verifica la condizione

$$[a\, b'\, c''\, d''']=0.$$

Se i quattro piani non appartengono a una stella, una combinazione lineare delle loro equazioni, cioè

$$\lambda(ax+\ldots)+\mu(a'x+\ldots)+\nu(a''x+\ldots)+\pi(a'''x+\ldots)=0,$$

al variare dei rapporti di tre delle quantità $\lambda\ \mu\ \nu\ \pi$ alla rimanente, può rappresentare tutti i piani dello spazio. Poichè, ordinata quest'equazione rispetto a $x\ y\ z$, noi possiamo identificarla con quella di un piano arbitrario $a_1x+\ldots=0$, stabilendo le seguenti proporzioni

$$\frac{a\lambda+a'\mu+a''\nu+a'''\pi}{a_1}=\frac{b\lambda+b'\mu+b''\nu+b'''\pi}{b_1}$$
$$=\frac{c\lambda+c'\mu+c''\nu+c'''\pi}{c_1}=\frac{d\lambda+d'\mu+d''\nu+d'''\pi}{d_1};$$

le quali si riducono a tre equazioni lineari nei tre rapporti suddetti, e servono quindi a determinarli.

Equazione normale del piano.

§ 76. Sulla normale n condotta per l'origine O ad un piano π scegliamo la direzione positiva da O verso il piano; e chiamiamo $\alpha\ \beta\ \gamma$ gli angoli di tale direzione con gli assi, ρ la distanza ON fra l'origine e il piano. Indicando con $p\ q\ r$ i segmenti che il piano stacca dai tre assi, avremo $\rho=p\cos\alpha$, $\rho=q\cos\beta$, $\rho=r\cos\gamma$, ovvero

$$\frac{1}{p}=\frac{\cos\alpha}{\rho},\quad \frac{1}{q}=\frac{\cos\beta}{\rho},\quad \frac{1}{r}=\frac{\cos\gamma}{\rho};$$

onde l'equazione del piano, che è (§ 71)

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

diverrà

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0.$$

Questa dicesi l'equazione *normale* del piano.

Fra $\cos\alpha$ $\cos\beta$ $\cos\gamma$ passa la nota relazione (§ 64)

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos\beta & \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos\gamma & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(per assi ortogonali $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$).

L'equazione generale di un piano

$$ax + by + cz + d = 0$$

deve potersi ridurre a forma normale, moltiplicandola per un fattore σ da determinarsi; avremo quindi le equazioni

$$\cos\alpha = a\sigma, \quad \cos\beta = b\sigma, \quad \cos\gamma = c\sigma, \quad \rho = -d\sigma.$$

Sostituiamo queste espressioni dei coseni nella citata relazione fra essi: dividendo la 1ª orizzontale e la 1ª verticale del determinante per σ, avremo

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & a & b & c \\ a & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b & \cos yx & 1 & \cos yz \\ c & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\operatorname{sen}^2 xyz}{\sigma^2} + \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b & \cos yx & 1 & \cos yz \\ c & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

onde

$$\sigma = \frac{\operatorname{sen} xyz}{\mp \left\{ - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b & \cos yx & 1 & \cos yz \\ c & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Il segno $\mp$ posto innanzi alla radice quadrata aritmetica è contrario al segno $\pm$ di d (poichè ρ e $\operatorname{sen} xyz$ sono positivi per ipotesi, e quindi il prodotto $-d\sigma = \rho$ è positivo).

Trovato così σ, son noti immediatamente $\cos\alpha$ $\cos\beta$ $\cos\gamma$ e ρ.

Adottando la notazione del § 65, può scriversi più brevemente

$$\sigma = \frac{\operatorname{sen} xyz}{\mp \sqrt{\Psi(a\,b\,c)}}.$$

Per assi ortogonali si ha

$$\sigma = \frac{1}{\mp \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distanza fra punto e piano.

§ **77**. Cerchiamo l'espressione della distanza $P\Pi$ fra un dato punto P $(x\ y\ z)$ e un dato piano Π, pel quale $\alpha\ \beta\ \gamma\ \rho$ abbiano il significato di dianzi.

Sia M la projezione normale di P su Π. La spezzata $OAFP$ delle coordinate di P e la spezzata $ONMP$ hanno projezioni normali eguali su r; quindi

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \rho + 0 + MP = \rho + \Pi P,$$

onde

$$\Pi P = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \rho.$$

Questa è la formola cercata.

Supponendo che P cada in Π, ossia $\Pi P = 0$, si ritrova l'equazione normale del piano (con un metodo che non esclude più il caso in cui Π passi per l'origine).

Se poi l'equazione del piano π è data nella forma generale $ax + \ldots = 0$; conservando a σ lo stesso significato che nel § prec., avremo

$$P\pi = -\sigma(ax + by + cz + d).$$

Angolo di due piani.

§ 78. L'angolo di due piani $\pi\,\pi'$, le cui equazioni normali siano

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0,\ x\cos\alpha' + \ldots - \rho' = 0,$$

equivale a quello delle loro normali $r\,r'$; e però è dato dalla formola

$$\cos\pi\pi' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 xyz}\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos\beta' & \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos\gamma' & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\psi\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{pmatrix}}{\operatorname{sen}^2 xyz}.$$

Quindi, se le equazioni date dei due piani sono

$$ax + by + cz + d = 0,\quad a'x + b'y + c'z + d' = 0;$$

chiamando σ' la funzione di $a'\,b'\,c'$ analoga alla funzione σ di $a\,b\,c$, e sostituendo a $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, $\cos\alpha'\cos\beta'\cos\gamma'$ le espressioni trovate nel § 76 e le analoghe, si ottiene

$$\cos\pi\pi' = -\frac{\sigma\sigma'}{\operatorname{sen}^2 xyz}\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b' & \cos yx & 1 & \cos xz \\ c' & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sigma\sigma'\psi\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}}{\operatorname{sen}^2 xyz};$$

ossia

$$\cos\Pi\Pi' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b' & \cos yx & 1 & \cos yz \\ c' & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix}}{\pm\left\{\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b & \cos yx & 1 & \cos yz \\ c & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a' & b' & c' \\ a' & 1 & \cos xy & \cos xz \\ b' & \cos yz & 1 & \cos yz \\ c' & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

e più brevemente

$$\cos\Pi\Pi' = \frac{\psi\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}}{\pm\sqrt{\psi(a\,b\,c).\psi(a'\,b'\,c')}}.$$

I due piani sono ortogonali se il numeratore è nullo, cioè se

$$\psi\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0.$$

Per assi ortogonali si ha

$$\cos\Pi\Pi' = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}};$$

ed anche, giusta la [9]-§ 64,

$$\operatorname{sen}^2\Pi\Pi' = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

La condizione di ortogonalità è allora

$$aa' + bb' + cc' = 0;$$

e l'espressione di $\operatorname{sen}^2 \pi\pi'$ ci mostra che la condizione di parallelismo dei due piani è

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2 = 0,$$

onde

$$a : b : c = a' : b' : c',$$

come già avevamo trovato (§ 72).

Esercizio 1. Equazione del piano pei centri di tre stelle, ovvero pel centro di una stella e per l'asse di un fascio.

Es. 2. Formola della distanza fra due piani paralleli.

Es. 3. Tra i piani di un fascio determinare quello che è perpendicolare a un dato piano.

Es. 4. Tra i piani di un fascio determinare quello che è parallelo a una retta data.

Es. 5. Tra i piani di una stella determinare quello che è perpendicolare a una data retta.

Es. 6. Estendere allo spazio la *notazione abbreviata* esposta al § 41.

Es. 7. Determinare gli angoli di un piano $ax + by + cz + d = 0$ con i piani coordinati.

Es. 8. Il volume del tetraedro di quattro piani $a_1x + \ldots = 0, \ldots, a_4x + \ldots = 0$ è

$$\tfrac{1}{6}\operatorname{sen}\mathbf{xyz} \cdot \frac{[a_1b_2c_3d_4]^3}{[a_2b_3c_4][a_1b_3c_4][a_1b_2c_4][a_1b_2c_3]}.$$

Es. 9. Le equazioni di una retta si possono sempre ridurre alla forma

$$x = lz + p, \; y = mz + q.$$

Significato geometrico di $l\, m\, p\, q$.

Es. 10. Equazioni della perpendicolare da un dato punto a un dato piano.

Es. 11. Equazioni della perpendicolare da un dato punto a una data retta.

Es. 12. Equazione della sfera, come luogo dei punti aventi una distanza assegnata da un punto fisso. È di 2° grado.

Es. 13. Estendere allo spazio i luoghi considerati negli Esercizi che seguono il § 45.

Es. 14. Luogo dei punti, le cui distanze da tre punti fissi siano proporzionali a dati numeri (o eguali fra loro). È un circolo (o risp. una retta).

Es. 15. Luogo dei punti, le cui distanze da un punto e un piano fissi siano in dato rapporto (o eguali).

Es. 16. Luogo dei punti, le cui distanze da due piani fissi siano in dato rapporto (o eguali).

Spazî omografici.

§ 79. Si considerino due spazî punteggiati (S), (S′) (*). Riferendoli a due date terne di assi cartesiani, siano $x\,y\,z$ le coordinate di un punto **P** di (S), $x'\,y'\,z'$ quelle di un punto **P′** di (S′); e si suppongano queste coordinate legate dalle equazioni

$$[1] \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{ax + by + cz + d}, \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{ax + by + cz + d}, \\ z' &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{ax + by + cz + d}, \end{aligned}$$

in cui i coefficienti non mutino variando **P** o **P′**. Queste equazioni sono analoghe alle già trattate (§ 46 e seg.) per due piani omografici. Esse stabiliscono tra i punti **P** e **P′** dei due spazî una corrispondenza, di cui si ottengono le seguenti proprietà, procedendo appunto come per due piani punteggiati.

Se nel determinante $[ab_1c_2d_3]$, supposto non nullo, s'indicano con $A\,B \ldots A_1 \ldots$ i suddeterminanti complementari di $a\,b \ldots a_1 \ldots$; sarà viceversa

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_1x' + A_2y' + A_3z' + A}{D_1x' + D_2y' + D_3z' + D}, \\ y &= \frac{B_1x' + B_2y' + B_3z' + B}{D_1x' + D_2y' + D_3z' + D}, \\ z &= \frac{C_1x' + C_2y' + C_3z' + C}{D_1x' + D_2y' + D_3z' + D}. \end{aligned}$$

(*) L'uomo può concepire rette e piani e stelle differenti; ma, come essere a tre dimensioni, non può concepire due spazî (a tre dimensioni) indefiniti e differenti, i suoi sensi dandogli il concetto di un unico spazio. Tuttavia, quando si considerano nello spazio due o più diverse figure, e se ne studiano quelle mutue relazioni che non dipendono dalla loro reciproca posizione, si trova spesso conveniente di parlare di due o più spazî in cui esse siano contenute, astraendo dal fatto che questi spazî coincidono.

La corrispondenza tra i punti **P** e **P'** è univoca.

Ai punti **P** di un piano di (S) corrispondono in (S') i punti **P** di un piano; ai punti **P** comuni a due piani, cioè appartenenti a una retta, corrispondono i punti **P'** di una retta; a piani o rette di un fascio o di una stella nell'uno spazio corrispondono piani o rette di un fascio o di una stella nell'altro spazio. Due quaterne di punti corrispondenti di due punteggiate corrispondenti hanno egual doppio rapporto, come anche due quaterne di rette o di piani corrispondenti di due fasci corrispondenti. Insomma: ciascuna forma di 1ª o 2ª specie contenuta nell'uno spazio è omografica alla forma corrispondente nell'altro spazio.

Dati nell'uno spazio cinque punti di cui non quattro in un piano, e nell'altro scelti come corrispondenti cinque punti di cui non quattro in un piano; posto inoltre che ad ogni punteggiata corrisponda una punteggiata omografica; la corrispondenza tra i due spazî godrà di tutte le proprietà testè accennate, e sarà rappresentata analiticamente da tre equazioni del tipo delle [1] ed affatto determinate tra le coordinate di due punti corrispondenti. I due spazî si diranno *omografici* o *collineari*, od anche *projettivi*.

A una superficie di grado n corrisponderà punto per punto una superficie di grado n, ecc.

Poichè i due spazî omografici sono di lor natura sovrapposti, si possono sempre cercare quei punti che coincidono coi loro corrispondenti, cioè i punti *uniti*. Supponendo i punti dei due spazî riferiti a una stessa terna di assi, un punto $(x\,y\,z)$ sarà punto unito, se verificherà le equazioni [1] in cui in luogo di $x'\,y'\,z'$ si ponga $x\,y\,z$, cioè se verificherà le equazioni

$$[2]\qquad \begin{aligned} tx &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1,\\ ty &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2,\\ tz &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3,\\ t &= ax + by + cz + d. \end{aligned}$$

Queste quattro equazioni lineari in $x\,y\,z$ dànno

$$[3]\qquad \begin{vmatrix} a_1 - t & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 - t & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 - t & d_3\\ a & b & c & d - t \end{vmatrix} = 0;$$

equazione di 4° grado in t, dalla quale si ricaveranno in generale quattro valori per t, ciascuno dei quali, sostituito in tre delle dette equazioni lineari, farà sì che la loro risoluzione dia le coordinate di un punto unito. Vi sono dunque in generale quattro punti uniti.

I piani che li congiungono a tre a tre saranno i quattro piani uniti.

Esercizio 1. Se l'equazione [3] ha una radice doppia o tripla o quadrupla, accadrà in generale che due o tre o quattro punti uniti vengano a coincidere.

Es. 2. Però se vi è un valore di t per cui s'annulli non solo il determinante [3], ma anche i suoi suddeterminanti di 3° ordine (e non tutti quelli del 2° ordine); allora, sostituendo quel valore nelle [2], esse si ridurranno non più a tre, ma a due sole equazioni lineari indipendenti in $x\ y\ z$; e queste equazioni individueranno così una retta r tutta composta di punti uniti. Quel valore di t sarà radice doppia della [3]; le altre due radici corrisponderanno a due punti uniti non posti su r. Dicendo s la retta congiungente questi due punti, è chiaro che tutti i piani passanti per s si potranno riguardare come congiungenti tre punti uniti, e quindi sasanno piani uniti. Ne segue che l'omografia godrà di questa proprietà particolare: che la congiungente di due punti corrispondenti qualunque taglia una retta fissa s.

Es. 3. Se vi sono due valori di t che annullino tutti i suddeterminanti di 3° ordine del determinante [3], essi saranno radici doppie di quell'equazione; e sostituiti in due delle equazioni lineari [2], determineranno due rette r s, ciascuna delle quali conterrà infiniti punti uniti e sarà l'intersezione di infiniti piani uniti. La corrispondenza omografica sarà in tal caso determinata dalle condizioni: che la congiungente due punti corrispondenti qualunque tagli r e s, e che i due punti d'incontro formino con quelli un doppio rapporto fisso.

Es. 4. Se vi è un valore di t che annulli tutti i suddeterminanti di 2° ordine del determinante [3] (e quindi anche quelli di 3° ordine), esso sarà radice tripla dell'equazione [3]; e sostituito nelle equazioni lineari [2], le ridurrà tutte equivalenti ad una sola di esse, la quale rappresenterà dunque un piano γ tutto composto di punti uniti. All'altra radice della [3] corrisponderà un altro punto unito C posto fuori di quel piano; ed è chiaro che tutti i piani passanti per C saranno piani uniti. L'omografia sarà determinata dalle condizioni: che i piani corrispondenti si taglino su γ, e che le coppie di punti corrispondenti stiano in linee rette passanti per C; e quindi che il doppio rapporto di due punti corrispondenti qualunque con C e col punto in cui la loro congiungente incontra γ, abbia un valore costante dato.

Questo caso particolare assai importante dell'omografia dicesi *omologia*: C dicesi *centro* e γ *piano* d'omologia.

Es. 5. Se in un'omologia il piano d'omologia è all'infinito, i piani corrispondenti sono paralleli, e la corrispondenza è definita da ciò: che due punti corrispondenti qualunque sono in linea retta con un centro fisso, ed hanno da questo distanze le quali serbano un rapporto fisso dato. Tale corrispondenza dicesi *omotetia*. È chiaro che il rapporto delle lunghezze di due segmenti corrispondenti qualunque è pure costante ed uguale al detto dato rapporto.

Due figure omotetiche sono simili e similmente disposte. Quando il rapporto fisso vale —1, esse si riducono a due figure *simmetriche* rispetto a un centro.

Es. 6. Se in un'omologia il centro va all'infinito in una determinata direzione, si ottiene l'*affinità*. La corrispondenza è determinata da ciò: che il segmento compreso tra due punti corrispondenti qualunque ha la direzione fissa ed è diviso dal piano fisso γ in un rapporto fisso. Il piano all'infinito è un piano unito; quindi due punteggiate corrispondenti qualunque sono simili, e due piani corrispondenti sono affini. Ma due figure affini qualunque non sono in generale simili.

Come caso particolare dell'affinità si ha la *simmetria* rispetto a un piano.

Es. 7. Se di due figure affini si sposta l'una in modo qualunque, alcuni dei caratteri che presentava la loro corrispondenza cesseranno di valere. Però, siccome il piano all'infinito non cesserà di corrispondere a sè stesso, le punteggiate corrispondenti saranno ancora simili, e i piani corrispondenti saranno ancora affini; quindi le due figure si potranno ancora chiamare affini. In generale, cioè, si può chiamare *affinità* ogni omografia di cui il piano all'infinito sia un piano unito. Su questo staranno tre dei quattro punti uniti, ed il quarto starà fuori. Se le rette che congiungono questo punto unito a distanza finita agli altri tre si assumono come assi cartesiani di riferimento dei punti dei due spazî, le equazioni [1] dell'omografia prendono la forma semplice

$$x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz.$$

Mediante queste formole si dimostra facilmente che i volumi di due tetraedri corrispondenti in due spazî affini stanno in un rapporto costante.

In particolare: se le tre costanti l m n sono eguali, si hanno, come caso particolare di figure affini, figure *simili*. In queste non solo, come nelle figure affini, due punteggiate corrispondenti qualunque sono simili; ma inoltre il rapporto di similitudine è lo stesso per tutte le coppie di punteggiate corrispondenti. Quando si spostano comunque l'una rispetto all'altra due figure omotetiche, esse cessano in generale di essere omotetiche, ma rimangono sempre simili.

CAPITOLO VIII.

Spazio di piani.

Coordinate di piani.

§ 80. Per individuare un piano nello spazio, possiamo procedere in modo analogo a quello tenuto per individuare una retta nel piano rigato.

Consideriamo tre rette fisse x y z di una stella (non appartenenti ad un fascio): un piano seca le tre rette in tre punti, i quali individuano il piano; e però tre numeri, che individuino rispettivamente questi punti, faranno da *coordinate* del piano. P. e. si possono assumere come tali le ascisse $p\ q\ r$ de' tre punti, contate dal punto **O** comune alle tre rette.

Consideriamo lo spazio anche come punteggiato, e prendiamo le stesse rette x y z come assi cartesiani. Se $x\ y\ z$ sono le coordinate di un punto del piano π da individuare, l'equazione del piano come luogo avrà la forma

$$ax + by + cz + d = 0;$$

onde potremo definire come coordinate del piano π i rapporti di tre fra' numeri $a\ b\ c\ d$ al rimanente, e potremmo anche chiamare i quattro numeri $a\ b\ c\ d$ *coordinate omogenee* del piano π.

Se d non è nullo, assumiamo come *coordinate* (*Plückeriane*) del piano i tre rapporti

$$\frac{a}{d} = -\frac{1}{p} = u, \quad \frac{b}{d} = -\frac{1}{q} = v, \quad \frac{c}{d} = -\frac{1}{r} = w.$$

L'equazione del piano può scriversi allora

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

e così contiene simmetricamente $x\,y\,z$ e $u\,v\,w$.

Se $x\,y\,z$ son dati, quest'equazione è soddisfatta dalle coordinate $u\,v\,w$ di ciascun piano passante pel punto $(x\,y\,z)$; e quindi essa è *l'equazione del punto* $(x\,y\,z)$, considerato come centro di una stella di piani.

Mentre un piano si move parallelamente a se stesso, i rapporti delle $u\,v\,w$ non si alterano.

Quando il piano viene a passare per **0**, le $u\,v\,w$ divengono infinite. Dicendo soltanto che per un piano le coordinate $u\,v\,w$ sono infinite (o che le $p\,q\,r$ sono nulle), non s'individua il piano; ma si viene solo a significare che esso passa per **0**. Per individuarlo basta dare inoltre i rapporti che hanno le $u\,v\,w$ per piani paralleli ad esso (o, come si può convenire di dire, pel piano stesso).

Per un piano parallelo all'asse **x** è nulla la coordinata u; per un piano parallelo al piano **xy** son nulle u e v; infine pel piano all'infinito son nulle tutte tre le coordinate.

Pel piano **xy** $u\,v$ sono indeterminate e w è infinita; ecc.

Alcune applicazioni.

§ 81. Due piani $(u\,v\,w)$, $(u'\,v'\,w')$ determinano un fascio; un piano qualunque del fascio è

$$\left(\frac{\lambda u + \mu u'}{\lambda + \mu},\ \frac{\lambda v + \mu v'}{\lambda + \mu},\ \frac{\lambda w + \mu w'}{\lambda + \mu}\right),$$

e varia col rapporto $\lambda : \mu$.

Tre piani $(u\,v\,w)$, $(u'\,v'\,w')$, $(u''\,v''\,w'')$ in generale determinano una stella; un piano qualunque della stella è

$$\left(\frac{\lambda u + \mu u' + \nu u''}{\lambda + \mu + \nu},\ \frac{\lambda v + \mu v' + \nu v''}{\lambda + \mu + \nu},\ \frac{\lambda w + \mu w' + \nu w''}{\lambda + \mu\,\nu}\right).$$

Quattro piani $(u\,v\,w)$, $(u'\,v'\,w')$, $(u''\,v''\,w'')$, $(u'''\,v'''\,w''')$ appar-

tengono a una stella, se

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u' & v' & w' & 1 \\ u'' & v'' & w'' & 1 \\ u''' & v''' & w''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Facendo variare il primo piano, mentre gli altri tre rimangono fissi, questa è l'equazione del punto comune ai tre piani.

Se i quattro piani non sono di una stella, le coordinate di un piano qualunque dello spazio potranno scriversi

$$\left(\frac{\lambda u + \mu u' + \nu u'' + \pi u'''}{\lambda + \mu + \nu + \pi}, \quad \frac{\lambda v + \mu v' + \nu v'' + \pi v'''}{\lambda + \mu + \nu + \pi}, \quad \frac{\lambda w + \mu w' + \nu w'' + \pi w'''}{\lambda + \mu + \nu + \pi} \right),$$

e si potranno assumere i numeri $\lambda\ \mu\ \nu\ \pi$ come *coordinate omogenee* del piano riferito ai quattro dati.

L'equazione lineare in coordinate di piani $u\ v\ w$

$$au + bv + cw + d = 0$$

determina il punto di coordinate cartesiane $\left(\frac{a}{d}\ \ \frac{b}{d}\ \ \frac{c}{d}\right)$, ossia è l'equazione di questo punto.

Se fra le $u\ v\ w$ passa una data equazione soddisfatta da una serie continua (doppiamente infinita) di piani, questi costituiscono un *inviluppo*. E se si hanno due equazioni soddisfatte da una serie continua di piani, questi costituiscono una *sviluppabile*. Gl'inviluppi e le sviluppabili dànno di nuovo origine a quelle serie di punti che chiamammo *superficie* e *curve*; ma qui non possiamo addentrarci in tali argomenti.

Tre equazioni fra le $u\ v\ w$ in generale determinano per $u\ v\ w$ un gruppo discreto di terne di valori reali o immaginarî, e quindi un gruppo discreto di piani reali o *immaginarî*.

§ 82. Ponendo fra le coordinate $u\ v\ w$ e $u'\ v'\ w'$ di due elementi di due spazî di piani equazioni analoghe alle [1] § 79, concludiamo:

Dati nell'uno spazio cinque piani di cui non quattro di una stella, scelti nell'altro spazio come corrispondenti cinque piani di cui non quattro di una stella, e posto che a piani di un fascio corrispondano piani di un fascio ed omograficamente; allora a ogni forma di 1ª e 2ª specie ne corrisponderà una omonima e omografica, e quindi i due spazî saranno omografici.

L'omografia di due spazî può sempre esprimersi mediante tre equazioni del tipo qui considerato.

Spazî correlativi.

§ **83**. Fra gli elementi di uno spazio di punti (**S**) e di uno spazio di piani (Σ) si può stabilire una corrispondenza, ponendo tra le coordinate $x\ y\ z$ di un punto di (**S**) e quelle $u'\ v'\ w'$ di un piano di (Σ) le equazioni

$$[1] \quad u' = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{ax + by + cz + d}, \quad v' = \frac{a_2x + \dots}{ax + \dots}, \quad w' = \frac{a_3x + \dots}{ax + \dots};$$

le quali, se il determinante $[a\ b_1\ c_2\ d_3]$ non è nullo, equivalgono alle seguenti:

$$[1'] \quad x = \frac{A_1u' + A_2v' + A_3w' + A}{D_1u' + D_2v' + D_3w' + D}, \quad y = \frac{B_1u' + \dots}{D_1u' + \dots}, \quad z = \frac{C_1u' + \dots}{D_1u' + \dots}.$$

Da queste equazioni concludiamo:

Siano dati cinque punti di uno spazio (**S**) di punti, in modo che non siano quattro di essi in un piano; e scelgansi come corrispondenti in uno spazio (Σ) di piani cinque piani, di cui non siano quattro di una stella. Sarà allora determinata tra i punti di (**S**) e i piani di (Σ) una corrispondenza univoca tale, che ad ogni punteggiata di (**S**) corrisponda un fascio projettivo di piani in (Σ). Ai punti in un piano di (**S**) corrisponderanno i piani per un punto di (Σ); il che stabilisce una corrispondenza univoca fra' piani di (**S**) e i punti di (Σ), dotata delle stesse proprietà che la corrispondenza considerata fra' piani di (Σ) e i punti di (**S**). Inoltre, alle rette per un punto (o in un piano) di (**S**) corrisponderanno le rette nel piano (o pel punto) corrispondente di (Σ); a un fascio di rette in (**S**) corrisponderà un fascio projettivo di rette in (Σ); ecc. Insomma: ad ogni forma di 1ª o 2ª specie contenuta nell'uno spazio corrisponderà nell'altro una forma reciproca di quella. Due spazî corrispondentisi in questo modo diconsi *reciproci* o *correlativi*, e la corrispondenza che li lega dicesi *reciprocità* o *correlazione*.

Una tale corrispondenza può sempre tradursi in equazioni del tipo [1] o [1'].

Due spazî reciproci di un terzo sono omografici tra loro.

Cerchiamo i punti $(x\,y\,z)$ che appartengono ai piani corrispondenti, ovvero i piani $(u'\,v'\,w')$ passanti pei punti corrispondenti. Riferiti i due spazi a uno stesso sistema cartesiano, dovrà essere per un tal punto e un tal piano

$$u'x + v'y + w'z + 1 = 0;$$

ossia, applicando le [1] o le [1'],

$$[2] \quad (a_1x + \ldots)\,x + (a_2x + \ldots)\,y + (a_3x + \ldots)\,z + (ax + \ldots) = 0,$$

$$[2'] \; (A_1u' + \ldots)\,u' + (B_1u' + \ldots)v' + (C_1u' + \ldots)w' + (D_1u' + \ldots) = 0.$$

La [2] mostra che il luogo di quei punti è di 2° grado; la [3] mostra che l'inviluppo di quei piani è di 2° grado.

L'equazione [2] si riduce a $0 = 0$ quando

$$\begin{aligned} a_1 = b_2 = c_3 = d = b_1 + a_2 = c_1 + a_3 \\ = d_1 + a = c_2 + b_3 = d_2 + b = d_3 + c = 0; \end{aligned}$$

nel qual caso anche la [2'] si riduce a $0 = 0$, e le [1], [1'] prendono la forma

$$u' = \frac{ny - mz - a}{ax + by + cz}, \quad v' = \frac{lz - nx - b}{ax + by + cz}, \quad w' = \frac{mx - ly - c}{ax + by + cz},$$

$$x = \frac{cv' - bw' - l}{lu' + mv' + nw'}, \quad y = \frac{aw' - cu' - m}{lu' + mv' + nw'}, \quad z = \frac{bu' - av' - n}{lu' + mv' + nw'}.$$

Allora ciascun punto sta nel piano corrispondente, e ciascun piano passa pel punto corrispondente; ai punti di una retta corrispondono i piani che li projettano dalla retta corrispondente, e ai punti di questa i piani che li projettano da quella; ecc. ecc.

Questa particolare corrispondenza è molto notevole; poichè s'incontra, oltre che in geometria, anche in questioni importanti di cinematica e di statica. Essa fu scoperta quasi simultaneamente dal Möbius, che la chiamò *Nullsystem* (*Statik*, 1837), e dallo Chasles.

La corrispondenza in esame è *involutoria*; cioè tale, che ad un

elemento qualunque, sia che si consideri nell'uno spazio, sia che si consideri nell'altro spazio, corrisponde uno stesso elemento.

Vi è un altro caso in cui la reciprocità presenta tale carattere; ed è quando il determinante $[a_1\, b_2\, c_3\, d]$ è simmetrico, cioè quando tra i coefficienti delle [1] passano le relazioni

$$a_2 = b_1, \quad a_3 = c_1, \quad a = d_1, \quad b_3 = c_2, \quad b = d_2, \quad c = d_3,$$

supponendo riferiti i due spazî a una stessa terna di assi. Nel caso presente la [2] e la [2'] diventano

$$a_1x^2 + b_2y^2 + c_3z^2 + 2b_1xy + 2c_1xz + 2c_2yz + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

$$A_1u'^2 + B_2u'^2 + C_3w'^2 + 2B_1u'v' + 2C_1u'w' + 2C_2v'w' + 2Au' + 2Bv' + 2Cw' + D = 0;$$

e non è qui il luogo di mostrare che i due spazî sono *polari-reciproci* rispetto alla superficie di 2° grado rappresentata dall'una o dall'altra di queste due equazioni.

Esercizi. Estendere allo spazio di piani gli esercizî del § 52.

Definendo come equazioni di una retta le equazioni di due punti di essa, sviluppare ciò che corrisponde per dualità al contenuto del § 73.

CAPITOLO IX.

Spazio rigato.

Coordinate di rette nello spazio.

§ 84. Una retta, considerata come luogo di punti, prende il nome di *raggio*, ed è individuata da due punti. Scegliendo i punti in cui essa seca due piani fissi, ciascuno dei due punti è individuato da due coordinate, e quindi si hanno quattro numeri per individuare la retta; ma tre di essi non basterebbero.

Dunque lo spazio rigato è una forma di 4ª specie o a 4 coordinate.

Scelti tre assi cartesiani, e dette $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$ le coordinate di due punti $P_1\, P_2$ di una retta r, consideriamo i sei binomî

$$x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2,\ y_1 z_2 - y_2 z_1,\ z_1 x_2 - z_2 x_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

che sono i determinanti di 2° ordine estratti della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se con le coordinate di due altri punti della retta

$$\left(\frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu},\ \frac{\lambda y_1 + \mu y_2}{\lambda + \mu},\ \frac{\lambda z_1 + \mu z_2}{\lambda + \mu}\right),\ \left(\frac{\lambda' x_1 + \mu' x_2}{\lambda' + \mu'},\ \frac{\lambda' y_1 + \mu' y_2}{\lambda' + \mu'},\ \frac{\lambda' z_1 + \mu' z_2}{\lambda' + \mu'}\right)$$

formiamo i binomî analoghi ai precedenti, noi otteniamo (com'è facile verificare) i precedenti moltiplicati per $\dfrac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{(\lambda + \mu)(\lambda' + \mu')}$; e però i

mutui rapporti dei detti binomî non si alterano, mentre i due punti P_1 P_2 cambiano posizione sulla retta r.

Inoltre fra i sei binomî passa evidentemente la relazione quadratica e omogenea

$$(x_1-x_2)(y_1z_2-y_2z_1)+(y_1-y_2)(z_1x_2-z_2x_1)+(z_1-z_2)(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

Data una retta r, non sono determinati i due punti P_1 P_2 di essa; ma sono individuati i mutui rapporti dei sei binomî formati con le coordinate dei due punti. Anzi i rapporti di cinque binomî al rimanente non sono indipendenti fra loro; poichè la relazione precedente (divisa pel quadrato di uno dei binomî) mostra come uno qualunque di tali rapporti si esprima in funzione degli altri quattro.

Viceversa: dati solamente i rapporti di quattro fra' sei binomî a uno degli altri due, è noto il rapporto fra questi due. Ciò non basta a individuare le sei coordinate x_1 y_1 z_1 e x_2 y_2 z_2; ma fra le infinite coppie di punti, per cui i sei binomî hanno i rapporti che abbiam supposto dati, possiamo individuarne una, composta di un punto nel piano xz e un punto nel piano yz. Infatti per $y_1=0$ e $x_2=0$ i sei binomî divengono

$$x_1,\ -y_2,\quad z_1-z_2,\quad -y_2z_1,\quad -z_2x_1,\quad x_1y_2;$$

ora, se son dati i loro mutui rapporti, i rapporti del 6° e 4° al 2° individuano x_1 e z_1, e quindi un punto nel piano xz; e i rapporti del 6° e 5° al 1° individuano y_2 e z_2, e quindi un punto nel piano yz. Conosciuti così due punti, è individuata la retta r per essi; e questa retta contiene tutte le coppie di punti, per cui i sei binomî hanno i rapporti assegnati.

Segue da queste premesse che, se un gruppo di sei numeri

$$l\ m\ n\ L\ M\ N$$

soddisfa la condizione

$$lL+mM+nN=0,$$

i rapporti di quattro di tali numeri a uno degli altri due si possono assumere come coordinate di una certa retta r nello spazio, per la quale quei numeri sono rispettivamente proporzionali ai sei binomî considerati. Anzi nulla vieta di chiamare quei sei numeri le *coordinate omogenee* della retta-raggio r.

Per ogni coppia di punti P_1P_2 della retta r si ha dunque

$$\frac{x_1-x_2}{l}=\frac{y_1-y_2}{m}=\frac{z_1-z_2}{n}=\frac{y_1z_2-y_2z_1}{L}=\frac{z_1x_2-z_2x_1}{M}=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{N}.$$

Per rette parallele, fu già osservato che i rapporti delle l m n sono rispettivamente eguali (§ 73). In altri termini: fra le sei coordinate omogenee di una retta r, le tre $l\,m\,n$ sono le coordinate omogenee della direzione della retta r.

§ 85. Una retta, considerata come sostegno di un fascio di piani, prende il nome di *asse*, ed è individuata da due piani. Siano $u_1\,v_1\,w_1$ e $u_2\,v_2\,w_2$ le coordinate plückeriane di due piani $\pi_1\,\pi_2$ per la retta r: allora i sei binomî

$$u_1-u_2,\ v_1-v_2,\ w_1-w_2,\ v_1w_2-v_2w_1,\ w_1u_2-w_2u_1,\ u_1v_2-u_2v_1,$$

cioè i determinanti di 2° ordine estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \end{vmatrix},$$

serbano rapporti costanti, mentre π_1 e π_2 variano nel fascio che ha per asse r; e son legati dalla relazione

$$(u_1-u_2)(v_1w_2-v_2w_1)+(v_1-v_2)(w_1u_2-w_2u_1)+(w_1-w_2)(u_1v_2-u_2v_1)=0.$$

Dati questi sei binomî, è determinata la retta (ad esempio: mediante i due piani che la projettano parallelamente a due dei tre assi coordinati); cosicchè i sei binomî si possono assumere come coordinate omogenee della retta-asse r.

Anzi queste coordinate non differiscono in sostanza da quelle testè definite per la retta-raggio. Infatti: se $P_1\,P_2$ sono due punti della retta r dei piani $\pi_1\,\pi_2$, riferendo punti e piani agli stessi assi coordinati, si hanno le quattro equazioni

$$u_1x_1+v_1y_1+w_1z_1+1=0,\quad u_2x_1+v_2y_1+w_2z_1+1=0,$$
$$u_1x_2+v_1y_2+w_1z_2+1=0,\quad u_2x_2+v_2y_2+w_2z_2+1=0.$$

Eliminando dalle prime due x_1 e dalle altre x_2, si ha

$$(u_1v_2-u_2v_1)\,y_1+(u_1w_2-u_2w_1)\,z_1+(u_1-u_2)=0,$$
$$(u_1v_2-u_2v_1)\,y_2+(u_1w_2-u_2w_1)\,z_2+(u_1-u_2)=0;$$

e da queste eliminando ad esempio $(u_1v_2 - u_2v_1)$, si ha

$$(u_1w_2 - u_2w_1)(y_1z_2 - y_2z_1) + (u_1 - u_2)(y_1 - y_2) = 0,$$

ossia

$$\frac{u_1 - u_2}{y_1z_2 - y_2z_1} = \frac{w_1u_2 - w_2u_1}{y_1 - y_2}.$$

Confrontando questa relazione colle analoghe, che si potrebbero ottenere con eliminazioni nello stesso modo, si ha immediatamente

$$\frac{u_1 - u_2}{y_1z_2 - y_2z_1} = \frac{v_1 - v_2}{z_1x_2 - z_2x_1} = \frac{w_1 - w_2}{x_1y_2 - x_2y_1}$$
$$= \frac{v_1w_2 - v_2w_1}{x_1 - x_2} = \frac{w_1u_2 - w_2u_1}{y_1 - y_2} = \frac{u_1v_2 - u_2v_1}{z_1 - z_2};$$

le quali eguaglianze esprimono appunto che le coordinate di una retta considerata come asse sono proporzionali alle coordinate (prese in un certo ordine) della retta stessa considerata come raggio.

È facile scorgere che è reale la retta per due punti (o in due piani) immaginarî, se le coordinate omologhe di questi sono complesse coniugate.

A valori immaginarî dei rapporti di cinque fra' sei numeri $l\ m\ n\ L\ M\ N$ al rimanente (con $lL + mM + nN = 0$) diremo che corrisponde una *retta immaginaria*.

Il primo ad usare il concetto di coordinate di una retta nello spazio fu il *Cayley* (1859), il quale si servì a tal fine di coordinate omogenee di punti e piani, come si vedrà in seguito. Ma al *Plücker*, che introdusse le coordinate della retta definite come ora abbiam fatto, spetta il gran merito di esser partito da questo concetto per fondare (1865) una nuova Geometria dello spazio, in cui la retta è (per così dire) l'elemento primordiale, da cui tutti gli altri enti geometrici derivano; in altri termini, una Geometria dello spazio rigato. (Veggasi specialmente la *Neue Geometrie des Raumes* del *Plücker*, pubblicata nel 1868).

Angolo, momento e distanza di due rette.

§ **86**. Siano $l\ m\ n\ L\ M\ N$ le coordinate di una retta **r**, e $l'\ m'\ n'\ L'\ M'\ N'$ quelle di un'altra retta **r'**; vale a dire, indicando con

$\mathbf{P}_1(x_1y_1z_1)$ $\mathbf{P}_2(x_2y_2z_2)$ due punti di **r**, e con $\mathbf{P}_3(x_3y_3z_3)$ $\mathbf{P}_4(x_4y_4z_4)$ due punti di **r'**, poniamo

$$\frac{x_1-x_2}{l}=\frac{y_1-y_2}{m}=\frac{z_1-z_2}{n}=\frac{y_1z_2-y_2z_1}{L}=\frac{z_1x_2-z_2x_1}{M}=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{N},$$

$$\frac{x_3-x_4}{l'}=\frac{y_3-y_4}{m'}=\frac{z_3-z_4}{n'}=\frac{y_3z_4-y_4z_3}{L'}=\frac{z_3x_4-z_4x_3}{M'}=\frac{x_3y_4-x_4y_3}{N'}.$$

La condizione perchè le due rette **r r'** stiano in un piano, ossia perchè abbiano un punto comune (a distanza finita o infinita), si ottiene esprimendo che i quattro punti $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ sono in un piano, cioè

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Sviluppando questo determinante secondo i prodotti de' determinanti complementari delle due matrici che lo compongono

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

si ha

$$(x_1-x_2)(y_3z_4-y_4z_3)+(y_1-y_2)(z_3x_4-z_4x_3)+(z_1-z_2)(x_3y_4-x_4y_3)$$
$$+(y_1z_2-y_2z_1)(x_3-x_4)+(z_1x_2-z_2x_1)(y_3-y_4)+(x_1y_2-x_2y_1)(z_3-z_4)=0,$$

che può scriversi

$$lL'+mM'+nN'+Ll'+Mm'+Nn'=0.$$

Il coseno dell'angolo di due rette **r r'** si determina, osservando che si ha dalla [8]-§ 65

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\,.\,\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\cos\mathbf{rr}'=\Phi\begin{pmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2, & z_1-z_2 \\ x_3-x_4, & y_3-y_4, & z_3-z_4 \end{pmatrix};$$

ma dalla [10]-§ 65

$$\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}^2=\Phi(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2),$$

$$\overline{\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4}^2=\Phi(x_3-x_4,\ y_3-y_4,\ z_3-z_4);$$

quindi sostituendo a $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ le quantità proporzionali $l\ m\ n$, a $x_3 - x_4$, $y_3 - y_4$, $z_3 - z_4$ le proporzionali $l'\ m'\ n'$, otteniamo

$$\cos rr' = \frac{\Phi\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix}}{\sqrt{\Phi(l\,m\,n).\Phi(l'\,m'\,n')}};$$

e in assi ortogonali

$$\cos rr' = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}.$$

Di qui si trae la condizione d'ortogonalità delle due rette r r'.

Il seno dell'angolo di due rette r r' si ottiene facilmente, supponendo per poco che le due rette abbiano un punto comune $P(x\ y\ z)$. Infatti, se P_1 è un altro punto di r e P_2 un altro punto di r', si ha (§ 66)

$$PP_1^2.PP_2^2 \operatorname{sen}^2 r r' = 4(PP_1P_2)^2 = \psi\Big([yz_1 1],\ [zx_1 1],\ [xy_1 1]\Big);$$

ma

$$[yz_1 1] = \begin{vmatrix} y_1 - y & z_1 - z \\ y_2 - y & z_2 - z \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$PP_1^2 = \Phi(x_1 - x,\ y_1 - y,\ z_1 - z),\ PP_2^2 = \Phi(x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z);$$

quindi sostituendo a $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ le proporzionali $l\,m\,n$, a $x_2 - x$, $y_2 - y$, $z_2 - z$ le $l'\ m'\ n'$, si trova

$$\operatorname{sen}^2 rr' = \frac{\Psi(mn' - m'n,\ nl' - n'l,\ lm' - l'm)}{\Phi(lmn).\ \Phi(l'\,m'\,n')}.$$

Se le due rette r r' non s'incontrano, basterà sostituire ad esse due loro parallele condotte da uno stesso punto; sicchè è chiaro che questa formola vale anche nel caso generale.

In assi ortogonali essa diventa

$$\operatorname{sen}^2 r r' = \frac{(mn' - m'n)^2 + (nl' - n'l)^2 + (lm' - l'm)^2}{(l^2 + m^2 + n^2).(l'^2 + m'^2 + n'^2)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}^2}{(l^2 + m^2 + n^2)\,(l'^2 + m'^2 + n'^2)}.$$

§ 87. Vogliasi determinare quello che il CAYLEY chiama *momento* di due rette r r', ossia il prodotto del seno del loro angolo per la loro distanza (contata sulla retta r_0 perpendicolare comune a r r'). Se P_1P_2 e P_3P_4 sono due coppie di punti rispettivamente su r e r', per un teorema di CHASLES (*) avremo in valore assoluto

$$P_1P_2.P_3P_4.\mathrm{mom}\,rr' = 6P_1P_2P_3P_4 = \mathrm{sen}\,xyz.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

onde si deduce, scegliendo convenientemente i segni,

$$\mathrm{mom}\,rr' = \mathrm{sen}\,xyz\,\frac{(x_1-x_2)(y_3z_4-y_4z_3)+\ldots+(y_1z_2-y_2z_1)(x_3-x_4)+\ldots}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+\ldots}\,\sqrt{(x_3-x_4)^2+\ldots}},$$

e quindi

$$\mathrm{mom}\,rr' = \mathrm{sen}\,xyz\,\frac{lL'+mM'+nN'+Ll'+Mm'+Nn'}{\sqrt{(l^2+\ldots+2lm\cos xy+\ldots)(l'^2+\ldots+2l'm'\cos xy+\ldots)}}.$$

L'annullarsi del momento è la condizione perchè r e r' siano in un piano; e così ritroviamo la condizione già ottenuta nel § prec.

La distanza fra due rette r r' vale mom rr' : sen rr' ; e però potremo assumere

$$\mathrm{dist}\,rr' = \frac{lL'+mM'+nN'+Ll'+Mm'+Nn'}{\sqrt{\Psi(mn'-m'n,\ nl'-n'l,\ lm'-l'm)}},$$

e in assi ortogonali

$$\mathrm{dist}\,rr' = \frac{lL'+mM'+nN'+Ll'+Mm'+Nn'}{\sqrt{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}^2}}.$$

(*) Tirando P_1Q QR equipollenti a P_2P_3 P_3P_4, si determina il prisma di basi P_1QR $P_2P_3P_4$; il quale (com'è noto) è triplo del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$. Questo prisma è metà del parallelepipedo che ha per base il parallelogrammo QP_3P_4R e per altezza la distanza fra P_1 e il piano del parallelogrammo. Ora QP_3P_4R è misurato da $P_1P_2.P_3P_4\,\mathrm{sen}\,rr'$ (essendo QP_3 equipollente a P_1P_2); e la distanza suddetta non è che la distanza fra r e r'. Dunque (in valore assoluto)

$$6P_1P_2P_3P_4 = P_1P_2.P_3P_4\,\mathrm{sen}\,rr'\,\mathrm{dist}\,rr' = P_1P_2.P_3P_4\,\mathrm{mom}\,rr'.$$

Per determinare le coordinate $l_0\, m_0\, n_0$ $L_0\, m_0\, n_0$ della retta $\mathbf{r}_0$ perpendicolare comune alle $\mathbf{r}$ $\mathbf{r}'$, si osservi che, essendo $\mathbf{r}_0$ ortogonale a $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$, si ha (§ prec.)

$$\Phi\begin{pmatrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ l & m & n \end{pmatrix} = 0, \quad \Phi\begin{pmatrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 0;$$

dalle quali equazioni lineari omogenee in $l_0\, m_0\, n_0$, coordinate della direzione di $\mathbf{r}_0$, si ricavano $l_0\, m_0\, n_0$ a meno di un fattore arbitrario. Inoltre, incontrando $\mathbf{r}_0$ le $\mathbf{r}$ $\mathbf{r}'$, si ha

$$\begin{aligned} lL_0 + mM_0 + nN_0 + Ll_0 + Mm_0 + Nn_0 &= 0, \\ l'L_0 + m'M_0 + n'N_0 + L'l_0 + M'm_0 + N'n_0 &= 0; \end{aligned}$$

dalle quali equazioni e dalla

$$l_0L_0 + m_0M_0 + n_0N_0 = 0,$$

lineari in $L_0\, M_0\, N_0$, si ricavano quindi $L_0\, M_0\, N_0$ a meno di quel medesimo fattore.

In assi ortogonali

$$l_0 : m_0 : n_0 = mn' - m'n : nl' - n'l : lm' - l'm.$$

Angolo fra una retta e un piano.

§ 88. L'angolo di una retta $\mathbf{r}$ con un piano $\Pi(u\, v\, w)$ è il complemento dell'angolo di $\mathbf{r}$ con la normale $\mathbf{n}$ al piano Π; per la quale $\mathbf{n}$ si ha, supponendo gli assi ortogonali (§ 76)

$$l' : m' : n' = u : v : w.$$

Avremo dunque in tale ipotesi, applicando le formole del § 86,

$$\operatorname{sen}\mathbf{r}\Pi = \cos\mathbf{rn} = \frac{lu + mv + nw}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(u^2 + v^2 + w^2)}},$$

$$\cos^2\mathbf{r}\Pi = \operatorname{sen}^2\mathbf{rn} = \frac{(mw - nv)^2 + (nu - lw)^2 + (lv - mu)^2}{(l^2 + m^2 + n^2)(u^2 + v^2 + w^2)}.$$

La retta è parallela al piano, se

$$lu + mv + nw = 0;$$

ed è perpendicolare al piano, se

$$\frac{l}{u} = \frac{m}{v} = \frac{n}{w}.$$

Se gli assi sono obliqui, si ottengono con lo stesso procedimento formole più complicate, che lasciamo al lettore di scrivere.

Distanza fra una retta e un punto.

§ **89**. La distanza **Pr** fra un punto $\mathbf{P}(x\ y\ z)$ e una retta $\mathbf{r}(l\ m\ n\ L\ M\ N)$ si deduce dalla relazione

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^2.\mathbf{Pr}^2 = 4(\mathbf{PP}_1\mathbf{P}_2)^2 = \psi\Big([yz_1 1],\ [zx_1 1],\ [xy_1 1]\Big),$$

osservando che

$$[yz_1 1] = y(z_1 - z_2) + z(y_2 - y_1) + (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,, \ldots,$$
$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^2 = \Phi(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2).$$

In causa dell'omogeneità, si può sostituire a $x_1 - x_2, \ldots, y_1 z_2 - y_2 z_1, \ldots$ le quantità proporzionali $l \ldots L \ldots$; e si trova

$$\mathbf{Pr}^2 = \frac{\Psi(yn - zm + L,\ zl - xn + M,\ xm - yl + N)}{\Phi(l\ m\ n)}.$$

Esercizio 1. Determinare le coordinate cartesiane del punto comune alla retta $(l\,m\,n\ L\,M\,N)$ e al piano $(u\,v\,w)$, nonchè le due condizioni perchè la retta giaccia nel piano.

Es. 2. Determinare le coordinate plückeriane del piano che passa per la retta $(l\,m\,n\ L\,M\,N)$ e pel punto $(x\,y\,z)$, nonchè le due condizioni perchè la retta passi pel punto.

Es. 3. Posto che due rette di date coordinate stiano in un piano, ossia abbiano un punto comune, determinare le coordinate di questo punto e di questo piano.

Es. 4. Determinare le coordinate della direzione che biseca l'angolo di due date direzioni $(l\, m\, n)$, $(l'\, m'\, n')$.

Es. 5. Se $u\, v$ sono le coordinate plückeriane di una retta nel piano rigato xy, le coordinate plückeriane della stessa retta nello spazio rigato sono

$$l : m : N = -v : u : 1, \quad n = L = M = 0.$$

Es. 6. Calcolare le coordinate della perpendicolare da un punto $(x\, y\, z)$ a un piano $(u\, v\, w)$.

Es. 7. Calcolare lè coordinate della perpendicolare da un punto $(x\, y\, z)$ a una retta $(l\, m\, n\ L\, M\, N)$.

Es. 8. Calcolare le coordinate della retta perpendicolare a una retta $(l\, m\, n\ L\, M\, N)$ e giacente nel piano $(u\, v\, w)$.

Complessi, congruenze, rigate.

§ 90. Qui sorge spontanea la domanda: qual'è il significato geometrico di una equazione omogenea nelle coordinate $l\, m\, n\ L\, M\, N$ di una retta variabile r? Accenneremo la risposta, senza entrare in molti particolari.

L'equazione data, accompagnata dall'altra $lL + mM + nN = 0$, è soddisfatta da ∞^3 sistemi di valori de' rapporti di cinque fra le quantità variabili $l\, m\, n\ L\, M\, N$ alla rimanente; e però vi sono ∞^3 rette soddisfacenti la data equazione. Il loro insieme dicesi *complesso*.

In particolare: sia la data equazione lineare

$$[1] \qquad Al + Bm + Cn + aL + bM + cN = 0,$$

ove $A\, B\, C\ a\, b\, c$ sono quantità date. In questo caso il complesso si dirà *di 1° grado* o *lineare*.

Se i coefficienti della equazione [1] verificano la relazione

$$[2] \qquad aA + bB + cC = 0,$$

ossia se essi sono coordinate di una certa retta, il complesso consta di tutte le rette che a questa si appoggiano. Allora il complesso dicesi *speciale*, e questa retta *direttrice*.

In generale: considerando la r come raggio per due punti $(x\ y\ z)$, $(x'\ y'\ z')$, e sostituendo nella [1] a $l \ldots L \ldots$ le proporzionali $x - x', \ldots, yz' - y'z, \ldots$, abbiamo

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z')$$
$$+ a(yz' - y'z) + b(zx' - z'x) + c(xy' - x'y) = 0.$$

Dato il punto $(x'\ y'\ z')$, questa equazione lineare in $x\ y\ z$ rappresenta un piano. Dunque: per ogni dato punto dello spazio passano ∞ rette del complesso, le quali fanno fascio intorno al punto in un piano determinato. Cosicchè a ogni punto corrisponde un piano passante pel punto.

Del pari, considerando la r come asse in due piani $(u\ v\ w)$, $(u'\ v'\ w')$, e sostituendo nella [1] a $L \ldots l \ldots$ le proporzionali $u - u', \ldots, vw' - v'w, \ldots$, si vede che: in ogni dato piano esistono ∞ rette del complesso, le quali fanno fascio nel piano intorno a un punto determinato. A ogni piano corrisponde così un punto che sta nel piano.

In conseguenza: a' punti di una retta corrispondono i piani per un'altra retta, e la punteggiata e il fascio sono proiettivi. Ai punti della seconda retta corrispondono i piani per la prima. Onde le rette dello spazio sono a due a due *coniugate* in una corrispondenza univoca e reciproca.

Insomma: la corrispondenza in esame non è altro che quel caso particolare della correlazione fra due spazî, che abbiamo accennato in fine del § 83, e che Möbius chiamò *Nullsystem*.

Le rette del complesso sono le rette coniugate a sè stesse.

Una retta del complesso, se seca una retta data, secherà anche la coniugata. Ed ogni retta che sechi due rette coniugate appartiene al complesso.

I rapporti di cinque de' sei coefficienti $A\ B\ C\ a\ b\ c$ al rimanente possono assumersi come le *coordinate* del complesso, e i sei coefficienti come *coordinate omogenee* del complesso.

Un complesso lineare è individuato, quando sono date cinque rette di esso.

Nel piano all'infinito esistono ∞ rette del complesso, che fanno fascio intorno a un punto all'infinito, il quale corrisponde a quel piano. A piani di data giacitura (ossia aventi la stessa retta all'infinito) corrispondono punti di una retta (reciproca di quella all'infinito), che è diretta verso il punto all'infinito suddetto, e che dicesi *diametro* del complesso.

Diconsi *principali* i piani normali alla comune direzione de' diametri. Ai piani principali corrisponde un particolare diametro, che dicesi diametro *principale* o *asse* del complesso.

Ci limitiamo ad enunciare qualche proprietà metrica del complesso lineare:

È costante il rapporto dei momenti di una retta qualunque del complesso rispetto a due rette coniugate fisse. Questo rapporto dicesi *modulo* del complesso rispetto alle due rette coniugate.

La retta perpendicolare comune a due rette coniugate è tale anche all'asse. È costante il prodotto della distanza fra una retta arbitraria dello spazio e l'asse del complesso per la tangente dell'angolo fra la retta coniugata a quella e l'asse. Ed è eguale al prodotto della distanza fra una retta qualunque del complesso e l'asse per la tangente dell'angolo fra la stessa retta e l'asse.

Questo prodotto costante dicesi *parametro* del complesso.

Per ogni traslazione secondo l'asse, e per ogni rotazione intorno all'asse, il complesso si trasforma in sè stesso; ossia ogni retta del complesso viene a coincidere con un'altra retta del complesso, ecc.

§ **91**. Due complessi hanno di comune ∞^2 rette, le quali si dicono formare una *congruenza*.

Se le equazioni di due complessi di 1° grado sono

$$Al + \ldots + cN = 0, \quad A'l + \ldots + c'N = 0,$$

l'insieme delle due equazioni rappresenta la congruenza delle rette comuni ai due complessi. Una combinazione lineare di esse, come

$$\lambda(Al + \ldots + cN) + \mu(A'l + \ldots + c'N) = 0,$$

rappresenta un altro complesso di 1° grado; e variando $\lambda : \mu$ si ha una *serie semplice* o *fascio* di complessi, i quali a due a due hanno comune appunto quella congruenza.

Fra questi complessi sono speciali quelli che verificano la condizione

$$(a\lambda+a'\mu)(A\lambda+A'\mu)+(b\lambda+b'\mu)(B\lambda+B'\mu)+(c\lambda+c'\mu)(C\lambda+C'\mu) = 0$$

ossia

$$(aA + bB + cC)\lambda^2 + (aA' + bB' + cC' + Aa' + Bb' + Cc')\lambda\mu \\ + (a'A' + b'B' + c'C')\mu^2 = 0,$$

che è una equazione di 2° grado in $\lambda : \mu$. I complessi speciali del fascio sono dunque due.

Le direttrici di questi due complessi speciali si dicono *direttrici* della congruenza; esse possono essere reali distinte, reali coincidenti, immaginarie. Ma noi ci asteniamo dall'esaminare partitamente i tre casi.

Tutte e sole le rette della congruenza si appoggiano alle due direttrici.

La congruenza è individuata, quando ne son date quattro rette.

I piani che corrispondono a un punto rispetto ai complessi della serie, fanno fascio intorno a una retta della congruenza; retta *corrispondente* al punto nella congruenza.

E i punti corrispondenti a un piano rispetto ai complessi della serie, formano una punteggiata su una retta della congruenza; retta *corrispondente* al piano nella congruenza.

Se il punto è su una direttrice (o se il piano passa per una direttrice), la retta corrispondente è indeterminata.

Tre complessi hanno comuni ∞ rette, che si dicono formare una superficie *rigata* (*Regelschaar*). Se

$$Al + \ldots = 0, \quad A'l + \ldots = 0, \quad A''l + \ldots = 0$$

sono le equazioni di tre complessi di 1° grado, una loro combinazione lineare

$$\lambda(Al + \ldots) + \mu(A'l + \ldots) + \nu(A''l + \ldots) = 0$$

rappresenta un altro complesso di 1° grado; e variando i rapporti $\lambda : \nu$, $\mu : \nu$ si ottiene una *serie doppia* o *rete* di complessi, i quali hanno comune a tre a tre la stessa rigata.

Fra questi complessi ve ne ha ∞ speciali, e le rette della rigata si appoggiano alle direttrici di essi.

Quattro complessi non hanno comune che un gruppo discreto di rette.

Quattro complessi di 1° grado hanno comuni due rette; le quali possono essere reali distinte, reali coincidenti, immaginarie.

Una combinazione lineare delle equazioni dei quattro complessi rappresenta un individuo della serie tripla di complessi di 1° grado che passano per quelle due rette.

Se i quattro complessi dati si suppongono speciali, si conclude che: esistono due rette (reali distinte, reali coincidenti, immaginarie), le quali si appoggiano a quattro rette date comunque nello spazio.

Cinque complessi non hanno in generale alcuna retta comune.

La importantissima teoria dei complessi è dovuta al *Plücker*; il quale introdusse anche le denominazioni di *complesso, congruenza*, ecc. (*Neue Geometrie des Raumes*). Notevoli sistemi di ∞^2 rette (*Strahlensysteme*) erano già stati studiati da *Monge, Malus, Dupin, Sturm, Hamilton, Möbius, Transon*, e segnatamente da *Kummer* (Giorn. di *Crelle*, 1859; Acc. di Berlino, *Monatsberichte* 1864 e 65, *Abhandl.* 1866).

Esercizio 1. Date le coordinate di un punto o di un piano o di una retta, calcolare le coordinate del piano o del punto o della retta corrispondente rispetto a un dato complesso lineare.

Es. 2. Un complesso lineare è individuato, se son date due rette corrispondenti e una retta del complesso.

Es. 3. Due piani, che passino per una retta di una congruenza comune a due complessi lineari, sono punteggiati omograficamente dalle rette della congruenza. E se si considerino due stelle aventi i centri su quella retta, si corrispondono omograficamente quei piani delle due stelle che projettano le rette della congruenza.

Es. 4. I teoremi inversi di questi ultimi.

CAPITOLO X.

Coordinate omogenee.

Concetto di coordinate omogenee.

§ 92. Sovente, per individuare ciascun elemento di un sistema o varietà d'infiniti elementi, si fa uso dei rapporti di alcuni numeri a un altro numero, in modo che ad ogni gruppo di valori di questi rapporti corrisponda un elemento, e viceversa. Allora quei numeri e questo si dicono *coordinate omogenee* di quell'elemento. *Coordinate*, perchè servono a individuare l'elemento; *omogenee*, perchè moltiplicando questi numeri per uno stesso numero i loro rapporti non si alterano, e però non cessano d'individuare lo stesso elemento; cosicchè, dato l'elemento, non sono determinati essi numeri, ma solo i loro mutui rapporti.

Facendo uso di coordinate omogenee, si viene a introdurre una coordinata più del necessario; ma l'omogeneità e la simmetria che le formole acquistano compensano questa complicazione. Che anzi talora per ottenere l'omogeneità e la simmetria s'introducono due, tre.... coordinate oltre il necessario; ed allora fra le coordinate bisogna stabilire una, due ... relazioni omogenee.

Nei precedenti capitoli ci si sono presentati spontaneamente dei sistemi di coordinate omogenee per individuare gli elementi delle singole forme geometriche fondamentali. Così: per la retta punteggiata, il piano punteggiato e lo spazio punteggiato abbiamo definito le coordinate omogenee *baricentriche* (§§ 5, 29, 63), ed

abbiamo accennate le analoghe coordinate per le altre forme di 1ª, 2ª, 3ª specie (§§ 21, 24, 40, 53, 75). Inoltre per lo spazio rigato, forma di 4ª specie, abbiamo in due modi stabilito un sistema di sei coordinate omogenee, ma legate da una relazione quadratica omogenea (§§ 84, 85).

Del resto, senza uscire dal sistema cartesiano, ci è occorso di esprimere le due coordinate cartesiane di un punto in un piano mediante i rapporti di due numeri a un terzo (§ 51); sicchè questi tre numeri si possono assumere come coordinate omogenee del punto. E ci è anche occorso di esprimere le tre coordinate cartesiane di un punto nello spazio come rapporti di tre numeri a un quarto (§ 81); onde questi quattro numeri sono coordinate omogenee del punto.

Del pari, le coordinate plückeriane di una retta in un piano ci si sono presentate come rapporti di due numeri a un terzo (§ 49), e le coordinate plückeriane di un piano nello spazio come rapporti di tre numeri a un quarto (§ 80).

Aggiungasi che abbiamo introdotto la nozione di due o tre coordinate omogenee di una direzione (§§ 49, 73), e quella di quattro coordinate omogenee di una giacitura (§ 72).

Ora esporremo per le singole forme fondamentali un sistema di coordinate omogenee, le quali comprendono come casi particolari quelle già incontrate, e si chiamano *projettive*.

Nei due secoli precedenti al nostro la geometria analitica, usando quasi esclusivamente le coordinate cartesiane (e in talune ricerche le coordinate polari), aveva avuto per principale scopo di applicare il grande concetto di *Descartes* a risolvere sempre nuove questioni spettanti a tutti i rami della matematica pura ed applicata. Fatta eccezione per pochi scienziati, segnatamente per *Lagrange*, non si era badato ad introdurre eleganza, simmetria e, come conseguenza di questa, concisione nei calcoli. Nella prima metà del nostro secolo invece il desiderio, anzi per qualche riguardo la necessità di acquistare ai ragionamenti ed ai calcoli della geometria analitica queste doti, e nello stesso tempo lo sviluppo della geometria projettiva, condussero naturalmente all'introduzione delle coordinate omogenee.

Il primo sistema di coordinate omogenee di punti nel piano e nello spazio fu il sistema baricentrico dovuto a *Möbius* (*Der barycentrische Calcul*, 1827). Quasi nello stesso tempo la notazione abbreviata, introdotta anzitutto dal *Bobillier* (*Annales de Mathématiques* di *Gergonne*, t. XVIII, 1827) per le equazioni della retta nel piano e del piano nello spazio, e poi ripresa ed estesa dal *Plücker* (*Analytisch-geometrische Entwickelungen*, 1828-31) mediante l'introduzione delle coordinate della retta e del piano e dell'equazione del punto, conduceva il *Plücker* ad altri sistemi di coordinate omogenee, trimetriche nel piano e tetrametriche nello spazio, pei punti, per le rette

e pei piani (loc. cit.). Questo scienziato assunse, ad esempio, come coordinate omogenee di un punto nel piano i valori che i primi membri delle equazioni di tre rette (non di un fascio) del piano riferite a due assi cartesiani prendono quando vi si sostituiscono le coordinate di quel punto riferito a questi stessi assi. È chiaro che tali coordinate differiscono per fattori costanti dalle distanze fra il punto e le tre rette, e quindi (§ 94) coincidono con un sistema generale di coordinate projettive avente le tre rette considerate per rette fondamentali.

In seguito l'*Hesse* mostrò come, senza cessare in sostanza di usare le coordinate cartesiane di punti, si potesse introdurre omogeneità nelle formole, rappresentando queste coordinate come i rapporti di due o di tre numeri ad un altro. Con questo metodo ingegnoso e semplicissimo, l'*Hesse* raggiunse quasi tutti i vantaggi che provengono dall'uso di coordinate omogenee; anzi fu il primo a mettere in piena luce l'eleganza che acquistano i calcoli fatti mediante queste, e l'appoggio mutuo che possono rendersi la geometria projettiva e l'algebra. Le sue ricerche contengono così il germe di quella nuova scienza che lega tra loro queste due, cioè la *teoria degli invarianti* o *algebra delle trasformazioni lineari.*

Dopo il *Plücker*, altri scienziati ritornarono sulle coordinate projettive generali, e ne fecero applicazioni: citeremo soltanto *Chasles* e *Clebsch.* Oggidì esse costituiscono il sistema più usato nelle ricerche analitiche di geometria projettiva. La teoria che noi ne abbiamo esposta, basata sui doppî rapporti, è dovuta sovratutto al *Fiedler* (*Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft zu Zürich*, Bd. 15, oppure *Darstellende Geometrie* §§ 138-145), il quale ritornò sulla definizione geometrica delle coordinate omogenee projettive della retta nello spazio introdotte dal *Cayley* (come già dicemmo al § 85), studiandone anche la trasformazione.

Ma è da notare che già il *Möbius*, sotto il titolo di *calcolo baricentrico abbreviato*, aveva introdotto come coordinate di un punto (in una retta o in un piano o nello spazio) i rapporti delle sue coordinate baricentriche a quelle di un punto fisso; i quali rapporti non sono che le coordinate projettive del punto (il punto fisso essendo il punto *unità*). Il *Möbius* aveva anche osservato che tali coordinate si possono definire come doppî rapporti, ne aveva rilevata l'utilità per lo studio di quelle proprietà che non si alterano per collineazioni, e ne aveva fatte applicazioni, mostrando di riconoscerne la grande importanza.

Nei varî trattati dell'*Hesse* i giovani studiosi potranno trovare molte applicazioni facili ma notevoli della notazione abbreviata e delle coordinate omogenee. In questi trattati, in quelli del *Salmon*, nelle « *Trilinear Coordinates* » del *Ferrers*, essi potranno acquistare una conoscenza più completa della teoria e delle applicazioni delle coordinate omogenee.

Forme di 1ª specie.

§ 93. 1° In una retta punteggiata, dati tre punti A_1 A_2 B, si può assumere come coordinata di un punto qualunque P il doppio rap-

porto determinato da **P** con $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{B}$ in un ordine assegnato (§ 9), p. es. $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{BP})$; e però, chiamando $x_1\,x_2$ due numeri tali che

$$x_1 : x_2 = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{BP}) = \frac{\mathbf{A}_2\mathbf{P}}{\mathbf{A}_2\mathbf{B}} : \frac{\mathbf{A}_1\mathbf{P}}{\mathbf{A}_1\mathbf{B}},$$

si possono definire $x_1\,x_2$ come *coordinate omogenee projettive* del punto **P**. Esse sono eguali o proporzionali a' rapporti $\frac{\mathbf{A}_2\mathbf{P}}{\mathbf{A}_2\mathbf{B}}$, $\frac{\mathbf{A}_1\mathbf{P}}{\mathbf{A}_1\mathbf{B}}$, cioè alle misure dei segmenti $\mathbf{A}_2\mathbf{P}$ e $\mathbf{A}_1\mathbf{P}$ riferiti risp. a $\mathbf{A}_2\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}_1\mathbf{B}$.

Pel punto $\mathbf{A}_2$ si ha $x_1 : x_2 = 0$, cioè $x_1 = 0$ e x_2 arbitrario (ma non zero). Per $\mathbf{A}_2$ si ha $x_1 : x_2 = \infty$, cioè $x_2 = 0$ e x_1 arbitrario (ma non zero). Per **B** si ha $x_1 : x_2 = 1$, $x_1 = x_2$.

$\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2$ diconsi punti *fondamentali* e **B** punto *unità*. Tutti tre diconsi punti *di riferimento*.

Se **B** è medio fra $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$, $x_1\,x_2$ divengono le coordinate baricentriche (§ 5).

Se $\mathbf{A}_1$ va all'infinito, $x_1 : x_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{P} : \mathbf{A}_2\mathbf{B}$ diviene l'ascissa di **P** rispetto a $\mathbf{A}_2$ come origine e $\mathbf{A}_2\mathbf{B}$ come unità lineare.

Il doppio rapporto di quattro punti (x_1x_2), (y_1y_2), (z_1z_2), (t_1t_2) è

$$\frac{(x_1z_2 - x_2z_1)\ (y_1t_2 - y_2t_1)}{(x_1t_2 - x_2t_1)\ (y_1z_2 - y_2z_1)}.$$

2° In un fascio di rette siano $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{b}$ tre rette date; e per coordinate omogenee projettive di una retta qualunque **r** assumiamo due numeri $x_1\,x_2$ tali che

$$x_1 : x_2 = (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{br}) = \frac{\operatorname{sen}\mathbf{a}_2\mathbf{r}}{\operatorname{sen}\mathbf{a}_2\mathbf{b}} : \frac{\operatorname{sen}\mathbf{a}_1\mathbf{r}}{\operatorname{sen}\mathbf{a}_1\mathbf{b}} \quad (\S\ 21).$$

È facile vedere che $x_1\,x_2$ sono eguali o proporzionali ai numeri che misurano le distanze di un punto qualunque di **r** da $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_1$, riferite risp. alle distanze di un punto di **b** da $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_1$.

Per $\mathbf{a}_2$ $x_1 : x_2 = 0$, per $\mathbf{a}_1$ $x_1 : x_2 = \infty$, per **b** $x_1 : x_2 = 1$; $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ diconsi rette *fondamentali*, **b** retta *unità*.

Se **b** biseca l'angolo $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $x_1 : x_2 = \operatorname{sen}\mathbf{a}_2\mathbf{r} : \operatorname{sen}\mathbf{r}\mathbf{a}_1$, e $x_1\,x_2$ divengono le analoghe alle coordinate baricentriche della punteggiata.

3° Pel fascio di piani si ripeta quanto si è detto pel fascio di rette, cambiando la parola *retta* in *piano*.

Forme di 2ª specie.

§ 94. 1° In un piano punteggiato siano $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3\,\mathbf{B}$ quattro punti, di cui tre qualunque non in una retta. Sono allora determinati tre fasci di rette co' centri in $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$; e in ciascun fascio son date tre rette, cioè quelle che uniscono $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3\,\mathbf{B}$, e così via. Per un punto qualunque $\mathbf{P}$ del piano passano tre rette, una per fascio, e bastano due a individuare $\mathbf{P}$. Adoprando pei fasci coordinate omogenee proiettive, possiamo trovare tre numeri $x_1\,x_2\,x_3$ tali che (*)

$$x_1 : x_3 = \mathbf{A}_2\,(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{BP}), \quad x_2 : x_3 = \mathbf{A}_1\,(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{BP}),$$

e quindi definire $x_1\,x_2\,x_3$ come coordinate omogenee projettive del punto $\mathbf{P}$.

Indicando con $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3$ le rette $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\;\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\;\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, si ha facilmente

$$x_2 : x_3 = \mathbf{A}_1\,(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{BP}) = \frac{\mathbf{Pa}_2}{\mathbf{Ba}_2} : \frac{\mathbf{Pa}_3}{\mathbf{Ba}_3}, \quad x_3 : x_1 = \mathbf{A}_2\,(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\mathbf{BP}) = \frac{\mathbf{Pa}_3}{\mathbf{Ba}_3} : \frac{\mathbf{Pa}_1}{\mathbf{Ba}_1};$$

onde $x_1\,x_2\,x_3$ sono eguali o proporzionali ai tre rapporti di distanze $\frac{\mathbf{Pa}_1}{\mathbf{Ba}_1}, \frac{\mathbf{Pa}_2}{\mathbf{Ba}_2}, \frac{\mathbf{Pa}_3}{\mathbf{Ba}_3}$. E si ha pure

$$\mathbf{A}_3\,(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{BP}) = \frac{\mathbf{Pa}_1}{\mathbf{Ba}_1} : \frac{\mathbf{Pa}_2}{\mathbf{Ba}_2} = x_1 : x_2.$$

Pei punti di $\mathbf{a}_1$ si ha $x_1 = 0$; e così via. Pel punto $\mathbf{A}_1$ si ha $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, x_1 arbitrario (ma diverso da zero); e così via. Per $\mathbf{B}$ si ha $x_1 = x_2 = x_3$.

$\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$ é $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3$ si chiamano punti e rette *fondamentali*, $\mathbf{B}$ punto *unità*.

Le presenti coordinate sogliono anche chiamarsi *trilineari* o *trimetriche*, particolarmente quando per $\mathbf{B}$ si scelga il centro del

---

(*) Se **A B C D E** sono punti di un piano, la notazione **A(BCDE)** sta pel doppio rapporto delle rette **AB AC AD AE**.

Analogamente per cinque rette **a b c d e**.

circolo iscritto nel triangolo $A_1A_2A_3$; nel qual caso le coordinate $x_1\, x_2\, x_3$ sono proporzionali alle distanze del punto **P** dai lati del triangolo.

Se per **B** si sceglie il punto d'intersezione delle mediane del triangolo $A_1A_2A_3$; allora dette B_1 P_1 le projezioni di **B** **P** da A_1 su a_1, si ha $x_2 : x_3 = A_1\,(A_2A_3BP) = (A_2A_3B_1P_1) = A_3P_1 : P_1A_2$, e così via; dunque $x_1\, x_2\, x_3$ divengono le coordinate baricentriche (§ 29). È facile vedere che esse sono eguali o proporzionali ai prodotti delle distanze di **P** dai lati del triangolo per le lunghezze dei lati medesimi, od anche alle aree dei triangoli PA_2A_3 PA_3A_1 PA_1A_2; e però diconsi anche coordinate *triangolari*.

Anche il sistema cartesiano è caso particolare del proiettivo. Poichè, se A_1 A_2 vanno all'infinito sulle a_2 a_1, i fasci corrispondenti sono sistemi di rette parallele alle a_2 a_1, e si ha

$$x_1 : x_3 = (A_1A_3B_2P_2) = A_3P_2 : A_3B_2, \quad x_2 : x_3 = (A_2A_3B_1P_1) = A_3P_1 : A_3B_1;$$

sicchè, se si sceglie $A_3B_1 = A_3B_2 = 1$, i rapporti $x_1 : x_3$, $x_2 : x_3$ non sono che le ovvie coordinate cartesiane di **P** rispetto alle rette a_2 a_1 come assi.

2° In un piano rigato siano date quattro rette a_1 a_2 a_3 c, di cui tre qualunque non di un fascio. Si hanno allora tre punteggiate su a_1 a_2 a_3, di ciascuna delle quali sono dati tre punti. Una retta r del piano ha un punto in ciascuna delle tre punteggiate, e due di essi la individuano. Adoperando coordinate projettive per quelle punteggiate, definiamo per coordinate omogenee projettive della retta r tre numeri u_1 u_2 u_3 tali che sia

$$u_1 : u_3 = a_2(a_1a_3cr), \quad u_2 : u_3 = a_1(a_2a_3cr).$$

Chiamando A_1 A_2 A_3 i punti a_2a_3 a_3a_1 a_1a_2, si ha

$$u_2 : u_3 = a_1\,(a_2a_3cr) = \frac{A_2r}{A_2c} : \frac{A_3r}{A_3c}, \quad u_3 : u_1 = a_2\,(a_3a_1cr) = \frac{A_3r}{A_3c} : \frac{A_1r}{A_1c};$$

onde u_1 u_2 u_3 sono eguali o proporzionali ai rapporti di distanze $\frac{A_1r}{A_1c}$, $\frac{A_2r}{A_2c}$, $\frac{A_3r}{A_3c}$. Ed è pure

$$a_3\,(a_1a_2cr) = \frac{A_1r}{A_1c} : \frac{A_2r}{A_2c} = u_1 : u_2.$$

Per ogni retta del fascio $\mathbf{A}_1$ si ha $u_1 = 0$, ecc. Per $\mathbf{a}_1$ si ha $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ e u_1 arbitrario; ecc. Per $\mathbf{c}$ si ha $u_1 = u_2 = u_3$.

$\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$ si chiamano rette e punti *fondamentali*, $\mathbf{c}$ retta *unità*.

Se per $\mathbf{c}$ si sceglie la retta all'infinito del piano, $u_1\,u_2\,u_3$ diventano uguali o proporzionali alle distanze di $\mathbf{r}$ da $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$, e si chiamano coordinate *tripunte* o *trimetriche* di $\mathbf{r}$.

Supponendo che $\mathbf{a}_3$ sia la retta all'infinito del piano, e indicando con $\mathbf{C}_1\,\mathbf{R}_1\ldots$ i punti $\mathbf{ca}_1\,\mathbf{ra}_1\ldots$, si ha

$$u_2 : u_3 = \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{cr}) = \mathbf{A}_3\mathbf{C}_1 : \mathbf{A}_3\mathbf{R}_1\,, \quad u_1 : u_3 = \mathbf{a}_2(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\mathbf{cr}) = \mathbf{A}_3\mathbf{C}_2 : \mathbf{A}_3\mathbf{R}_2\,;$$

e quindi, se si prende $\mathbf{A}_3\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_3\mathbf{C}_2 = -1$, $u_1 : u_3$ e $u_2 : u_3$ divengono $-1 : \mathbf{A}_3\mathbf{R}_2$ e $-1 : \mathbf{A}_3\mathbf{R}_1$, cioè (§ 49) le coordinate plückeriane della $\mathbf{r}$ rispetto agli assi $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2$.

3° Per definire un sistema di coordinate omogenee projettive in una stella di rette o di piani, basta ripetere quanto si è esposto pel piano punteggiato o rigato, sostituendo ai punti ed alle rette del piano le rette e i piani della stella.

Applicazioni.

§ 95. Consideriamo ora un piano punteggiato e un piano rigato sovrapposti, anzi riferiti a uno stesso triangolo $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$ o trilatero $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$.

Conservando le indicazioni precedenti, si ha pei teoremi di Ceva e di Menelao (§ 29, es. 1 e 2)

$$\frac{\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1}{\mathbf{B}_1\mathbf{A}_3}\cdot\frac{\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2}{\mathbf{B}_2\mathbf{A}_1}\cdot\frac{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_3}{\mathbf{B}_3\mathbf{A}_2} = 1, \quad \frac{\mathbf{A}_2\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_1\mathbf{A}_3}\cdot\frac{\mathbf{A}_3\mathbf{C}_2}{\mathbf{C}_2\mathbf{A}_1}\cdot\frac{\mathbf{A}_1\mathbf{C}_3}{\mathbf{C}_3\mathbf{A}_2} = -1,$$

onde dividendo

$$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1).(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2).(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{C}_3\mathbf{B}_3) = -1\,;$$

e però potremo determinare tre numeri $k_1\,k_2\,k_3$ tali che

$$k_2 : k_3 = -(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1), \quad k_3 : k_1 = -(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1\mathbf{C}_2\mathbf{B}_2), \quad k_1 : k_2 = -(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{C}_3\mathbf{B}_3).$$

Avremo quindi

$$-k_2 x_2 u_2 : k_3 x_3 u_3 = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{C}_1\mathbf{B}_1).(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1\mathbf{P}_1).(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{R}_1\mathbf{C}_1) = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{R}_1\mathbf{P}_1),$$

e analogamente

$$-k_1 x_1 u_1 : k_3 x_3 u_3 = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{R}_2\mathbf{P}_2);$$

onde

$$-(k_1 x_1 u_1 + k_2 x_2 u_2) : k_3 x_3 u_3 = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{R}_1\mathbf{P}_1) + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{R}_2\mathbf{P}_2).$$

Ora se **P** sta su **r**, e solo allora, projettando da **P** su $\mathbf{a}_1$ si ha

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{R}_2\mathbf{P}_2) = (\mathbf{P}_1\mathbf{A}_3\mathbf{R}_1\mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_2\mathbf{R}_1\mathbf{A}_3\mathbf{P}_1),$$

onde

$$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{R}_1\mathbf{P}_1) + (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{R}_2\mathbf{P}_2) = (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{R}_1\mathbf{P}_1) + (\mathbf{A}_2\mathbf{R}_1\mathbf{A}_3\mathbf{P}_1) = 1 \quad (\S\ 7);$$

dunque sarà

$$k_1 x_1 u_1 + k_2 x_2 u_2 + k_3 x_3 u_3 = 0$$

la condizione perchè il punto **P** stia sulla retta **r**.

Essa è lineare e omogenea nelle $x_1\, x_2\, x_3$, ed è lineare omogenea nelle $u_1\, u_2\, u_3$.

Data **r**, cioè dati i rapporti di $u_1\, u_2\, u_3$, questa è l'equazione della retta **r** come punteggiata. Dato **P**, cioè dati i rapporti di $x_1\, x_2\, x_3$, essa è l'equazione del punto **P** come centro di un fascio.

Se $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ si suppongono armonici con $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ rispetto a $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$ e $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1$, sarà $k_1 = k_2 = k_3$, e quindi sarà anche $\mathbf{C}_3$ armonico di $\mathbf{B}_3$ rispetto a $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$: allora il punto **B** può dirsi *armonico* con la retta **c**, e l'ultima equazione diverrà

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Se inoltre $\mathbf{a}_3$ è la retta all'infinito e $\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_3\mathbf{B}_2 = 1$, onde $\mathbf{A}_3\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_3\mathbf{C}_2 = -1$, allora $x_1 : x_3$, $x_2 : x_3$ sono (come già osservammo) le coordinate cartesiane $x\, y$, e $u_1 : u_3$, $u_2 : u_3$ sono le coordinate plückeriane $u\ v$; e però l'equazione diviene

$$ux + vy + 1 = 0$$

come al § 49.

§ 96. Il fatto: che la condizione perchè un punto stia su una retta è lineare omogenea nelle coordinate omogenee projettive del

punto e lineare omogenea nelle coordinate omogenee projettive della retta, sussiste anche nel caso particolare delle coordinate cartesiane di punti e plückeriane di rette, quando le coordinate si denotino come rapporti di due numeri a un terzo. Questa analogia è cagione, che le principali formole da noi esposte relativamente alle coordinate cartesiane di punti e plückeriane di rette, si estendano con leggerissime modificazioni alle coordinate projettive di punti e rette. La conformità è meno appariscente in quelle formole che si riferiscono a relazioni metriche, ma spicca in quelle che si riferiscono a relazioni projettive. Valgano alcuni esempî; nei quali supporremo, come si suol fare, che il punto unità e la retta unità si siano scelti in modo, che la condizione perchè il punto $(x_1\, x_3\, x_3)$ cada sulla retta $(u_1\, u_2\, u_3)$ sia $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$.

La condizione perchè tre punti $(x_1 x_2 x_3)$, $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ siano in una retta è

$$[x_1 y_2 z_3] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è anche l'equazione della retta per due punti dati $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$, se $(x_1 x_2 x_3)$ varia.

Le coordinate di questa retta sono dunque

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},$$

cioè i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

E le coordinate di un punto qualunque della retta sono

$$(ly_1 + mz_1, \quad ly_2 + mz_2, \quad ly_3 + mz_3);$$

dove $m : l$ varia col punto stesso, essendo proporzionale al rapporto delle distanze di questo dai punti $(y_1\, y_2\, y_3)$, $(z_1\, z_2\, z_3)$.

Del pari: la condizione perchè tre rette $(u_1 u_2 u_3)$, $(v_1 v_2 v_3)$, $(w_1 w_2 w_3)$ passino per uno stesso punto è

$$[u_1 v_2 w_3] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è anche l'equazione del punto comune a due rette date $(v_1\, v_2\, v_3)$, $(w_1\, w_2\, w_3)$, se $(u_1\, u_2\, u_3)$ varia.

Le coordinate di questo punto sono

$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix},$$

cioè i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

E le coordinate di una retta qualunque pel punto sono

$$(\lambda v_1 + \mu w_1, \quad \lambda v_2 + \mu w_2, \quad \lambda v_3 + \mu w_3),$$

dove $\mu : \lambda$ varia con la retta proporzionalmente al rapporto dei seni degli angoli che la retta stessa fa colle $(v_1\, v_2\, v_3)$, $(w_1\, w_2\, w_3)$.

Mentre una retta r con legge qualsiasi si allontana indefinitamente, i rapporti delle distanze $A_1 r$ $A_2 r$ $A_3 r$ tendono all'unità; e però i rapporti delle coordinate $u_1\, u_2\, u_3$ di r tendono a divenire quelli di $\frac{1}{A_1 c}$, $\frac{1}{A_2 c}$, $\frac{1}{A_3 c}$. Indicando dunque con $i_1\, i_2\, i_3$ tre numeri proporzionali a $\frac{1}{A_1 c}$, $\frac{1}{A_2 c}$, $\frac{1}{A_3 c}$, essi saranno le coordinate della retta all'infinito.

Ne segue che due rette $(u_1\, u_2\, u_3)$, $(v_1\, v_2\, v_3)$ sono parallele se

$$[u_1\, v_2\, i_3] = 0.$$

§ **97**. Siano $x_1\, x_2\, x_3$ e $X_1\, X_2\, X_3$ le coordinate projettive di uno stesso punto riferito a due diversi sistemi di riferimento (triangoli fondamentali e punti unità). Supponiamo che i lati del 2° triangolo

e il nuovo punto unità abbiano per coordinate nel 1° sistema $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$, $(c_1 c_2 c_3)$ e $(d_1 d_2 d_3)$, ossia supponiamo che quei lati riferiti al 1° sistema abbiano per equazioni

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0,\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0.$$

Or siccome i medesimi lati nel 1° sistema hanno per equazioni

$$X_1=0,\quad X_2=0,\quad X_3=0,$$

dove in luogo di $X_1\ X_2\ X_3$ s'intendono poste le loro espressioni in funzione di $x_1\ x_2\ x_3$, così dovrà l'espressione di X_1 differire da $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ per un fattore; anzi, potendo moltiplicarsi $a_1\ a_2\ a_3$ per uno stesso numero, potrà X_1 prendersi uguale a $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, e così via. Avremo dunque

$$[1]\qquad \begin{aligned} X_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,\\ X_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,\\ X_3 &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3. \end{aligned}$$

E poichè le nuove coordinate del punto di antiche coordinate $d_1 d_2 d_3$ devono essere eguali, i tre fattori suddetti, per cui si moltiplicano risp. $a_1\ a_2\ a_3$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$, dovranno rendere

$$a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 = b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 = c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3.$$

Le equazioni [1] costituiscono la sostituzione lineare per la trasformazione delle coordinate projettive de' punti.

Da esse si trae, indicando con $A_1 \ldots$ i suddeterminanti complementari di $a_1 \ldots$ nel determinante $\Delta = [a_1\ b_2\ c_3]$, che non è nullo:

$$[2]\qquad \begin{aligned} \Delta x_1 &= A_1X_1 + B_1X_2 + C_1X_3,\\ \Delta x_2 &= A_2X_1 + B_2X_2 + C_2X_3,\\ \Delta x_3 &= A_3X_1 + B_3X_2 + C_3X_3; \end{aligned}$$

onde i lati del 1° triangolo hanno per coordinate rispetto al 2° sistema di riferimento $(A_1B_1C_1)$, $(A_2B_2C_2)$, $(A_3B_3C_3)$.

Se poi $u_1\ u_2\ u_3$ e $U_1\ U_2\ U_3$ sono le coordinate projettive di una stessa retta rispetto a' due sistemi di riferimento, $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3$

dovrà trasformarsi in $U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3$ a meno di un fattore; ma si ha dalle [1]

$$U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3$$
$$=(a_1U_1+b_1U_2+c_1U_3)x_1+(a_2U_1+b_2U_2+c_2U_3)x_2+(a_3U_1+b_3U_2+c_3U_3)x_3;$$

dunque potremo assumere

$$[3] \qquad \begin{aligned} u_1 &= a_1U_1 + b_1U_2 + c_1U_3, \\ u_2 &= a_2U_1 + b_2U_2 + c_2U_3, \\ u_3 &= a_3U_1 + b_3U_2 + c_3U_3, \end{aligned}$$

sostituzione lineare per la trasformazione delle coordinate delle rette.

Quindi segue

$$[4] \qquad \begin{aligned} \Delta U_1 &= A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3, \\ \Delta U_2 &= B_1u_1 + B_2u_2 + B_3u_3, \\ \Delta U_3 &= C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3. \end{aligned}$$

È chiaro che $(a_1\, b_1\, c_1)$, $(a_2\, b_2\, c_2)$, $(a_3\, b_3\, c_3)$ sono le coordinate dei vertici del 1° triangolo rispetto al 2° sistema, e $(A_1\, A_2\, A_3)$, $(B_1\, B_2\, B_3)$, $(C_1\, C_2\, C_3)$ quelle de' vertici del 2° triangolo rispetto al 1° sistema.

Va notato che nulla vieta supporre nelle precedenti sostituzioni che $x_1\, x_2\, x_3$, $X_1X_2X_3$ siano coordinate di una stessa retta di un dato piano riferita a due trilateri diversi, e che $u_1\, u_2\, u_3$, $U_1\, U_2\, U_3$ siano coordinate di uno stesso punto del dato piano riferito a quei due trilateri.

La sostituzione lineare [1] contiene nove coefficienti arbitrarî; ma il suo significato geometrico è determinato quando son dati i rapporti di otto coefficienti al rimanente.

Essa è suscettiva di altre importanti interpretazioni geometriche.

Se infatti si suppone che $x_1\, x_2\, x_3$ e $X_1\, X_2\, X_3$ siano le coordinate projettive di due punti in due piani punteggiati (distinti o sovrapposti), è facile vedere che allora la sostituzione [1] stabilisce una corrispondenza omografica fra i due piani (cfr. § 46) (*).

(*) Perciò le proprietà projettive delle figure si possono definire, sia come quelle che non dipendono dal sistema di riferimento, sia come quelle che si conservano facendo una trasformazione omografica delle figure stesse. E poichè la [1] è una trasformazione lineare generale, si vede pure che (da un certo punto di vista) *la geometria projettiva coincide coll'algebra delle trasformazioni lineari;* concetto fecondo, a cui son dovuti molti progressi fatti in questi ultimi tempi dalla geometria e dall'algebra.

Se $x_1 x_2 x_3$ e $X_1 X_2 X_3$ indicassero coordinate projettive di rette in due piani rigati, la sostituzione [1] stabilirebbe una corrispondenza omografica fra' due piani (cfr. § 52).

Che se $x_1 x_2 x_3$ e $X_1 X_2 X_3$ indicassero rispettivamente le coordinate di un punto e di una retta in un piano (o viceversa); allora la sostituzione [1] stabilirebbe fra' due piani una corrispondenza correlativa (cfr. § 52).

Trattando delle forme di 1ª specie, abbiamo omesso d'investigare il significato geometrico della sostituzione lineare

$$X_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad X_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

in cui $x_1 x_2$, $X_1 X_2$ siano coordinate projettive di elementi variabili di forme di 1ª specie, e $a_1\ a_2\ b_1\ b_2$ quantità date. Se il determinante $[a_1 b_2]$ non è nullo, la proposta sostituzione può ricevere le seguenti interpretazioni:

Possono $x_1 x_2$ e $X_1 X_2$ esser le coordinate di uno stesso elemento variabile di una forma di 1ª specie, riferito a diversi elementi fondamentali e unità.

Oppure possono $x_1 x_2$ e $X_1 X_2$ esser le coordinate di due elementi variabili di due date forme di 1ª specie. Allora questi elementi sono corrispondenti in una omografia, la quale può essere la più generale.

Il significato geometrico della proposta sostituzione dipende da tre quantità, cioè i rapporti di tre delle $a_1\ a_2\ b_1\ b_2$ alla rimanente.

La sostituzione inversa della proposta è

$$[a_1 b_2] x_1 = b_2 X_1 - a_2 X_2, \quad [a_1 b_2] x_2 = - b_1 X_1 + a_1 X_2.$$

Forme di 3ª specie.

§ 98. 1° Dati nello spazio punteggiato cinque punti $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{B}$, di cui quattro qualunque non in un piano; si hanno sei fasci di piani intorno alle rette che uniscono due dei punti $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4$, e di ciascun fascio son dati tre piani. Per un punto qualunque $\mathbf{P}$ passa un piano di ciascun fascio; ma tre di questi piani hanno una retta comune se gli assi de' tre fasci cui appartengono passano per uno

stesso dei punti $A_1A_2A_3A_4$; onde **P** non sarebbe individuato da essi. Invece **P** è individuato dai piani di tre fasci i cui assi siano in un piano, come A_1A_2 A_2A_3 A_3A_1. Scelte in ciascun fascio coordinate projettive, possiamo trovare quattro numeri x_1 x_2 x_3 x_4 tali che (*)

$$x_1 : x_4 = A_2A_3(A_1A_4BP),\quad x_2 : x_4 = A_3A_1(A_2A_4BP),\quad x_3 : x_4 = A_1A_2(A_3A_4BP),$$

e definirli come coordinate omogenee projettive del punto **P**.

Indicando con α_1 α_2 α_3 α_4 i piani $A_2A_3A_4$ $A_3A_4A_1$ $A_4A_1A_2$ $A_1A_2A_3$, si ha

$$x_1 : x_4 = \frac{P\alpha_1}{B\alpha_1} : \frac{P\alpha_4}{B\alpha_4},\quad x_2 : x_4 = \frac{P\alpha_2}{B\alpha_2} : \frac{P\alpha_4}{B\alpha_4},\quad x_3 : x_4 = \frac{P\alpha_3}{B\alpha_3} : \frac{P\alpha_4}{B\alpha_4};$$

vale a dire che x_1 x_2 x_3 x_4 sono eguali o proporzionali ai rapporti di distanze $\frac{P\alpha_1}{B\alpha_1}$, $\frac{P\alpha_2}{B\alpha_2}$, $\frac{P\alpha_3}{A\alpha_3}$, $\frac{P\alpha_4}{B\alpha_4}$.

E si ha pure

$$x_1 : x_2 = A_3A_4(A_1A_2BP),\quad x_2 : x_3 = A_1A_4(A_2A_3BP),\quad x_3 : x_1 = A_2A_4(A_3A_1BP).$$

Pei punti di α_1 si ha $x_1 = 0$; ecc. Pei punti di A_1A_2 si ha $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$; ecc. Per A_1 si ha $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e x_1 arbitrario; ecc. Per **B** si ha $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

I punti A_1 A_2 A_3 A_4 e i piani α_1 α_2 α_3 α_4 si dicono *fondamentali*, e **B** punto *unità*.

Se **B** è il centro della sfera iscritta nel tetraedro $A_1A_2A_3A_4$, le coordinate sono proporzionali alle distanze di **P** dalle facce α_1 α_2 α_3 α_4, e si dicono anche coordinate *quadriplanari* o *tetrametriche*.

Se **B** è il centro delle medie distanze de' punti A_1 A_2 A_3 A_4, le coordinate projettive si riducono alle baricentriche (§ 63). Poichè, dette B_{12} P_{12} le projezioni di **B** **P** da A_3A_4 su A_1A_2, e così via, risulta B_{12} medio fra A_1 e A_2, ecc.; onde $x_1 : x_4 = (A_1A_4B_{14}P_{14}) = A_4P_{14} : P_{14}A_1$, e così via; e però x_1 x_2 x_3 x_4 sono veramente le coordinate baricentriche di **P** riferito a $A_1A_2A_3A_4$. Esse sono proporzionali ai volumi dei tetraedri $PA_2A_3A_4$, $-PA_1A_3A_4$, $PA_1A_2A_4$, $-PA_1A_2A_3$, e diconsi perciò anche coordinate *tetraedrali*.

(*) Se **A** **B**... sono punti nello spazio, **AB(CDEF)** denota il doppio rapporto dei quattro piani **ABC** **ABD** **ABE** **ABF**.

Analogamente per dei piani α β...

Se $A_1\, A_2\, A_3$ vanno all'infinito su tre rette fisse di una stella di centro A_4, si ha

$$x_1 : x_4, = A_4P_{14} : A_4B_{14}, \quad x_2 : x_4 = A_4P_{24} : A_4B_{24}, \quad x_3 : x_4 = A_4P_{34} : A_4B_{34};$$

e preso B in modo che $A_4B_{14} = A_4B_{24} = A_4B_{34} = 1$, i rapporti $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$ si riducono alle coordinate cartesiane di P rispetto alle tre rette fisse.

2° Nello spazio di piani, dati cinque piani $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \gamma$, di cui quattro qualunque non di una stella, per coordinate omogenee projettive di un piano qualunque ρ si possono assumere quattro numeri $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$ tali che

$$u_1 : u_4 = \alpha_2\alpha_3\,(\alpha_1\alpha_4\gamma\rho), \quad u_2 : u_4 = \alpha_3\alpha_1\,(\alpha_2\alpha_4\gamma\rho), \quad u_3 : u_4 = \alpha_1\alpha_2\,(\alpha_3\alpha_4\gamma\rho),$$

vale a dire quattro numeri proporzionali ai rapporti di distanze $\frac{A_1\rho}{A_1\gamma}, \frac{A_2\rho}{A_2\gamma}, \frac{A_3\rho}{A_3\gamma}, \frac{A_4\rho}{A_4\gamma}$, ove $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ indicano i punti $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$ $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Pei piani passanti per A_1 è $u_1 = 0$; ecc. Pei piani per A_1A_2 o $\alpha_3\alpha_4$ è $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$; ecc. Per α_1 è $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ e u_1 arbitrario; ecc. Per γ è $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$. I piani $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ e i punti $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ si dicono *fondamentali*, e γ piano *unità*.

Se γ è il piano all'infinito, le coordinate $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$ diventano proporzionali alle distanze di ρ dai punti $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$, e si dicono anche coordinate *quadripunte* o *tetrametriche*.

Se α_4 è il piano all'infinito, indicando con $C_{14}\, R_{14}$... i punti $\gamma\alpha_2\alpha_3$ $\rho\alpha_2\alpha_3$..., abbiamo

$$u_1 : u_4 = (A_4A_1C_{14}R_{14}) = A_4C_{14} : A_4R_{14},$$
$$u_2 : u_4 = A_4C_{24} : A_4R_{24}, \quad u_3 : u_4 = A_4C_{34} : A_4R_{34};$$

e prendendo γ in modo che $A_4C_{14} = A_4C_{24} = A_4C_{34} = -1$, $u_1 : u_4$, $u_2 : u_4$, $u_3 : u_4$ si riducono alle coordinate plückeriane del piano ρ rispetto a tre assi $\alpha_1\sigma_2$ $\alpha_2\alpha_3$ $\alpha_3\alpha_1$ (§ 80).

Applicazioni.

§ 99. Consideriamo ora i punti e i piani dello spazio riferiti a uno stesso tetraedro; e conservando le notazioni testè adottate, poniamo

$$-k_1:k_4=(A_1A_4C_{14}B_{14}),\quad -k_2:k_4=(A_2A_4C_{24}B_{24}),\quad -k_3:k_4=(A_3A_4C_{34}B_{34}).$$

Poichè nel piano α_1 le A_2B_{34} A_3B_{24} A_4B_{23} passano per un punto e C_{34} C_{24} C_{23} sono in una retta, sarà

$$-k_2:k_3=(A_2A_3C_{23}B_{23});$$

e analogamente

$$-k_3:k_1=(A_3A_1C_{31}B_{31}),\quad -k_1:k_2=(A_1A_2C_{12}B_{12}).$$

Ciò posto, si ha (§ 95)

$$\begin{aligned}-k_1x_1u_1 : k_4x_4u_4 &= (A_1A_4B_{14}P_{14}),\\ -k_2x_2u_2 : k_4x_4u_4 &= (A_2A_4B_{24}P_{24}),\\ -k_3x_3u_3 : k_4x_4u_4 &= (A_3A_4B_{34}P_{34});\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}&-(k_1x_1u_1+k_2x_2u_2+k_3x_3u_3) : k_4x_4u_4\\ &=(A_1A_4B_{14}P_{14})+(A_2A_4B_{24}P_{24})+(A_3A_4B_{34}P_{34}).\end{aligned}$$

Ma il 2° membro vale 1 quando il punto P sta nel piano ρ. Allora infatti, se P_1 è il punto comune alle A_2P_{34} A_3P_{24} A_4P_{23}, e S il punto comune alle $A_4P_{23}P_1$ $B_{24}B_{34}B_{23}$, poichè P sta sulla $B_{14}S$, si ha nel piano A_1A_4P (giusta il § 93) una prima relazione:

$$(A_1A_4B_{14}P_{14})+(P_{23}A_4SP_1)=1.$$

Similmente nel piano $A_2A_3A_4$, poichè S sta sulla $B_{24}B_{34}B_{23}$, se S′ e S″ sono le projezioni di S da A_3 su A_2A_4 e da A_2 su A_3A_4, si ha una

seconda relazione:

$$(A_2A_4R_{24}S') + (A_3A_4R_{34}S'') = 1;$$

la quale, per essere i gruppi $A_2A_4S'P_{24}$ e $A_3A_4S''P_{34}$ prospettivi a $P_{23}A_4SP_1$, ne porge

$$(A_2A_4R_{24}S').(A_2A_4S'P_{24}) + (A_3A_4R_{34}S'').(A_3A_4S''P_{34}) = (P_{23}A_4SP_1)$$

ovvero

$$(A_2A_4R_{24}P_{24}) + (A_3A_4R_{34}P_{34}) = (P_{23}A_4SP_1);$$

e sommando con la prima relazione,

$$(A_1A_4R_{14}P_{14}) + (A_2A_4R_{24}P_{24}) + (A_3A_4R_{34}P_{34}) = 1.$$

Dunque sarà

$$k_1x_1u_1 + k_2x_2u_2 + k_3x_3u_3 + k_4x_4u_4 = 0$$

la condizione perchè il punto P $(x_1x_2x_3x_4)$ stia nel piano ρ $(u_1u_2u_3u_4)$.

Essa è lineare omogenea nelle coordinate del punto e in quelle del piano.

Dato il piano ρ, ossia dati i rapporti di $u_1\,u_2\,u_3\,u_4$, questa è l'equazione del piano ρ (come punteggiato). Dato invece il punto P, ossia dati i rapporti di $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$, essa è l'equazione del punto P (come centro di una stella di piani).

Se $C_{14}\,C_{24}\,C_{34}$ si suppongono armonici con $B_{14}\,B_{24}\,B_{34}$ rispetto a A_1A_4 A_2A_4 A_3A_4, risulta $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$, ed anche $C_{12}\,C_{23}\,C_{31}$ risultano armonici con $B_{12}\,B_{23}\,B_{31}$ rispetto a A_1A_2 A_2A_3 A_3A_1: allora il punto B può dirsi *armonico* col piano γ, e l'ultima equazione diviene

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0.$$

Questo è il caso che generalmente si considera. Se inoltre α_4 è il piano all'infinito e $A_4B_{14} = 1$, si ricade nella equazione relativa a coordinate cartesiane di punti e plückeriane di piani (§ 80):

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

§ 100. Le principali formole in coordinate cartesiane di punti e plückeriane di piani si estendono agevolmente a coordinate projettive, visto che la condizione perchè un punto stia in un piano si conserva lineare nelle coordinate del punto e in quelle del piano.

Per esempio: la condizione perchè quattro punti $(x_1x_2x_3x_4)$, $(y_1y_2y_3y_4)$, $(z_1z_2z_3z_4)$, $(t_1t_2t_3t_4)$ stiano in un piano, è

$$[x_1y_2z_3t_4] = 0.$$

Questa è anche l'equazione del piano per tre punti dati $(y_1y_2y_3y_4)$, $(z_1z_2z_3z_4)$, $(t_1t_2t_3t_4)$, se $(x_1x_2x_3x_4)$ varia.

Le coordinate di questo piano sono

$$[y_2z_3t_4],\ -[y_1z_3t_4],\ [y_1z_2t_4],\ -[y_1z_2t_3];$$

e le coordinate di un punto qualunque del piano sono

$$\begin{aligned} &ly_1 + mz_1 + nt_1, \quad ly_2 + mz_2 + nt_2, \\ &ly_3 + mz_3 + nt_3, \quad ly_4 + mz_4 + nt_4. \end{aligned}$$

Intendendo con $x_1 \ldots$, $y_1 \ldots$, ... coordinate di piani, queste formole dànno la condizione perchè quattro piani passino per un punto, nonchè l'equazione e le coordinate del punto comune a tre piani, ecc.

Il piano all'infinito ha delle coordinate $i_1\, i_2\, i_3\, i_4$ proporzionali a $\frac{1}{A_1\Upsilon}, \frac{1}{A_2\Upsilon}, \frac{1}{A_3\Upsilon}, \frac{1}{A_4\Upsilon}$. Se ne deduce la condizione perchè due piani siano paralleli, ecc.

§ 101. Se $x_1x_2x_3x_4$ e $X_1X_2X_3X_4$ sono coordinate projettive di punti o di piani, una sostituzione lineare qualunque

$$[1] \qquad X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \ (i = 1, 2, 3, 4),$$

il cui determinante $\Delta = [a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}]$ non sia nullo, è suscettiva delle varie interpretazioni seguenti (cui si giunge con lo stesso procedimento del § 96):

Possono $x_1 \ldots$ e $X_1 \ldots$ essere le coordinate di uno stesso punto (o piano) riferito a due tetraedri distinti. Allora per le coordinate $u_1 \ldots$ e $U_1 \ldots$ di uno stesso piano (o punto) riferito ai due tetraedri si ha la sostituzione

$$[2] \qquad u_i = a_{1i}\ U_1 + a_{2i}\ U_2 + a_{3i}\ U_3 + a_{4i}\ U_4.$$

Possono $x_1 \ldots$ e $X_1 \ldots$ esser coordinate di due punti (o piani) in due spazî; vale a dire coordinate di due punti (o piani) riferiti a tetraedri distinti, od anche allo stesso tetraedro. Allora la proposta sostituzione [1] stabilisce una omografia fra i due spazî; e questa omografia può esser la più generale. La sostituzione [2] serve per le coordinate di due piani (o punti) corrispondenti nell'omografia.

Possono essere $x_1 \ldots$ coordinate di punti e $X_1 \ldots$ coordinate di piani (o viceversa). Allora la sostituzione [1] stabilisce una correlazione fra lo spazio dei punti e quello dei piani; e questa correlazione può esser la più generale.

In tutti questi casi il significato geometrico della sostituzione dipende da 15 quantità arbitrarie, bastando conoscere i rapporti di tutti i 16 coefficienti a_{ij} meno uno a quest'uno.

Spazio rigato.

§ 102. Scelto il tetraedro fondamentale e il punto unità, siano $x_1 x_2 x_3 x_4$ e $x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$ le coordinate projettive di due punti di una retta-raggio. Col procedimento tenuto nel § 84, si dimostra agevolmente che i sei determinanti della matrice di queste coordinate

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{vmatrix},$$

cioè i binomî

$$r_{12} = x_1 x'_2 - x_2 x'_1, \quad r_{23} = x_2 x'_3 - x_3 x'_2, \quad r_{31} = x_3 x'_1 - x_1 x'_3,$$
$$r_{14} = x_1 x'_4 - x_4 x'_1, \quad r_{24} = x_2 x'_4 = x_4 x'_2, \quad r_{34} = x_3 x'_4 - x_4 x'_3,$$

sono legati dalla relazione

$$r_{23}\, r_{14} + r_{31}\, r_{24} + r_{12}\, r_{34} = 0,$$

e possono assumersi come *coordinate omogenee* della retta-raggio riferita a quello stesso tetraedro.

Dualmente: scelto il tetraedro fondamentale e il piano unità, siano $u_1 u_2 u_3 u_4$ e $u'_1 u'_2 u'_3 u'_4$ le coordinate projettive di due piani

per una retta-asse. I sei determinanti della matrice di queste coordinate

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \end{vmatrix},$$

cioè i binomî

$$\rho_{12} = u_1 u'_2 - u_2 u'_1, \quad \rho_{23} = u_2 u'_3 - u_3 u'_2, \quad \rho_{31} = u_3 u'_1 - u_1 u'_3,$$
$$\rho_{14} = u_1 u'_4 - u_4 u'_1, \quad \rho_{24} = u_2 u'_4 - u_4 u'_2, \quad \rho_{34} = u_3 u'_4 = u_4 u'_3,$$

sono legati dalla relazione

$$\rho_{23}\rho_{14} + \rho_{31}\rho_{24} + \rho_{12}\rho_{34} = 0,$$

e possono assumersi come *coordinate omogenee* della retta-asse, riferita allo stesso tetraedro che i piani.

Se i punti e i piani sono riferiti allo stesso tetraedro, e se inoltre si suppone il punto unità armonico col piano unità (§ 99), allora fra le coordinate di una stessa retta, considerata come raggio e come asse, sussistono le relazioni

$$\frac{r_{23}}{\rho_{14}} = \frac{r_{14}}{\rho_{23}} = \frac{r_{31}}{\rho_{24}} = \frac{r_{24}}{\rho_{31}} = \frac{r_{12}}{\rho_{34}} = \frac{r_{34}}{\rho_{12}}.$$

La condizione, perchè due rette $(r_{12} \ldots)$, $(r'_{12} \ldots)$ stiano in un piano è

$$r_{23} r'_{14} + r_{14} r'_{23} + r_{31} r'_{24} + r_{24} r'_{31} + r_{12} r'_{34} + r_{34} r'_{12} = 0.$$

Una equazione lineare omogenea fra le coordinate di una retta rappresenta un complesso lineare.

E così via.

Pel significato geometrico delle sei coordinate di una retta testè definite, e per le relazioni metriche in coordinate omogenee fra punti, rette e piani, rimandiamo il lettore alla memoria: E. D'Ovidio, *Le relazioni metriche in coordinate omogenee* (*Giornale di Matematiche*, v. 11, 1873).

FINE.

ELEMENTI DI GEOMETRIA

DEI PROFESSORI

A. SANNIA ed E. D'OVIDIO

(delle Università di Napoli e di Torino).

QUINTA EDIZIONE

(XVII-559 pagine, 392 figure intercalate nel testo).

Prezzo Lire 6.

Questi *Elementi* presentano rispetto agli altri trattati moderni lo speciale vantaggio di esser concepiti e dettati in guisa che, pur attenendosi alla sostanza del metodo euclideo, conciliino questo con lo stato presente della scienza, attuando un voto manifestato dal Ministero di Pubblica Istruzione nel bandire un concorso di premio al miglior trattato (manoscritto) di Geometria per le Scuole classiche.

Se inoltre si tien presente che lo stesso Ministero, 10 anni or sono, autorizzava i Professori de' RR. Licei a insegnare la Geometria solida con la scorta di un trattato moderno, visto la incompiutezza dell'XI e XII libro degli Elementi di Euclide, si avrà la spiegazione del fatto: che *molti Professori de' RR. Licei hanno adottato gli Elementi di Geometria de' Prof. Sannia e D'Ovidio come libro di testo per la Geometria solida, e come guida a rivedere e compiere la Geometria piana già insegnata sull'Euclide.*

Altre pubblicazioni del Prof. E. D'OVIDIO.

Le funzioni metriche fondamentali negli spazî di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante (dalle Mem. de' Lincei, 1877) . L. 4 —

Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie (dalle Mem. dell'Accademia di Torino, 1879) . . . . . » 7 50

Sopra alcuni iperboloidi annessi alla cubica gobba (dalle Collect. math., 1879) . . . . . » 3 —

Sulle proprietà fondamentali de' complessi lineari (dagli Atti dell'Accademia di Torino, 1881) . . . . . » 2 —

Varie memorie sui complessi lineari nella metrica projettiva (Atti di Torino, Ann. di Mat., Mem. de' Lincei).

Varie note sulle forme binarie de' primi cinque gradi (Atti di Torino, Mem. de' XL).

TORINO — ERMANNO LOESCHER, EDITORE — **ROMA** E **FIRENZE**

LE PROPRIETÀ FONDAMENTALI

DELLE

CURVE DI SECOND'ORDINE

STUDIATE SULLA EQUAZIONE GENERALE DI SECONDO GRADO

IN COORDINATE CARTESIANE

Lezioni date nella Regia Università di Torino

DAL PROFESSORE

ENRICO D'OVIDIO

SECONDA EDIZIONE

riveduta ed aumentata

TORINO

ERMANNO LOESCHER

1883

Roma e Firenze presso la stessa Casa.

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Tip. V. BONA, via Ospedale, 3.

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Prego quei cultori della Geometria, ai quali verrà sott'occhio il presente opuscolo, di non volervi cercar dentro più di quanto io abbia avuto intenzione di mettervi. Esso va considerato soltanto come un capitolo di un corso elementare di Geometria analitica; e fu scritto con l'unico scopo di aiutare gli studenti a bene intendere la discussione della equazione generale di 2° grado in coordinate Cartesiane piane, e la riduzione della medesima equazione alle forme più ovvie e più semplici.

Avrei potuto render l'esposizione più elegante, più generale e più simmetrica, adottando la notazione a doppio indice per i coefficienti della equazione, e le coordinate omogenee, sia di punti sia di rette, invece delle Cartesiane. Ma da una parte la notazione a doppio indice avrebbe fatto più perdere in brevità di scrittura che guadagnare in simmetria; e d'altra parte l'uso sistematico delle coordinate omogenee sarebbe stato troppo precoce in un *primo* studio analitico delle sezioni coniche, destinato a far parte di un corso elementare; nel quale, se è utile che lo studente sia iniziato ai più moderni sistemi di coordinate, è però sopratutto necessario che egli si renda ben esperto dell'uso del sistema Cartesiano, come quello che, oltre ad avere una capitale importanza storica, è anche oggidì quasi l'unico adoperato nei trattati di Meccanica razionale ed applicata e nelle applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale. Del resto, chi desideri una esposizione fondata sulle coordinate omogenee, può consultare la Monografia da me stesso pubblicata parecchi anni or sono sotto il titolo « *Nuova esposizione della teoria generale delle curve di 2° ordine in coordinate trilineari* » (*), e troverà che il metodo è in sostanza lo stesso.

Non era del mio assunto entrare nella trattazione compiuta di tutte quelle proprietà delle curve coniche che sogliono formare il corredo dei trattati elementari di Geometria analitica, poichè gran parte di esse riescono più facili a dimostrare sulle forme ridotte della equazione di 2° grado; tuttavia, quando l'occasione si è presentata di dedurre senza molto sforzo qualche proprietà dalla equazione generale, l'ho fatto, e ben volentieri.

(*) Volumi VI e VII del *Giornale di Matematiche* diretto dal Ch. Prof. Battaglini, Napoli, editore B. Pellerano.

Perchè poi chi legge sia in grado di limitare secondo le proprie convenienze il numero di tali occasioni, ho contrassegnato con un asterisco quei paragrafi che possono esser tralasciati senza che perciò ne rimangano infirmati i seguenti.

Le ultime pagine contengono un'abbondante raccolta di questioni proposte allo studente, perchè possa esercitarsi ad applicare le formole e le proposizioni già apprese, e quindi apprezzarne meglio l'importanza e l'utilità pratica.

Trattandosi di un modesto lavoro d'indole didattica, non val la pena ch'io rilevi quel poco che per avventura potrà trovarvisi di mio proprio. Ho attinto a molte fonti, e specialmente all'eccellente trattato del SALMON « *A Treatise on Conic Sections* » (*), che soglio di preferenza proporre ai miei alunni come guida nei loro studi; ma non mi son limitato ad una mera compilazione.

Torino, 14 marzo 1876.

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

Essendosi resa necessaria la seconda edizione di questo opuscolo, io ho colto l'occasione per ritoccarlo accuratamente, allo scopo di rendere l'esposizione sempre più chiara e appropriata alle nostre scuole.

Non istarò ad enumerare i cangiamenti e le aggiunte che son venuto recando nel testo. Solo dirò che ho raddoppiato la raccolta degli esercizi proposti al lettore, scegliendoli in guisa che egli, provandosi a farli, abbia agio di sperimentare e confrontare i procedimenti più usitati, e acquisti al tempo stesso cognizione di molte belle proprietà delle curve di secondo ordine. Ho anche aggiunto in fine alcuni cenni storici, certo troppo pochi e succinti, ma bastevoli per invogliare e indirizzare il giovane studioso a procurarsene dei maggiori.

Torino, 1 novembre 1882.

E. D'OVIDIO.

(*) Segnaliamo la traduzione tedesca aumentata e ritoccata del FIEDLER (Lipsia, TEUBNER), e la italiana del sig. N. SALVATORE-DINO (Napoli, PELLERANO).

INDICE DELLE MATERIE

Preliminari	§§ 1 e 2	*pag.* 1
Formole fondamentali	3 e 4	9
Ellisse	5	13
Iperbole	6	15
Parabola	7	18
Epilogo della precedente discussione	8	21
Invarianti della funzione $f(x, y)$	9 e 10	25
Ordine di una curva algebrica	11 e 12	31
Tangente	13 e 14	36
Coordinate di rette ed equazioni tangenziali	15	41
Classe di una curva algebrica	16	43
Normale	17	45
Punti in involuzione	18	45
Tangenti, punti coniugati, poli e polari	19 e 20	48
Rette in involuzione	21	58
Rette coniugate	22 e 23	59
Figure polari-reciproche o coniugate	24	63
Triangoli coniugati	25	65
Quadrangoli e quadrilateri completi	26	67
Diametri, centro, asintoti	27	69
Diametri coniugati, assi	28	74
Altro modo di dimostrare le proprietà del centro, dei diametri, degli assi, degli asintoti	29	83
Un teorema di Newton	30	88
Osservazioni sull'iperbole equilatera, sul circolo, sulla coppia di rette	31	91
Fuochi	32	94
Direttrici	33	98
Alcune proprietà dei fuochi	34 e 35	99
Forme ridotte dalla equazione generale di 2° grado	36 e 37	105
Equazione riferita al centro	38	107
Equazione riferita a due diametri coniugati	39 e 40	108
Equazione riferita agli assi	41	114
Altro modo di ottenere l'equazione riferita agli assi	42	116
Iperbole riferita agli asintoti	43	118
Equazione riferita a un diametro e alla tangente nella sua estremità	44 e 45	120
Riduzione speciale della parabola	46	123
Esercizii	47	125
Cenni storici	48	147

CORREZIONI.

Pag.	20	verso	5	[14]	leggi	[12]'
»	24	»	23	*a*	»	*b*
»	79	»	1	quindi a	»	quindi anche questo è ortogonale a

Preliminari.

§ **1**. Si tratta di esaminare i luoghi geometrici, che possono essere rappresentati analiticamente da una equazione di 2° grado in coordinate *cartesiane* x, y, e che perciò diconsi luoghi *di 2° grado.*

La forma più generale di tale equazione è

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

ove i sei coefficienti a, b, c, d, e, f sono quantità date.

Alcuni coefficienti possono essere nulli; ma i tre primi non possono essere nulli insieme, altrimenti l'equazione si abbasserebbe al 1° grado. Inoltre supporremo che niun coefficiente possa essere infinito.

Benchè nella equazione entrino sei coefficienti, pure la forma e la posizione del luogo non dipende dai valori dei singoli coefficienti, ma solo dai rapporti di cinque fra essi al rimanente; infatti, l'equazione non alterandosi col moltiplicarne o dividerne i termini per una stessa quantità data, potremo dividere per uno dei coefficienti (che non sia nullo); allora al posto di quel coefficiente comparirà l'unità, e al posto degli altri compariranno i rapporti di essi al detto coefficiente. Quindi segue che *per determinare l'equazione di un luogo di 2° grado è sufficiente assegnare delle condizioni, le quali possano venir tradotte in cinque equazioni indipendenti fra i rapporti di cinque coefficienti al sesto, ossia in cinque equazioni omogenee fra i sei coefficienti.*

Quando le equazioni sono di 1° grado, il luogo è individuato, ossia determinato ed unico. Un minor numero di equazioni implicherebbe l'esistenza d'infiniti luoghi.

ALCUNI ESEMPI:

§ **2**. I. *Se si vuole che il luogo passi per l'origine*, l'equazione [A] dovrà essere soddisfatta da $x = 0$ e $y = 0$; onde il *termine indipendente da x e y, cioè f, dovrà esser nullo.* Ma il luogo sarà indeter-

minato, rimanendo ad assegnarsi altre quattro equazioni omogenee fra gli altri coefficienti.

II. *Dati cinque punti, in generale è individuato il luogo di 2° grado che passa per essi;* poichè, esprimendo che le coordinate di ciascuno de' cinque punti soddisfanno all'equazione [A], si ottengono appunto cinque equazioni omogenee fra i sei coefficienti; e siccome queste equazioni sono di 1° grado, così per cinque punti dati si può far passare, in generale, un luogo, ed un solo. Ciò premesso, cerchiamo l'equazione di questo luogo.

Se le coordinate de' cinque punti dati sono

$$x_1 \text{ e } y_1, \quad x_2 \text{ e } y_2, \quad \ldots, \quad x_5 \text{ e } y_5,$$

avremo le cinque equazioni

$$ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$ax_5^2 + bx_5y_5 + cy_5^2 + dx_5 + ey_5 + f = 0,$$

dalle quali dovremmo ricavare i valori dei rapporti di cinque dei coefficienti $a, b, \ldots, f$ al sesto, e poi sostituire questi rapporti nella [A] divisa per lo stesso sesto coefficiente. Ma possiamo evitare questi calcoli, osservando che la [A] e le ultime cinque equazioni formano un sistema di sei equazioni di 1° grado ed omogenee rispetto ai sei coefficienti $a, b, \ldots, f$, le quali devono esser simultaneamente soddisfatte da valori non tutti nulli di questi coefficienti; or la condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che si annulli il determinante delle sei equazioni:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è dunque *l'equazione del luogo di 2° grado che passa pei cinque punti dati.*

È chiaro da quanto precede che *per quattro, tre, due, uno punti passano* ∞, ∞^2, ∞^3, ∞^4 *luoghi di 2° grado.*

III. *Il circolo che ha per centro il punto* (α, β) *e per raggio* ρ (fig. 1) *è espresso dalla equazione*

$$(x-\alpha)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega+(y-\beta)^2=\rho^2,$$

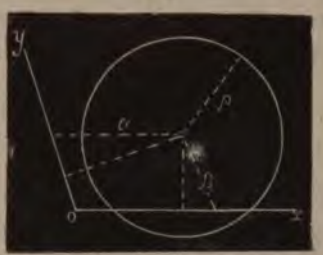


fig. 1

ove ω è l'angolo degli assi (*).

Questa equazione è di 2° grado, sviluppandosi nella seguente:

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-2(\alpha+\beta\cos\omega)x$$
$$-2(\alpha\cos\omega+\beta)y+(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\omega+\beta^2-\rho^2)=0,$$

e però il circolo è uno dei luoghi di 2° grado. Quindi l'equazione generale [A] può identificarsi con questa, e per far ciò è necessario e sufficiente rendere proporzionali i coefficienti dei termini simili nelle due equazioni, porre cioè le condizioni

$$[B]\quad \frac{a}{1}=\frac{b}{2\cos\omega}=\frac{c}{1}=\frac{d}{-2(\alpha+\beta\cos\omega)}=\frac{e}{-2(\alpha\cos\omega+\beta)}=\frac{f}{\alpha^2+2\alpha\beta\cos\omega+\beta^2-\rho^2}.$$

Si hanno così cinque equazioni distinte di 1° grado ed omogenee fra i coefficienti $a, \ldots, f$; basterà quindi assumere questi coefficienti eguali ai rispettivi denominatori nelle [B], ovvero ai denominatori moltiplicati per una stessa quantità arbitraria, affinchè la [A] rappresenti il circolo di centro (α, β) e di raggio ρ.

IV. *Quali relazioni debbono esistere fra i coefficienti della equazione generale di 2° grado* [A] *affinchè essa rappresenti un circolo qualunque del piano?*

Essendo α, β e ρ indeterminate nel caso attuale, bisognerà eliminare queste tre quantità dalle cinque equazioni di condizione [B] trovate nell'esempio precedente, e quindi si avranno due equazioni di condizione fra i coefficienti dell'equazione generale [A].

L'eliminazione si fa immediatamente, poichè α, β e ρ non entrano nelle prime due equazioni [B]:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{\cos\omega}=\frac{c}{1};$$

onde le equazioni di condizione saranno

$$c=a,\quad b=2a\cos\omega.$$

(*) Infatti il 1° membro esprime il quadrato della distanza del punto (x, y) dal centro (α, β); e quando questa distanza è eguale a ρ, il punto (x, y) appartiene al circolo.

Quando queste due relazioni fra i coefficienti (dei termini a 2° grado) si verificano, l'equazione [A] rappresenta un circolo, qualunque sieno i coefficienti d, e dei termini a 1° grado e il termine costante f. Adunque *il tipo dell'equazione di un circolo è*

$$[C] \qquad a(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) + dx + ey + f = 0.$$

Possiamo *determinare le coordinate del centro e il raggio del circolo* in funzione dei coefficienti a, d, e, f della equazione tipica [C], o meglio in funzione dei rapporti di tre fra essi al quarto. Infatti, eguagliando il primo dei rapporti [B] a ciascuno degli ultimi tre, si hanno le equazioni

$$\alpha + \beta\cos\omega = -\frac{d}{2a}, \quad \alpha\cos\omega + \beta = -\frac{e}{2a}, \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\omega + \beta^2 - \rho^2 = \frac{f}{a}.$$

Le prime due dànno

$$\alpha = \frac{-d + e\cos\omega}{2a\,\mathrm{sen}^2\omega}, \qquad \beta = \frac{d\cos\omega - e}{2a\,\mathrm{sen}^2\omega};$$

e la terza

$$\rho^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\omega + \beta^2 - \frac{f}{a} = \alpha(\alpha + \beta\cos\omega) + \beta(\alpha\cos\omega + \beta) - \frac{f}{a}$$

$$= \frac{-d + e\cos\omega}{2a\,\mathrm{sen}^2\omega}\left(-\frac{d}{2a}\right) + \frac{d\cos\omega - e}{2a\,\mathrm{sen}^2\omega}\left(-\frac{e}{2a}\right) - \frac{f}{a}$$

$$= \frac{d^2 + e^2 - 2de\cos\omega - 4af\,\mathrm{sen}^2\omega}{4a^2\,\mathrm{sen}^2\omega},$$

onde

$$\rho = \frac{\pm 1}{2a\,\mathrm{sen}\,\omega}\sqrt{d^2 + e^2 - 2de\cos\omega - 4af\,\mathrm{sen}^2\omega}$$

ove $\pm$ è il segno di a.

Dalle espressioni di α, β, ρ risulta che, quando i coefficienti della equazione [C] di un circolo sono reali, le coordinate del centro sono reali, onde il centro è un punto reale; ma il raggio può essere reale o nullo o immaginario puro. Nel primo caso il circolo è reale, nel secondo riducesi al suo centro, nel terzo è immaginario (*).

(*) Dalle $\alpha + \beta\cos\omega = -\frac{d}{2a}$, $\alpha\cos\omega + \beta = -\frac{e}{2a}$ facilmente si deduce che, prendendo sugli assi due segmenti uguali a $-\frac{d}{2a}$, $-\frac{e}{2a}$, e tirando per le estremità rispettivamente le perpendicolari agli assi, queste determinano il centro con la loro intersezione.

Per assi ortogonali le precedenti formole si semplificano. Allora si ha

$$a = c \quad \text{e} \quad b = 0,$$

$$\alpha = -\frac{d}{2a} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{e}{2a},$$

$$\rho = \frac{\pm 1}{2a}\sqrt{d^2 + e^2 - 4af}.$$

Per individuare un circolo bastano tre punti, visto che nella [C] compaiono solo quattro coefficienti. Procedendo come nell'esempio I, si trova come equazione del circolo che passa per tre punti dati (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), la seguente:

$$\begin{vmatrix} x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + 2x_1y_1\cos\omega + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + 2x_2y_2\cos\omega + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + 2x_3y_3\cos\omega + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

V. Date due rette **r**, **r'** (fig. 2) espresse dalle equazioni

[D] $\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0,$

il loro insieme sarà espresso dall'equazione - prodotto

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha' x + \beta' y + \gamma') = 0,$$

fig. 2

poichè i punti, le cui coordinate soddisfanno all'equazione di una delle due rette, soddisfanno anche all'equazione-prodotto, e viceversa. Questa equazione è di 2° grado, sviluppandosi in

$$\alpha\alpha' x^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\, xy + \beta\beta' y^2 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\, x + (\beta\gamma' + \beta'\gamma)\, y + \gamma\gamma' = 0\,;$$

e però potremo identificare con essa la equazione generale [A], rendendo proporzionali i coefficienti dei termini simili, ponendo cioè

[E] $$\frac{a}{\alpha\alpha'} = \frac{b}{\alpha\beta' + \alpha'\beta} = \frac{c}{\beta\beta'} = \frac{d}{\alpha\gamma' + \alpha'\gamma} = \frac{e}{\beta\gamma' + \beta'\gamma} = \frac{f}{\gamma\gamma'}.$$

Si hanno così cinque equazioni distinte ed omogenee di 1° grado fra i coefficienti della [A]; onde basterà assumere $a, b, \ldots, f$ eguali ai rispettivi denominatori nelle [E], ovvero eguali ai denominatori moltiplicati per uno stesso numero arbitrario, affinchè la equazione generale [A] rappresenti l'insieme delle due rette date.

VI. (*) Chieggasi ora *qual relazione debba sussistere fra i coefficienti della equazione generale* [A], *affinchè essa rappresenti l'insieme di due rette qualunque del piano.*

Osserviamo che ora le due rette sono indeterminate, onde i sei coefficienti α, β, γ e α', β', γ' delle [D] sono indeterminati; ma siccome in ciascuna delle due equazioni [D] è lecito dare un valore arbitrario (p. e. 1) ad uno dei coefficienti, così restano quattro coefficienti indeterminati. Ora avendosi cinque equazioni [E] fra quattro coefficienti, si può eliminare da esse questi coefficienti, e si otterrà così una equazione di condizione fra i coefficienti della [A].

Posto $\gamma = \gamma' = 1$, il che implica che le due rette non passino per l'origine, e quindi (es. I) che f non sia nullo, le [E] divengono

$$\alpha\alpha' = \frac{a}{f}, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = \frac{b}{f}, \quad \beta\beta' = \frac{c}{f}, \quad \alpha + \alpha' = \frac{d}{f}, \quad \beta + \beta' = \frac{e}{f};$$

ora la prima con la quarta dà

$$\alpha = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4af}}{2f}, \qquad \alpha' = \frac{d \mp \sqrt{d^2 - 4af}}{2f},$$

e la terza con la quinta

$$\beta = \frac{e \dot{\pm} \sqrt{e^2 - 4cf}}{2f}, \qquad \beta' = \frac{e \dot{\mp} \sqrt{e^2 - 4cf}}{2f} \quad (**),$$

e sostituendo nella seconda si trova

$$[F] \qquad \left(\pm\sqrt{d^2 - 4af}\right)\left(\dot{\pm}\sqrt{e^2 - 4cf}\right) = de - 2bf,$$

onde, quadrando e dividendo per f,

$$[G] \qquad 4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0.$$

Questa è dunque la relazione domandata.

(*) Il lettore può trascurare questo esempio, poichè la quistione in esso trattata direttamente si ripresenterà tra poco, quando discuteremo tutti i luoghi rappresentabili mediante una equazione di 2° grado.

(**) Sui due segni di $\sqrt{e^2 - 4cf}$ si è messo un punto, per indicare che essi non si suppongono necessariamente corrispondere agli omologhi segni preposti a $\sqrt{d^2 - 4af}$.

Se una delle due rette passa per l'origine, una delle γ, γ' è nulla e anche f è nulla: e allora il calcolo va rifatto. Posto $\gamma = 1$ e $\gamma' = 0$, dovremo rendere proporzionali i coefficienti della [A] a quelli della

$$(\alpha x + \beta y + 1)(\alpha' x + \beta' y) = 0,$$

ed avremo

$$\frac{a}{\alpha\alpha'} = \frac{b}{\alpha\beta' + \alpha'\beta} = \frac{c}{\beta\beta'} = \frac{d}{\alpha'} = \frac{e}{\beta'},\ f = 0;$$

onde

$$\alpha = \frac{a}{d},\ \beta = \frac{c}{e},\ \alpha' = d\lambda,\ \beta' = e\lambda\ (\lambda \text{ arbitrario}),$$

e

$$b\lambda = \alpha\beta' + \alpha'\beta = \left(\frac{ae}{d} + \frac{cd}{e}\right)\lambda,$$

ovvero

$$ae^2 + cd^2 - bde = 0,$$

che è ciò che diviene la [G] per $f = 0$; sicchè questo caso rientra nel precedente.

Se poi ambedue le rette passano per l'origine, sarà $\gamma = \gamma' = 0$, ed avremo

$$\frac{a}{\alpha\alpha'} = \frac{b}{\alpha\beta' + \alpha'\beta} = \frac{c}{\beta\beta'},\ d = 0,\ e = 0,\ f = 0.$$

Insomma l'*equazione di una coppia di rette passanti per l'origine è*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

equazione omogenea di 2° grado.

Si possono, in generale, determinare le equazioni delle due rette in funzione dei coefficienti della equazione complessiva [A]. A tal fine si osservi che la condizione [G] sotto la forma [F] indica che ai radicali $\sqrt{d^2 - 4af}$, $\sqrt{e^2 - 4cf}$ nei valori di α e β (o di α' e β') bisogna dare lo stesso segno o segni opposti, secondo che $de - 2bf$ è positivo o negativo. Intendendo inclusa nel segno $\sqrt{}$ tale restrizione, le equazioni [D] delle due rette divengono

$$dx + ey + 2f = x\sqrt{d^2 - 4af} + y\sqrt{e^2 - 4cf},$$

$$dx + ey + 2f = -x\sqrt{d^2 - 4af} - y\sqrt{e^2 - 4cf}.$$

Supposti reali i coefficienti della [A], segue dalla citata [F] che i due radicali sono insieme reali o immaginarii. Nel primo caso le due

rette sono reali, nel secondo immaginarie. Ma il loro punto comune è sempre reale. Infatti esso è anche comune alle due rette

$$dx + ey + 2f = 0, \quad x\sqrt{d^2 - 4af} + y\sqrt{e^2 - 4cf} = 0,$$

delle quali la prima è evidentemente reale, e la seconda è anche reale, poichè la sua equazione, moltiplicata sia per $\sqrt{d^2 - 4af}$, sia per $\sqrt{e^2 - 4cf}$, può scriversi in forza della [F]

$$(d^2 - 4af)\, x + (de - 2bf)\, y = 0,$$

ovvero

$$(de - 2bf)\, x + (e^2 - 4cf)\, y = 0.$$

Il lettore può esercitarsi a cercare le coordinate di questo punto d'incontro, e troverà con l'aiuto della [G]

$$x' = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2}, \qquad y' = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2}.$$

Trasportata ivi l'origine mediante le sostituzioni

$$x = x' + X, \quad y = y' + Y,$$

l'equazione complessiva delle due rette diverrà

$$aX^2 + bXY + cY^2 = 0.$$

Questa, risoluta rispetto ad Y, fornirà le equazioni delle due rette:

$$Y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} X, \quad Y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} X.$$

Quindi si avrà per la tangente dell'angolo delle due rette l'espressione

$$\frac{\operatorname{sen} \omega \sqrt{b^2 - 4ac}}{a + c - b \cos \omega},$$

dipendente dai soli coefficienti dei termini a 2° grado della [A].

Da questa formola si rileva che $b^2 - 4ac$ deve aver lo stesso segno di $d^2 - 4af$ e $e^2 - 4cf$; e che le due rette sono perpendicolari quando $a + c - b \cos \omega = 0$, parallele quando $b^2 - 4ac = 0$. Sono poi coincidenti quando oltre a $b^2 - 4ac = 0$ è pure $be - 2cd = 0$ (onde $bd - 2ae = 0$).

Formole fondamentali.

§ **3**. Dopo aver arrecato alcuni esempi importanti di particolari luoghi di 2° grado chiusi o aperti (circoli e coppie di rette), procediamo ora alla classificazione di tutti i possibili luoghi di 2° grado.

Ma prima di tutto faremo qualche cangiamento nella notazione dei coefficienti della equazione generale, scrivendo l'equazione sotto la forma

$$[1] \qquad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

poichè questa ci procurerà formole alquanto più simmetriche e più facili a ricordare.

Supporremo reali i coefficienti.

Spesso indicheremo con $f(x, y)$ il primo membro della equazione.

Incontreremo frequentemente le metà delle derivate parziali della $f(x, y)$ rispetto ad x e y: queste semiderivate sono

$$ax + hy + g, \qquad hx + by + f.$$

Ci sarà sovente utile la seguente identità:

$$[2] \quad f(x, y) = (ax + hy + g)\,x + (hx + by + f)\,y + (gx + fy + c).$$

Qui si presenta il trinomio $gx + fy + c$, che anche incontreremo sovente.

Indicheremo con Δ il determinante simmetrico di 3° ordine

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$

che è di molta importanza e che dicesi *discriminante* della $f(x, y)$ (*).

(*) In generale, data una funzione di n variabili, se ne prendano le n derivate parziali e si eguagli a zero la funzione e le derivate; poi si trovi la *risultante* delle così formate $n + 1$ equazioni fra n variabili, vale a dire quella funzione dei coefficienti il cui annullarsi è la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un sistema di valori delle variabili soddisfacente ad esse equazioni: quella risultante dicesi *discriminante* della proposta funzione.

Useremo le lettere maiuscole A, H, ... per denotare i determinanti minori complementari di 2° ordine degli elementi a, h, ... del discriminante Δ, cioè porremo

$$A = bc - f^2, \qquad B = ca - g^2, \qquad C = ab - h^2, \ (^*)$$

$$F = gh - af, \qquad G = hf - bg, \qquad H = fg - ch.$$

Allora, sviluppando Δ secondo gli elementi delle singole sue linee, sappiamo che si avrà

$$[3] \quad aA + hH + gG = \Delta, \ hH + bB + fF = \Delta, \ gG + fF + cC = \Delta.$$

Invece, moltiplicando gli elementi di ciascuna linea pe' determinanti complementari degli elementi di una linea parallela, si avrà

$$[4] \quad \begin{cases} hA + bH + fG = 0, \ aH + hB + gF = 0, \ aG + hF + gC = 0, \\ gA + fH + cG = 0, \ gH + fB + cF = 0, \ hG + bF + fC = 0. \end{cases}$$

In particolare, il discriminante della [1] sarà la risultante delle equazioni

$$ax + hy + g = 0, \quad hx + by + f = 0, \quad \mathrm{f}(x, y) = 0.$$

Ora dalla terza si può sottrarre la prima moltiplicata per x e la seconda moltiplicata per y, e ridurla così (cfr. la [2]) a $gx + fy + c = 0$; per modo che siamo ridotti a cercare la risultante delle tre equazioni di 1° grado

$$\begin{aligned} ax + hy + g &= 0, \\ hx + by + f &= 0, \\ gx + fy + c &= 0. \end{aligned}$$

Essa è appunto

$$\begin{vmatrix} a & b & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} :$$

questo è dunque il discriminante della $\mathrm{f}(x, y)$.

(*) La funzione di una variabile u, $au^2 + 2hu + b$, ha per derivata $2(au + h)$. La risultante delle equazioni $au + h = 0$, $au^2 + 2hu + b = 0$ è la stessa che quella delle $au + h = 0$, $hu + b = 0$, poichè analogamente alla [2] si ha $au^2 + 2hu + b = (au + h)u + (hu + b)$; e però è $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$, ossia C. Insomma C è il discriminante del trinomio a 2° grado nella $\mathrm{f}(x, y)$, quando si consideri solo x o y come variabile e si ponga l'altra eguale a 1.

A e B sono i discriminanti di $ax^2 + 2gx + c$ e $by^2 + 2fy + c$, ossia di $\mathrm{f}(x, 0)$ e $\mathrm{f}(0, y)$.

Inoltre per le note proprietà dei determinanti ad elementi così detti *reciproci* o *aggiunti*, quali sono

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix},$$

si ha

$$[5] \qquad \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = \Delta^2,$$

$$[6] \qquad \begin{cases} BC - F^2 = \Delta a, & CA - G^2 = \Delta b, & AB - H^2 = \Delta c, \\ GH - AF = \Delta f, & HF - BG = \Delta g, & FG - CH = \Delta h, \end{cases}$$

come del resto si può verificare con l'effettivo sviluppo.

Delle lettere A, B, ..., delle derivate parziali di $f(x, y)$, e delle identità [2], ..., [6] avremo continue occasioni di fare uso; richiamiamo quindi su di esse l'attenzione del lettore.

§ 4. Per descrivere un luogo quando è data la sua equazione cartesiana, la prima via che si presenta si è: risolvere l'equazione rispetto ad una delle coordinate variabili, per es. y; indi far variare l'altra, x, da $-\infty$ a $+\infty$, e calcolare il valore o i valori di y corrispondenti a ciascun valore reale di x; poi determinare i punti corrispondenti a ciascuna coppia di valori di x e y; e da ultimo far passare per tutti questi punti una curva. Ma tale procedimento sovente riesce lungo, sovente inattuabile, poichè non avviene di frequente che si sappia risolvere l'equazione del luogo rispetto ad una delle variabili.

Nel caso nostro, possiamo ordinare e risolvere l'equazione $f(x, y) = 0$ rispetto a y, ed avremo successivamente

$$by^2 + 2(hx + f)y + (ax^2 + 2gx + c) = 0,$$

$$y = \frac{-(hx + f) \pm \sqrt{(hx + f)^2 - b(ax^2 + 2gx + c)}}{b},$$

$$y = -\frac{1}{b}(hx + f) \pm \frac{1}{b}\sqrt{-Cx^2 + 2Gx - A}.$$

Ad ogni valore di x corrispondono due valori di y, differenti solo per il segno del radicale e non difficili a costruire. Ma possiamo procedere più speditamente nel modo seguente:

Moltiplicando l'ultima equazione per b, isolando il radicale, e poi quadrando, essa dee riprodurre la $f(x, y) = 0$; e infatti si ha

$$[7] \qquad b \,.\, f(x, y) = (hx + by + f)^2 + Cx^2 - 2Gx + A = 0,$$

ovvero

$$b \,.\, f(x, y) = (hx + by + f)^2 + C\left(x - \frac{G}{C}\right)^2 + \frac{AC - G^2}{C} = 0,$$

e per la 2ª delle [6]

$$[8] \qquad b \,.\, f(x, y) = (hx + by + f)^2 + C\left(x - \frac{G}{C}\right)^2 + \frac{\Delta b}{C} = 0.$$

ng. 3

Ora opereremo una trasformazione di coordinate, prendendo (fig. 3) per asse delle X la retta $x - \frac{G}{C} = 0$ parallela all'asse delle y, e per asse delle Y la retta $hx + by + f = 0$.

Le coordinate della nuova origine **O** saranno

$$x = \frac{G}{C},\ y = -\frac{hx + f}{b} = -\frac{hG + fC}{bC} = \left(\text{per l'ultima [4]}\right) \frac{bF}{bC} = \frac{F}{C}.$$

Ma senza eseguire la trasformazione in tutti i suoi particolari, ci basterà osservare che le X, Y sono eguali alle distanze del punto (x, y) dai nuovi assi **OY** e **OX** divise ambedue per sen **XOY**, e che le dette distanze sono espresse dai primi membri $hx + by + f$, $x - \frac{G}{C}$ delle equazioni dei nuovi assi (riferiti ai primitivi), moltiplicati ambedue per sen **xoy** e divisi rispettivamente per dei radicali reali e indipendenti da x e y; laonde le X, Y sono eguali alle funzioni $hx + by + f$, $x - \frac{G}{C}$ moltiplicate rispettivamente per due quantità costanti e reali λ, μ; e però

$$hx + by + f = \frac{X}{\lambda}, \qquad x - \frac{G}{C} = \frac{Y}{\mu}.$$

Ciò posto, la [8] diverrà

$$[9] \qquad \frac{X^2}{\lambda^2} + C\,\frac{Y^2}{\mu^2} = -\frac{\Delta b}{C}.$$

Durante il calcolo precedente si è implicitamente supposto che b e C non fossero nulli; altrimenti non si sarebbe potuto considerare

la $f(x, y) = 0$ come di 2° grado in y, nè porre C come denominatore nella [8], nè eseguire l'accennato cangiamento di assi. Rimanendo in questa doppia ipotesi, la forma del luogo espresso dalla [9] dipenderà dai segni dei coefficienti, e precisamente da quelli di C e Δb, visto che λ^2 e μ^2 sono sempre positivi. — Esamineremo prima il caso $C > 0$ e poi l'altro $C < 0$, suddividendo ciascuno in tre secondo che sia $\Delta b \gtreqless 0$. Per ultimo tratteremo il caso $C = 0$.

Ellisse.

§ **5**. — 1° Caso: $C > 0$.

Essendo $C = ab - h^2$, nè a nè b possono annullarsi; altrimenti C diverrebbe $-h^2$, e però sarebbe negativo o nullo, contro l'ipotesi. Inoltre, essendo $ab > h^2$, a e b hanno lo stesso segno.

a) $$C > 0, \quad \Delta b < 0 \text{ (onde } \Delta a < 0).$$

Alla [9] si può dar la forma

[10] $$\frac{X^2}{\lambda'^2} + \frac{Y^2}{\mu'^2} = 1,$$

λ' e μ' essendo positivi.

Ora per $Y = 0$ si ha $X = \pm \lambda'$,

e per $X = 0$ si ha $Y = \pm \mu'$;

sicchè il luogo (fig. 4) seca l'asse delle X in due punti **A**, **A'** a distanze $\pm\lambda'$ dall'origine, e l'asse delle Y in due punti **B**, **B'** a distanze $\pm \mu'$ dall'origine.

La [10], risoluta rispetto ad Y, dà

$$Y = \pm \frac{\mu'}{\lambda'}\sqrt{\lambda'^2 - X^2};$$

essa prova che non vi son punti reali del luogo

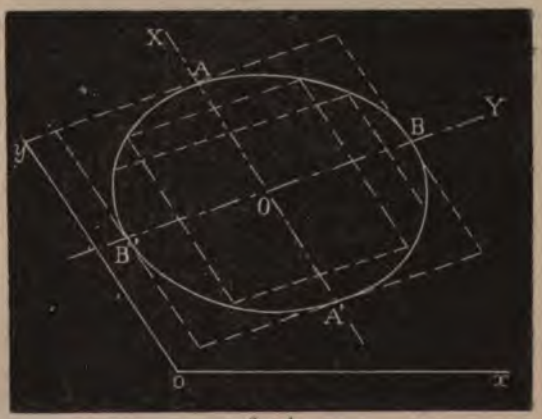


fig. 4

fuori la striscia compresa fra le parallele alla **OY** condotte per **A** e **A'**. Quando X decresce da $+\lambda'$ a 0, il valore positivo di Y cresce da 0 a μ' e il valor negativo decresce da 0 a $-\mu'$; il che ci abilita a raffigurarci l'arco **BAB'** della curva.

Or, siccome mutando X e Y in $-X$ e $-Y$ la equazione [10] non s'altera, così è chiaro che se un punto appartiene alla curva, anche il suo simmetrico rispetto all'origine **O** le appartiene; quindi l'arco **B'A'B** sarà facilmente descritto come simmetrico e quindi eguale al precedente **BAB'**.

Il punto **O**, dividendo per metà tutte le rette passanti per esso e intercette nella curva, dicesi *centro* della curva. La **OX**, dividendo per metà le corde della curva parallele alla **OY**, dicesi *diametro coniugato* a codeste corde rispetto alla curva; e similmente la **OY** è diametro coniugato alle corde parallele alla **OX**. Ma di ciò a miglior tempo.

La curva è chiusa e tutta compresa nel parallelogrammo di cui **AA'** e **BB'** sono le mediane. Essa dicesi *ellisse*.

b) $$C > 0, \quad \Delta b > 0 \text{ (onde } \Delta a > 0).$$

La [9] non è soddisfatta da alcun punto reale, poichè per ogni valore reale di X e Y il primo membro risulta positivo o almeno nullo (quando $X = Y = 0$), mentre il secondo è negativo per ipotesi.

Diremo che in questo caso l'equazione rappresenta una *ellisse immaginaria*.

c) $$C > 0, \quad \Delta b = 0 \text{ (onde } \Delta = 0).$$

La [9] diviene

$$\frac{X^2}{\lambda^2} + C\,\frac{Y^2}{\mu^2} = 0,$$

la quale non è soddisfatta da alcun punto reale, tranne **O**, la nuova origine. Perciò diremo che l'equazione rappresenta una *ellisse ridotta a un punto*.

Ma siccome attualmente la equazione si scinde nelle due (posto $i = \sqrt{-1}$):

$$\frac{X}{\lambda} + i\,\frac{\sqrt{C}}{\mu}\,Y = 0, \qquad \frac{X}{\lambda} - i\,\frac{\sqrt{C}}{\mu}\,Y = 0,$$

le quali rappresentano due rette non aventi punti reali altro che **O**; così potremo anche dire che nel caso attuale l'equazione rappresenta *una coppia di rette immaginarie secantisi in un punto reale* (a distanza finita), o più brevemente *una coppia ellittica di rette*.

Riassumendo la discussione che precede, abbiamo:

$$1^\circ \text{ Caso} \ldots C > 0 \ldots \textit{Ellisse} \begin{cases} \Delta a \text{ e } \Delta b < 0. \textit{ Ellisse reale.} \\ \Delta a \text{ e } \Delta b > 0. \textit{ Ellisse immaginaria.} \\ \Delta = 0 \ldots \textit{ Coppia ellittica di rette.} \end{cases}$$

Iperbole.

§ **6.** — 2° Caso: $C < 0$.

a) $$C < 0, \quad \Delta b > 0 \left(\text{onde } \Delta \gtrless 0\right).$$

La [9] può ricever la forma

$$[11] \qquad \frac{X^2}{\lambda'^2} - \frac{Y^2}{\mu'^2} = 1,$$

ove λ' e μ' sono positivi.

Ora per $X = 0$ si ha $X = \pm \lambda'$,
e per $X = 0$ si ha $Y = \pm \mu' i$,

sicchè (fig. 5) il luogo seca la **OX** in due punti reali **A**, **A'** a distanze $\pm \lambda'$ dall'origine, ma non seca la **OY**.

Dalla [11] si trae

$$Y = \pm \frac{\mu'}{\lambda'} \sqrt{X^2 - \lambda'^2},$$

fig. 5

onde apparisce che non vi sono punti reali del luogo entro la striscia compresa fra le parallele alla **OY** condotte per **A** e **A'**. Quando X cresce da $+\lambda'$ a $+\infty$, il valor positivo di Y cresce da 0 a $+\infty$ e il negativo decresce da 0 a $-\infty$; quindi vi è un arco della curva che passa per **A** e si estende all'infinito dall'una all'altra banda di **A**.

Come nel caso dell'ellisse, vi è un altro arco simmetrico del precedente rispetto all'origine; esso passa per **A'**, si estende all'infinito dall'una e dall'altra banda di **A'**, ed è eguale al precedente.

La curva ha dunque due rami doppiamente infiniti. Essa dicesi *iperbole*. L'origine è *centro* della curva, **OX** *diametro coniugato* alle corde parallele alla **OY**, e viceversa.

b) $$C < 0, \quad \Delta b < 0 \left(\text{onde } \Delta \lessgtr 0\right).$$

La [9] può scriversi

$$\frac{Y^2}{\mu'^2} - \frac{X^2}{\lambda'^2} = 1,$$

e quindi conduce alle stesse conseguenze del caso precedente, solo che la curva ora taglia la **OY** e non la **OX**.

c) $$C < 0, \quad \Delta b = 0 \text{ (onde } \Delta = 0).$$

fig. 6

La [9] si scinde nelle due

$$\frac{X}{\lambda} + \frac{\sqrt{-C}}{\mu} Y = 0, \quad \frac{X}{\lambda} - \frac{\sqrt{-C}}{\mu} Y = 0,$$

e però rappresenta *una coppia di rette reali e secantisi in un punto* (a distanza finita) che è **0** (fig. 6). Una tale coppia di rette presenta analogia con l'iperbole, poichè due angoli opposti al vertice possono assimilarsi a due rami doppiamente infiniti. La diremo *coppia iperbolica di rette*.

Le cose dette sinora nella ipotesi di $C < 0$ e di $b \gtrless 0$, valgono anche quando fosse $b = 0$ senza essere anche $a = 0$ (ipotesi compatibile con l'altra $ab < h^2$). Allora infatti si potrà considerare la $f(x, y) = 0$ come di 2° grado in x, e quindi risolverla rispetto ad x e poi darle le seguenti forme, analoghe alle [7] e [8]:

$$[7]' \qquad a \,.\, f(x, y) = (ax + hy + g)^2 + Cy^2 - 2Fy + B = 0,$$

$$[8]' \qquad a \,.\, f(x, y) = (ax + hy + g)^2 + C\left(y - \frac{F}{C}\right)^2 + \frac{\Delta a}{C} = 0.$$

Queste si deducono dalle [7], [8] facendo i seguenti scambi:

di x con y, di a con b, di f con g;

poichè per effetto di essi la $f(x, y)$ non muta. Contemporaneamente avverranno i seguenti scambi:

$$\text{di } A \text{ con } B, \text{ di } F \text{ con } G;$$

mentre H, C, Δ rimarranno inalterati.

Prendendo per novelli assi **OY** e **OX** le

$$y - \frac{F}{C} = 0, \qquad ax + hy + g = 0,$$

la [8]′ assume la forma, analoga alla [9],

$$[9]' \qquad \frac{Y^2}{\mu^2} + C\frac{X^2}{\lambda^2} = -\frac{\Delta a}{C},$$

la quale conduce alle stesse conseguenze della [9].

Rimane a trattare la ipotesi $a = 0$ e $b = 0$ (che è altresì compatibile con l'altra $C < 0$, poichè allora, non potendo anche h esser nullo, risulta $C = -h^2 < 0$).

Questo caso si può far rientrare nel precedente, e basta a tal uopo far rotare solo un asse, per es. l'asse delle x dell'angolo $\frac{1}{2}$ **xoy**. Le formole per la trasformazione sono, come è facile vedere (fig. 7),

$$x = \nu X, \quad y = Y + \nu X,$$

fig. 7

posto $\nu = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\,\mathbf{xoy}}$. Allora la $f(x, y) = 0$ diventa

$$2h\nu^2X^2 + 2h\nu XY + 2(g + f)\nu X + 2fY + c = 0,$$

nella quale manca il termine in Y^2 ma non quello in X^2. Le quantità analoghe a C e Δ per questa equazione sono rispettivamente

$$2h\nu^2 \,.\, 0 - h^2\nu^2 = -h^2\nu^2 = C\nu^2,$$

$$\begin{vmatrix} 2h\nu^2 & h\nu & (g+f)\nu \\ h\nu & 0 & f \\ (g+f)\nu & f & c \end{vmatrix} = \nu^2 \begin{vmatrix} 2h & h & g+f \\ h & 0 & f \\ g+f & f & c \end{vmatrix} = \nu^2 \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \nu^2\Delta;$$

delle quali la prima è negativa (poichè $C < 0$ e $\nu^2 > 0$), e la seconda

è dello stesso segno di Δ o nulla con Δ. Dunque il luogo nel caso attuale è una iperbole, come precedentemente.

Riassumiamo i risultati ottenuti:

$$2^\circ \text{ Caso} \ldots C < 0 \ldots \textit{Iperbole} \begin{cases} \Delta \gtrless 0 \ldots \textit{Iperbole reale.} \\ \Delta = 0 \ldots \textit{Coppia iperbolica di rette.} \end{cases}$$

Parabola.

§ 7. — 3° Caso: $C = 0$.

Dopo aver investigato la natura del luogo espresso dalla $f(x, y) = 0$ quando C non è nullo, passiamo al caso che C sia nullo.

Nella ipotesi che b non sia nullo, possiamo usare la [7], che diviene

$$[12] \qquad b \,.\, f(x, y) = (hx + by + f)^2 - (2Gx - A) = 0.$$

Qui basterà distinguere i due sotto-casi: $\Delta \gtrless 0$ e $\Delta = 0$.

$$a) \qquad C = 0, \qquad \Delta \gtrless 0.$$

Per le [6] si ha $CA - G^2 = \Delta b$, onde $-G^2 = \Delta b$; ma si son supposti Δ e b diversi da zero; dunque sarà anche G diverso da zero. Così essendo, possiamo trasformare le coordinate, assumendo per nuovi assi OX e OY le rette

$$2Gx - A = 0, \quad hx + by + f = 0$$

(che non sono parallele perchè b non è nullo): avremo allora, come nei casi precedenti,

$$hx + by + f = \frac{X}{\lambda}, \qquad 2Gx - A = \frac{Y}{\mu}.$$

λ e μ essendo quantità costanti reali; e la [12] diverrà

$$\frac{X^2}{\lambda^2} - \frac{Y}{\mu} = 0,$$

ovvero

$$[13] \qquad X^2 = \sigma Y,$$

indicando con σ la quantità reale $\frac{\lambda^2}{\mu}$. Possiamo supporre σ positiva:

infatti la [13] prova che Y deve avere lo stesso segno di σ, affinchè X sia reale; sicchè se σ, e quindi anche Y, è negativo, basta invertire il senso positivo sulla **OY**, ed allora Y diverrà positivo, e quindi anche σ.

Ciò posto, la [13] dà

$$X = \pm \sqrt{\sigma Y};$$

onde (fig. 8) ad ogni valore di Y corrispondono per X due valori eguali ed opposti, vale a dire che la **OY** è un *diametro coniugato* alle corde parallele alla **OX**. Facendo crescere Y da 0 a $+\infty$, il valor positivo di X crescerà da 0 a $+\infty$ e il negativo decrescerà da 0 a $-\infty$; e dando ad Y valori negativi, X riescirà immaginario. Dunque la curva si compone di un sol ramo doppiamente infinito, e giace tutta da una banda della **OX**. Essa dicesi *parabola*.

fig. 8

b) $$C = 0, \qquad \Delta = 0.$$

Sarà anche $G = 0$ (poichè $-G^2 = \Delta b$), e la [12] si scinderà nelle due:

$$hx + by + f = +\sqrt{-A}, \quad hx + by + f = -\sqrt{-A},$$

che rappresentano (fig. 9) due rette parallele; in altri termini la parabola si riduce ad una *coppia di rette parallele*. Esse sono reali e distinte o immaginarie secondochè $A \lessgtr 0$, e sono equidistanti dalla retta

$$hx + by + f = 0,$$

fig. 9

la quale è sempre reale. Sono poi coincidenti (con questa retta) se $A = 0$; e allora si dirà che la $f(x, y) = 0$ rappresenta una *retta doppia*, e sarà

$$b \,.\, f(x, y) = (hx + by + f)^2 = 0.$$

Abbiamo supposto sin qui che b non sia zero. Quando fosse $b = 0$,

sarebbe anche $h = 0$, poichè $ab - h^2$ per ipotesi è nullo; ma a non potrebbe esser nullo anch'esso, altrimenti la $f(x, y) = 0$ si abbasserebbe al 1° grado. Potremmo dunque allora, invece della [12], considerare la forma analoga

$$[14] \qquad a \,.\, f(x, y) = (ax + hy + g)^2 - (2Fy - B) = 0,$$

la quale conduce alle stesse conseguenze. Infatti, per le [6] $BC - F^2 = \Delta a$, onde $-F^2 = \Delta a$; ora a non è nullo; e però F non sarà nullo finchè Δ non sia nullo, e sarà $F = 0$ quando $\Delta = 0$. Nel primo caso il luogo sarà una *parabola*. Nel secondo caso l'equazione rappresenterà *due rette parallele ed equidistanti rispetto alla*

$$ax + hy + g = 0,$$

le quali saranno reali e distinte o immaginarie secondochè $B \lesseqgtr 0$. Quando poi $B = 0$ esse coincideranno, e sarà

$$a \,.\, f(x, y) = (ax + hy + g)^2 = 0.$$

Dalle considerazioni precedenti emerge che nella ipotesi attuale $C = 0$ e $\Delta = 0$ avviene quanto segue:

1° Son nulli anche F e G;

2° La retta $ax + hy + g = 0$ coincide con la $hx + by + f = 0$; il che si può anche provare osservando che dalla $ab - h^2 = 0$ si trae $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$, e dalla $F = hg - af = 0$ si trae $\frac{a}{h} = \frac{g}{f}$, sicchè le equazioni delle due rette hanno i coefficienti proporzionali;

3° A e B o hanno lo stesso segno o si annullano insieme. Ciò si può anche provare come segue:

se $A = 0$, sarà $H = 0$ perchè $aA + hH + gG = \Delta = 0$, e sarà $B = 0$ perchè $hH + bB + fF = \Delta = 0$; viceversa, se $B = 0$, è anche $H = 0$ e $A = 0$;

quando A e B esistono, si ha dalle [6] $AB - H^2 = \Delta c = 0$, onde $AB > 0$, e però A e B hanno lo stesso segno.

Riepilogando i risultati della precedente analisi, abbiamo

$$3° \text{ Caso} \ldots C = 0 \ldots \textit{Parabola} \begin{cases} \Delta \gtrless 0 \ldots \textit{Parabola reale.} \\ \Delta = 0 \ldots \textit{Coppia parabolica di rette.} \end{cases}$$

Per coppia *parabolica* di rette intendiamo due rette parallele alla $ax + hy + g = 0$ ovvero $hx + by + f = 0$, reali e distinte, reali e coincidenti, immaginarie secondochè A e $B \lesseqgtr 0$.

Epilogo della precedente discussione.

§ 8. Sarà bene presentare in un sol quadro la classificazione che abbiamo fatta dei luoghi di 2° grado:

$$C \begin{cases} > 0 \begin{cases} \Delta a \text{ e } \Delta b < 0 \ldots \textit{Ellisse reale.} \\ \Delta a \text{ e } \Delta b > 0 \ldots \textit{Ellisse immaginaria.} \\ \Delta = 0 \ldots\ldots \textit{Coppia ellittica di rette.} \end{cases} \\ < 0 \begin{cases} \Delta \gtrless 0 \ldots\ldots \textit{Iperbole reale.} \\ \Delta = 0 \ldots\ldots \textit{Coppia iperbolica di rette.} \end{cases} \\ = 0 \begin{cases} \Delta \gtrless 0 \ldots\ldots \textit{Parabola reale.} \\ \Delta = 0 \ldots\ldots \textit{Coppia parabolica di rette.} \end{cases} \end{cases}$$

Questo quadro si può disporre anche nel seguente modo:

$$\Delta \begin{cases} \gtrless 0 \begin{cases} C > 0 \ldots\ldots \textit{Ellisse, reale o immaginaria secondochè } \Delta a \textit{ e } \Delta b \lessgtr 0. \\ C < 0 \ldots\ldots \textit{Iperbole reale.} \\ C = 0 \ldots\ldots \textit{Parabola reale.} \end{cases} \\ = 0 \begin{cases} C > 0 \ldots\ldots \textit{Coppia ellittica di rette.} \\ C < 0 \ldots\ldots \textit{Coppia iperbolica di rette.} \\ C = 0 \ldots\ldots \textit{Coppia parabolica di rette.} \end{cases} \end{cases}$$

Faremo ora alcune importanti osservazioni:

1° Abbiamo già visto che la $f(x, y) = 0$, quando non è $b = 0$, può esser scritta sotto le forme:

[7] $\quad b \,.\, f(x, y) = (hx + by + f)^2 + Cx^2 - 2Gx + A = 0,$

[8] $\quad b \,.\, f(x, y) = (hx + by + f)^2 + C\left(x - \frac{G}{C}\right)^2 + \frac{\Delta b}{C} = 0;$

e quando non è $a = 0$, sotto le forme analoghe:

[7]' $\quad a \,.\, f(x, y) = (ax + hy + g)^2 + Cy^2 - 2Fy + B = 0,$

[8]' $\quad a \,.\, f(x, y) = (ax + hy + g)^2 + C\left(y - \frac{F}{C}\right)^2 + \frac{\Delta a}{C} = 0.$

Ora aggiungiamo che, quando non è $c=0$, è facile verificare che la $f(x, y)=0$ può assumere anche le seguenti forme analoghe alle precedenti:

$$[7]'' \quad c \,.\, f(x, y) = (gx + fy + c)^2 + Bx^2 - 2Hxy + Ay^2 = 0,$$

$$[8]'' \begin{cases} c \,.\, f(x, y) = (gx + fy + c)^2 + B\left(x - \frac{H}{B}\, y\right)^2 + \frac{\Delta c}{B}\, y^2 = 0 \\ c \,.\, f(x, y) = (gx + fy + c)^2 + A\left(y - \frac{H}{A}\, x\right)^2 + \frac{\Delta c}{A}\, x^2 = 0. \end{cases}$$

2° Nel caso della parabola, essendo $C=ab-h^2=0$, onde $\pm\sqrt{ab}=h$, la $f(x, y)=0$ può ricevere la forma speciale

$$(x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b})^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

vale a dire che *nella equazione della parabola i termini di 2° grado fanno un quadrato perfetto.*

3° Sappiamo che l'equazione $f(x, y)=0$ rappresenta una coppia di rette quando $\Delta=0$. Allora la funzione $f(x, y)$ dee manifestamente decomporsi in due fattori di primo grado rispetto a x e y, i quali eguagliati a zero forniranno *le equazioni separate delle due rette.*

Ad operare la decomposizione soccorrono le forme [8], [8]' e [8]'' pocanzi trovate. Infatti la [8] per $\Delta=0$ diviene

$$(hx + by + f)^2 - (-C)\left(x - \frac{G}{C}\right)^2 = 0,$$

che si decompone in

$$\left\{hx + by + f + \sqrt{-C}\left(x - \frac{G}{C}\right)\right\}\left\{hx + by + f - \sqrt{-C}\left(x - \frac{G}{C}\right)\right\} = 0;$$

e dà le due equazioni separate

$$hx + by + f + \sqrt{-C}\left(x - \frac{G}{C}\right) = 0, \quad hx + by + f - \sqrt{-C}\left(x - \frac{G}{C}\right) = 0.$$

Similmente la [8]' dà

$$\left\{ax + hy + g + \sqrt{-C}\left(y - \frac{F}{C}\right)\right\}\left\{ax + hy + g - \sqrt{-C}\left(y - \frac{F}{C}\right)\right\} = 0;$$

e le [8]''

$$\left\{gx + fy + c + \sqrt{-B}\left(x - \frac{H}{B}\, y\right)\right\}\left\{gx + fy + c - \sqrt{-B}\left(x - \frac{H}{B}\, y\right)\right\} = 0,$$

$$\left\{gx + fy + c + \sqrt{-A}\left(y - \frac{H}{A}\, x\right)\right\}\left\{gx + fy + c - \sqrt{-A}\left(y - \frac{H}{A}\, x\right)\right\} = 0.$$

Si hanno così le equazioni separate delle due rette sotto quattro forme diverse. Le due prime valgono quando non è $C=0$, la terza quando non è $B=0$, e l'ultima quando non è $A=0$.

Del resto quando $C=0$ abbiamo dalla [12]

$$(hx+by+f-\sqrt{-A})\,(hx+by+f+\sqrt{-A})=0,$$

e per analogia

$$(ax+hy+g-\sqrt{-B})\,(ax+hy+g+\sqrt{-B})=0.$$

Quando poi è anche $A=0$ e $B=0$ (circostanze simultanee), si avrà

$$(ax+hy+g)^2=0,$$

ovvero

$$(hx+by+f)^2=0,$$

ovvero anche

$$(gx+fy+c)^2=0 \quad (^*).$$

Dalla precedente discussione e dalle varie forme che abbiamo date alle equazioni delle due rette rappresentate dalla equazione $f(x,y)=0$ quando $\Delta=0$, apparisce che le rette

$$ax+hy+g=0, \quad hx+by+f=0, \quad gx+fy+c=0,$$

$$x-\frac{G}{C}=0, \quad y-\frac{F}{C}=0, \quad x-\frac{H}{B}\,y=0, \quad y-\frac{H}{A}x=0$$

passano tutte pel punto comune alle due rette medesime.

Le coordinate di questo punto, tenuto conto delle [6], sono determinate da una qualunque delle seguenti proporzioni:

$$\begin{aligned} x:y:1 &:: A:H:G \\ &:: H:B:F \\ &:: G:F:C \\ &:: \sqrt{A}:\sqrt{B}:\sqrt{C}, \end{aligned}$$

ove ai radicali s'intendano apposti segni convenienti.

(*) In questo caso della retta doppia, oltre ad esser nullo il discriminante Δ, abbiamo visto che sono nulli tutti i suoi determinanti minori

$$A,\ B,\ C,\ F,\ G,\ H.$$

4° *L'equazione omogenea*

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

rappresenta due rette passanti per l'origine, reali e distinte quando $C < 0$, immaginarie quando $C > 0$, coincidenti quando $C = 0$. Ciò risulta dal fatto che nell'ipotesi $g = f = c = 0$ si ha

$$\Delta = A = B = F = G = H = 0;$$

ma si può vederlo direttamente dalla equazione, la quale, risoluta rispetto ad x, si scompone nelle due

$$x = \frac{-h + \sqrt{-C}}{a} y, \qquad x = \frac{-h - \sqrt{-C}}{a} y,$$

che rappresentano due rette passanti per l'origine.

Si possono usare invece delle precedenti equazioni anche le seguenti, ottenute risolvendo rispetto a y:

$$y = \frac{-h - \sqrt{-C}}{b} x, \qquad y = \frac{-h + \sqrt{-C}}{b} x.$$

5° *L'equazione priva della y*

$$ax^2 + 2gx + c = 0,$$

rappresenta due rette parallele all'asse delle y, come si vede direttamente risolvendola rispetto ad x; e si trovano così per le due rette le equazioni

$$x = \frac{-g \pm \sqrt{-B}}{a}.$$

Similmente la

$$by^2 + 2fy + c = 0$$

rappresenta le due rette parallele all'asse delle x:

$$y = \frac{-f \pm \sqrt{-A}}{a}.$$

6° La $f(x, y) = 0$ rappresenta un circolo quando può assumere la forma (§ 2, IV)

$$a(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$

ovvero quando

$$b = a \text{ e } h = a \cos \omega.$$

Il circolo sta fra le ellissi, giacchè per esso

$$C = aa - (a \cos \omega)^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \omega > 0.$$

E poichè

$$\Delta = -a\,(f^2 + g^2 - ac\,\mathrm{sen}^2\omega - 2fg\cos\omega),$$

ne segue che il circolo è reale o immaginario, secondochè la quantità $f^2 + g^2 - ac\,\mathrm{sen}^2\omega - 2fg\cos\omega$ è positiva o negativa. Quando poi codesta quantità è nulla, il circolo si riduce a un punto reale (*).

Invarianti della funzione $f(x, y)$.

§ 9. Abbiam visto che la equazione $f(x, y) = 0$ può rappresentare tre specie di luoghi, contraddistinti dal segno o dall'annullarsi della quantità C, la quale dipende solo dai coefficienti dei termini a 2° grado. Or la forma di un luogo è certamente indipendente dalla scelta degli assi delle coordinate; sicchè, se noi operiamo una trasformazione di coordinate cartesiane in cartesiane, e poi costruiamo coi coefficienti dei termini a 2° grado della equazione trasformata la funzione analoga alla C, essa dovrà essere diversa da zero ed avere il segno di C finchè C non è zero, e dovrà essere eguale a zero se tale è C.

Simili considerazioni possono esser fatte sul determinante Δ. Infatti, quando $C > 0$, la $f(x, y) = 0$ rappresenta un'ellisse, reale o immaginaria secondochè i prodotti Δa e Δb sono negativi o positivi; e rappresenta due rette immaginarie quando $\Delta = 0$. Adunque la funzione analoga a Δ, ossia il discriminante della trasformata di $f(x, y)$, dovrà esser nullo quando Δ è nullo; e quando Δ non è nullo, i prodotti analoghi a Δa e Δb dovranno avere lo stesso segno di Δa e Δb. Quando $C < 0$, la $f(x, y) = 0$ rappresenta una iperbole se Δ non è nullo, e due rette reali ad angolo se Δ è nullo; adunque il discriminante della equazione trasformata è o non è nullo come Δ. Da ultimo, quando $C = 0$, la $f(x, y) = 0$ rappresenta una parabola se Δ non è nullo, e due rette parallele se Δ è nullo; adunque il discriminante della equazione trasformata è o non è nullo come Δ. Inoltre in questo ultimo caso le quantità analoghe ad A e B, composte coi coefficienti della equazione trasformata, debbono esser positive o negative o nulle insieme, secondo che A e B sono insieme positive o negative o nulle.

Codeste relazioni fra certe funzioni dei coefficienti della $f(x, y) = 0$ e le stesse funzioni dei cofficienti della equazione trasformata, meri-

---

(*) Il raggio è sempre espresso da $\frac{\sqrt{-\Delta a}}{a^2\,\mathrm{sen}\,\omega}$ (cfr. 2, IV).

tano di esser meglio approfondite, e perchè avremo a servircene molto utilmente in appresso, e perchè esse racchiudono i germi di una delle più importanti teorie dell'analisi moderna: quella degli invarianti, covarianti, ecc.

§ **10**. Considereremo prima il caso che i novelli assi delle coordinate sieno paralleli ai primitivi, poi il caso che i novelli assi abbiano la stessa origine dei primitivi, e da ultimo il caso che sia cangiata tanto l'origine quanto la direzione degli assi.

1° Le sostituzioni lineari da fare pel passaggio a un sistema di assi paralleli ai primitivi sono

$$x = X + x', \quad y = Y + y',$$

essendo x' e y' le coordinate della novella origine rispetto agli assi primitivi. Per effetto di tali sostituzioni la $f(x, y)$ diviene manifestamente

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax' + hy' + g)X + 2(hx' + by' + f)Y + f(x', y'),$$

vale a dire che:

« i coefficienti dei termini a 2° grado rimangono inalterati; i coeffi-
« cienti dei termini a 1° grado divengono rispettivamente le derivate
« parziali della $f(x, y)$, nelle quali siano sostituite alle variabili le
« coordinate della nuova origine; e il termine indipendente dalle va-
« riabili diviene il risultato della sostituzione delle coordinate della
« novella origine nella $f(x, y)$ ».

Ciò posto, è innanzi tutto evidente che ogni funzione dei coefficienti dei termini a 2° grado della equazione $f(x, y) = 0$, per es. C, sarà identica all'analoga funzione dei coefficienti della equazione trasformata.

Inoltre il discriminante della trasformata è

$$\begin{vmatrix} a & h & ax' + hy' + g \\ h & b & hx' + by' + f \\ ax' + hy' + g & hx' + by' + f & f(x', y') \end{vmatrix},$$

or sottraendo dalla 3ª orizzontale le due prime moltiplicate per x', y', e poi facendo la stessa operazione sulle verticali, esso si riduce al discriminante Δ della $f(x, y)$.

Le funzioni analoghe ad A e B, relative alla equazione trasformata, sono

$$A' = b \,.\, f(x', y') - (hx' + by' + f)^2,$$

$$B' = a \,.\, f(x', y') - (ax' + hy' + g)^2,$$

ovvero per le [7] e [7]'

$$A' = Cx'^2 - 2Gx' + A, \quad B' = Cy'^2 - 2Fy' + B.$$

Le analoghe a F, G, H sono

$$F' = -Cy' + F, \quad G' = -Cx' + G,$$

$$H' = Cx'y' - Fx' - Gy' + H.$$

2° Supponiamo ora che i novelli assi abbiano la stessa origine o dei primitivi. Le sostituzioni lineari per operare la trasformazione sono, com'è ben noto,

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \alpha' X + \beta' Y,$$

ove

$$\alpha = \frac{\text{sen } \mathbf{Xoy}}{\text{sen } \omega}, \quad \beta = \frac{\text{sen } \mathbf{Yoy}}{\text{sen } \omega}, \quad \alpha' = \frac{\text{sen } \mathbf{Xox}}{\text{sen } \omega}, \quad \beta' = \frac{\text{sen } \mathbf{Yox}}{\text{sen } \omega},$$

ed ω è l'angolo **xoy** dei primitivi assi. Detto Ω l'angolo **XoY** dei novelli assi, sarà (*)

$$\text{sen } \Omega = (\alpha\beta' - \alpha'\beta) \text{ sen } \omega,$$

onde

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta = \frac{\text{sen } \Omega}{\text{sen } \omega}.$$

Il determinante $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ dicesi *modulo* della trasformazione.

Sostituendo a x e y le loro espressioni mediante X e Y, la $f(x, y)$ assume la forma

$$a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + 2g'X + 2f'Y + c'.$$

Calcolati effettivamente i nuovi coefficienti a', b', . . . , e formate con essi le funzioni analoghe a C e Δ che indicheremo con C' e Δ', si potrebbe senza difficoltà verificare che (anche quando α, β, α', β' non abbiano gli attuali significati, ma siano arbitrari) sarà sempre

$$C' = C(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2, \quad \Delta' = \Delta(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2;$$

(*) Per dimostrare questa eguaglianza basta osservare che (α, β) e (α', β') sono le coordinate dei punti presi a distanza 1 dall'origine sui nuovi assi e riferiti ai primitivi; or l'area del triangolo, di cui due lati sieno coteste distanze, è espressa tanto da $\frac{1}{2}$ sen Ω quanto da $\frac{1}{2}$ sen ω $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$; dunque sen $\Omega = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)$ sen ω.

e poichè attualmente

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega},$$

sarà

$$\frac{C}{\operatorname{sen}^2\omega} = \frac{C'}{\operatorname{sen}^2\Omega}, \quad \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2\omega} = \frac{\Delta'}{\operatorname{sen}^2\Omega}.$$

Ma possiamo evitare i calcoli alquanto lunghi che esige l'accennata dimostrazione, ed ottenere non solo le due relazioni ora enunciate, ma anche una terza relazione, ricorrendo al seguente ingegnoso procedimento, dovuto al *Boole:*

Quando si passa da due assi cartesiani **ox**, **oy** ad altri due **oX**, **oY** aventi la stessa origine, le x, y si esprimono come funzioni di 1° grado e omogenee delle X, Y; per conseguenza la parte a 2° grado della $f(x, y)$ si trasformerà nella parte a 2° grado della funzione trasformata

$$a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + 2g'X + 2f'Y + c',$$

si avrà cioè identicamente

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 \ (^*).$$

Ma, indicando con ω l'angolo degli assi primitivi e con Ω quello dei nuovi, si ha pure identicamente

$$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 = X^2 + 2XY\cos\Omega + Y^2,$$

poichè l'uno e l'altro di questi trinomii esprime il quadrato della distanza del punto (x, y) ovvero (X, Y) dall'origine.

Dunque, aggiungendo alla 1ª identità la 2ª moltiplicata per una quantità arbitraria λ, avremo *identicamente*

$$(a + \lambda)\, x^2 + 2\,(h + \lambda\cos\omega)\, xy + (b + \lambda)\, y^2$$

$$= (a' + \lambda)\, X^2 + 2\,(h' + \lambda\cos\Omega)\, XY + (b' + \lambda)\, Y^2.$$

Per ogni valore di λ atto a rendere il primo membro quadrato esatto di una funzione di 1° grado ed omogenea di x e y, il secondo membro dovrà riescire il quadrato esatto della funzione di 1° grado

---

(*) Sarà pure $gx + fy = g'X + f'Y$, e $c = c'$.

ed omogenea trasformata. Ora la condizione affinchè il 1° membro riesca un quadrato esatto è

$$(a + \lambda)(b + \lambda) - (h + \lambda \cos \omega)^2 = 0$$

ovvero

$$\operatorname{sen}^2\omega \,.\, \lambda^2 + (a + b - 2h \cos \omega)\, \lambda + C = 0,$$

e analogamente la condizione affinchè il secondo membro divenga un quadrato esatto è

$$\operatorname{sen}^2\Omega \,.\, \lambda^2 + (a' + b' - 2h' \cos \Omega)\, \lambda + C' = 0\,;$$

dunque coteste due equazioni di 2° grado in λ dovranno fornire per λ gli stessi valori, e però i coefficienti dei termini simili dovranno essere proporzionali. Insomma avremo

$$[14] \qquad \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \omega} = \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \Omega}\,,$$

$$[15] \qquad \frac{I}{\operatorname{sen}^2 \omega} = \frac{I'}{\operatorname{sen}^2 \Omega}\,,$$

ponendo per brevità

$$I = a + b - 2h \cos \omega, \qquad I' = a' + b' - 2h' \cos \Omega.$$

Similmente, ai due membri della identità

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

$$= a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + 2g'X + 2f'Y + c'$$

aggiungendo una quantità arbitraria λ, abbiamo

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + (c + \lambda)$$

$$= a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + 2g'X + 2f'Y + (c' + \lambda).$$

Per ogni valore di λ che annulli il discriminante del 1° membro, avverrà che il 1° membro si scinda in due fattori di 1° grado; dovrà dunque il 2° membro scindersi nei due fattori di 1° grado trasformati di quelli, e per conseguenza dovrà risultar nullo anche il discriminante di esso 2° membro. Or il discriminante del 1° membro è manifesta-

mente $\Delta + C\lambda$, e quello del 2° è $\Delta' + C'\lambda$; quindi le due equazioni

$$\Delta + C\lambda = 0, \quad \Delta' + C'\lambda = 0$$

dovranno fornire per λ uno stesso valore, e però sarà

$$\frac{\Delta}{C} = \frac{\Delta'}{C'} \text{ (*)};$$

e moltiplicando questa identità per la [14],

$$[16] \qquad \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2 \omega} = \frac{\Delta'}{\operatorname{sen}^2 \Omega}.$$

3° Supponiamo da ultimo che si trasformino le coordinate mutando così l'origine come la direzione degli assi. Possiamo decomporre siffatta trasformazione in due, prima trasportando gli assi primitivi parallelamente fino a passare per la novella origine, e poi mutando la direzione degli assi intorno a questa origine. Ora abbiamo dimostrato che per effetto della prima trasformazione i coefficienti dei termini a 2° grado (e con essi C) si riproducono identicamente, e che il discriminante conserva il valore Δ; e siccome anche l'angolo ω non si altera, così le tre frazioni analoghe a

$$\frac{I}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2 \omega}$$

avranno rispettivamente i medesimi valori di queste.

Abbiamo poi dimostrato che anche per effetto della 2ª trasformazione le frazioni analoghe alle soprascritte conservano gli stessi valori di esse; adunque le tre relazioni [14], [15], [16] restano in vigore anche quando si muti non solo le direzione ma anche l'origine degli assi.

Le proprietà ora esposte si esprimono concisamente dicendo che le tre frazioni

$$\frac{I}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \quad \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2 \omega}$$

sono *invarianti assoluti* della $f(x, y)$ (**).

(*) Il ragionamento fatto per dimostrare questa relazione vale evidentemente anche quando si muti insieme la direzione e l'origine degli assi.

(**) Ci siam permesso di adottare questa denominazione, quantunque in verità qui si tratti di invarianti assoluti *simultanei* della $f(x, y)$ e della $x^2 + 2xy \cos \omega + y^2$, e ciò solo in senso ristretto, vale a dire per una particolare classe di sostituzioni lineari.

Quando il secondo sistema di assi è ortogonale, le [14], [15], [16] si riducono a

$$a' + b' = \frac{I}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \qquad C' = \frac{C}{\operatorname{sen}^2 \omega}, \qquad \Delta' = \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2 \omega};$$

e quando anche il primo sistema è ortogonale, a

$$a' + b' = a + b, \quad C' = C, \quad \Delta' = \Delta.$$

Da ultimo osserviamo che il segno di I (come quelli di C e Δ) è permanente; or, se la curva è un'ellisse reale, sono negativi Δa e Δb, e quindi $\Delta(a + b)$ che per assi ortogonali vale ΔI; dunque anche per assi qualunque l'*ellisse è reale o immaginaria secondochè* $\Delta I \lessgtr 0$.

Ordine di una curva algebrica.

§ **11**. *Ogni retta del piano incontra il luogo rappresentato dalla* $f(x, y) = 0$ *in due punti, i quali possono essere reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginarii.*

Ciò è evidente per gli assi delle x e delle y. Infatti le ascisse dei punti ove l'asse delle x seca il luogo si ottengono ponendo nella equazione $y = 0$, il che dà l'equazione di 2° grado

$$f(x, 0) = ax^2 + 2gx + c = 0,$$

la quale fornisce per x due valori. Questi sono reali e distinti quando $ac - g^2 < 0$ ossia $B < 0$, reali e coincidenti quando $B = 0$, immaginarii quando $B > 0$ (*). Per es., se l'asse delle x fosse una delle

(*) Per la chiara intelligenza del contenuto del presente paragrafo e dei seguenti, ricordiamo alcune proprietà delle radici dell'equazione di 2° grado

$$pz^2 + qz + r = 0$$

a coefficienti reali:

1° Le radici sono reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate, secondo che il *discriminante* $pr - \frac{1}{4}q^2 <=> 0$. In ogni caso la somma delle radici è $-\frac{q}{p}$ e il prodotto $\frac{r}{p}$.

2° Se p, q esistono e $r = 0$, una radice è nulla e l'altra no. E viceversa.

rette che portano il numero 1 nelle figure 10, 11, 12, si avrebbero due punti reali e distinti; se fosse una delle rette 2, si avrebbero due punti reali ma coincidenti; e se fosse una delle rette 3, due punti immaginarii. Tuttavia anche in questo caso il punto medio fra i detti due punti sarà sempre reale; giacchè ha per ascissa la semisomma delle radici della ultima equazione, che è $-\frac{g}{a}$.

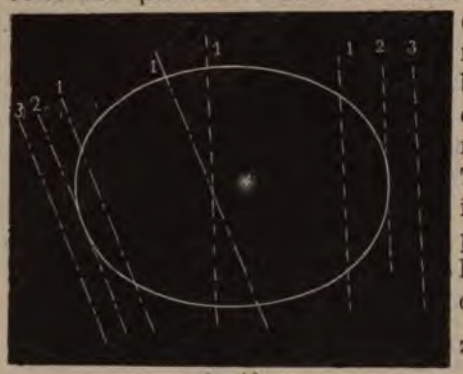


fig. 10

fig. 11

fig. 12

3° Se p, r esistono e $q = 0$, le due radici sono eguali e di segno contrario, e diverse da zero. E viceversa.

4° Se p esiste e $q = r = 0$, le due radici son nulle. E viceversa.

5° Se q, r esistono e $p = 0$, una radice è infinita e l'altra no. E viceversa.

(Infatti, posto $z = \frac{1}{u}$, la equazione diviene $ru^2 + qu + p = 0$; or questa ha una radice nulla e l'altra no (2°) quando r, q esistono e $p = 0$, e solo allora; dunque in questa ipotesi, e solo allora, i due valori di $\frac{1}{u}$, ovvero z, saranno uno infinito e l'altro no).

6° Se $p = q = 0$ e r esiste, le due radici sono infinite. E viceversa.

(Analoga dimostrazione).

7° Se l'equazione ha più di due radici, è una identità, ed allora $p = q = r = 0$. E viceversa.

Similmente l'asse delle y seca il luogo in due punti, le cui ordinate son fornite dalla equazione

$$f(0, y) = by^2 + 2fy + c = 0,$$

e questi punti sono reali e distinti quando $A < 0$, reali e coincidenti quando $A = 0$, immaginarii quando $A > 0$. Il loro punto medio è sempre reale, ed ha per ordinata $-\frac{f}{b}$.

Qui è opportuno fare un'osservazione: Se nella $f(x, y) = 0$ si suppone $a = 0$, allora nella equazione testè considerata $ax^2 + 2gx + c = 0$ una delle radici diviene $-\frac{c}{2g}$ e l'altra infinita: adunque l'asse delle x può incontrare il luogo in un punto a distanza infinita e in un altro a distanza finita, e ciò accade quando $a = 0$. Quando poi fosse anche $g = 0$, allora l'asse delle x incontrerebbe il luogo in due punti a distanza infinita e coincidenti, poichè una retta ha un sol punto a distanza infinita. Il primo fatto non può verificarsi nella ellisse, che non ha rami infiniti; ma si verifica nell'iperbole e nella parabola, come vedremo meglio in seguito (per ora ne diamo un esempio nelle rette 4, fig. 11 e 12). Il secondo fatto non può verificarsi nella parabola propriamente detta; poichè, se fosse $g = 0$ e $a = 0$ (onde $h = 0$, perchè $C = ab - h^2 = 0$), la $f(x, y) = 0$ diverrebbe $by^2 + 2fy + c = 0$ (cfr. § 8-5°). Parleremo altrove delle rette aventi in comune con l'iperbole soltanto punti all'infinito; per ora valgano come esempio le rette 5 fig. 11.

Similmente, l'asse delle y seca in un punto a distanza infinita ed in un altro punto a distanza finita quando $b = 0$ e $f \gtrless 0$, e in due punti coincidenti all'infinito quando $b = 0$ e $f = 0$.

Ciò che si è detto per gli assi delle coordinate vale per ogni altra retta del piano. Infatti, trasformiamo le coordinate prendendo la retta in esame per uno dei novelli assi: allora il grado della $f(x, y)$ non muta, e intanto siamo rientrati nel caso precedente (*).

(*) Nulla di particolare nel caso del circolo.

Nel caso di due rette convergenti, le rette 1 sono quelle che non passano pel punto comune alle due rette date, nè sono parallele ad esse. Le 2 sono quelle che passano pel detto punto comune. Le 3 mancano. Le 4 sono le parallele ad una delle due rette date. Le 5 mancano; però ciascuna delle due rette date ha in comune col sistema da

Con lo stesso ragionamento si prova che, se l'equazione di un luogo in coordinate cartesiane può ridursi ad esser razionale e intera e di grado n rispetto alle coordinate, ogni retta incontra il luogo in n punti (tra reali, coincidenti, immaginarii). Se dunque chiamiamo luoghi *algebrici* quelli la cui equazione in coordinate cartesiane può rendersi razionale e intera, e se chiamiamo *ordine* del luogo il numero dei punti in cui una retta qualunque lo incontra, potremo affermare che *l'ordine di un luogo è eguale al grado della sua equazione in coordinate cartesiane.*

Per es. *una retta è un luogo di 1° ordine.*

L'ellisse, l'iperbole e la parabola sono luoghi di 2° ordine, come anche il circolo e la coppia di rette.

Quando poi l'equazione cartesiana di una curva contiene funzioni circolari, esponenziali, logaritmiche, ecc. delle coordinate, insomma delle funzioni trascendenti, allora la curva dicesi *trascendente*, e la nozione di ordine cessa. Per es. le equazioni

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad y = \operatorname{tang} x$$

rappresentano curve trascendenti. L'asse delle x le seca in infiniti punti, poichè per $y = 0$ si ha $\operatorname{sen} x = 0$ e $\operatorname{tang} x = 0$, onde

$$x = 0, \ \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \pm 3\pi \ldots.$$

Le linee di 2° ordine sono spesso chiamate *sezioni coniche* o semplicemente *coniche*, perchè si può dimostrare che un cono di rivoluzione è secato da un piano che incontri una sola falda del cono lungo un'ellisse, da un piano che sechi amendue le falde lungo un'iperbole, e da un piano parallelo a un piano tangente lungo una parabola. Gli antichi geometri studiarono le curve di 2° ordine da questo punto di vista (*).

---

esse costituito infiniti punti, ed anche i due punti coincidenti all'infinito sulla retta stessa.

Nel caso di due rette parallele, le rette 1 sono tutte quelle non parallele alle rette date. Le 2, le 3 e le 4 mancano. Le 5 sono le parallele alle rette date.

Nel caso di una retta doppia mancano le 1, le 3 e le 4. Le 2 sono tutte le rette non parallele alla retta doppia, e le 5 tutte le parallele a questa.

Lasciamo al lettore i casi della ellisse immaginaria, e di due rette immaginarie convergenti o parallele.

(*) Un piano perpendicolare all'asse seca il cono lungo un circolo, e un piano che passi pel vertice lungo due rette distinte o coincidenti, oppure nel solo vertice.

§ **12**. Il problema di *calcolare le coordinate dei punti comuni a una retta e una curva date mediante le loro equazioni*, e il teorema precedente sull'ordine di una curva algebrica, possono essere trattati in modo generale. Sia

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'equazione di una curva, equazione che supporremo di grado n; e sia

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

l'equazione di una retta qualunque. Le coordinate dei punti comuni alla curva e alla retta sono quelle coppie di valori di x e y che soddisfano contemporaneamente alle equazioni della curva e della retta; otterremo dunque i valori di x relativi a tali punti eliminando la y fra le due equazioni. La eliminazione si fa presto; poichè basta ricavare l'espressione di y come funzione di x dalla equazione della retta:

$$y = \frac{-\lambda x - \nu}{\mu},$$

e sostituire questa espressione nella equazione della curva, che diverrà

$$\varphi\left(x, \frac{-\lambda x - \nu}{\mu}\right) = 0.$$

Ecco la equazione che determina i richiesti valori di x, cioè le ascisse dei punti comuni alla retta e alla curva. I corrispondenti valori di y saranno forniti dalla $y = \frac{-\lambda x - \nu}{\mu}$. Ad ogni valore reale di x corrisponde un valore reale di y, e quindi un punto reale; a due valori eguali di x due valori eguali di y, e quindi due punti coincidenti; a valori immaginarii di x valori immaginarii di y, e quindi punti immaginarii.

E siccome essendo la $\varphi(x, y)$ di grado n, in generale anche la $\varphi\left(x, \frac{-\lambda x - \nu}{\mu}\right)$ è di grado n; così la retta e la curva hanno in generale n punti comuni, ovvero la curva è di ordine n.

Applicando l'esposto procedimento alle linee rappresentate dalla $f(x, y) = 0$, si ottiene facilmente la seguente equazione di 2° grado in x:

$$(a\mu^2 - 2h\lambda\mu + b\lambda^2)x^2 + 2(g\mu^2 - h\mu\nu - f\lambda\mu + b\lambda\nu)x + (c\mu^2 - 2f\mu\nu + b\nu^2) = 0.$$

I due punti d'intersezione della retta con la curva saranno reali e distinti, reali e coincidenti, immaginarii, secondochè son tali i valori di x forniti dall'ultima equazione, cioè secondochè

$$(g\mu^2 - h\mu\nu - f\lambda\mu + b\lambda\nu)^2 - (a\mu^2 - 2h\lambda\mu + b\lambda^2)(c\mu^2 - 2f\mu\nu + b\nu^2) \gtreqless 0,$$

ovvero, sviluppando e dividendo per $-\mu^2$,

$$[17] \qquad A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu \lesseqgtr 0,$$

e sotto altra forma

$$[17]' \qquad \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu & \nu \\ \lambda & a & h & g \\ \mu & h & b & f \\ \nu & g & f & c \end{vmatrix} \gtreqless 0.$$

Tangente.

§ **13**. Siano **P**, **Q** (fig. 13) due punti di un arco di curva, e tiriamo la retta indefinita **PQ**: saranno **P** e **Q** due punti comuni alla retta **PQ** ed alla curva. Or supponiamo che il punto **P** resti fermo, e **Q** cammini sull'arco **PQ** prendendo successivamente le posizioni **Q'**, **Q''**, ... ed avvicinandosi indefinitivamente a **P**; e immaginiamo che al tempo stesso la retta **PQ** si muova intorno al punto **P** prendendo successivamente le posizioni **PQ'**, **PQ''**.... Mentre il punto **Q** tende alla posizione **P**, la retta mobile tenderà ad una certa posizione *limite* **PT**, che dicesi *tangente* alla curva nel punto **P**, il quale dicesi punto *di contatto*.

fig. 13

Onde la tangente va considerata come una retta tale che due (almeno) dei punti comuni ad essa ed alla curva coincidano, e però una retta può toccare in un punto una curva e secarla in altri punti.

Ma quando la curva è di 2° ordine, allora la tangente non ha in comune con la curva che i due punti coincidenti. Tali sono p. es. le rette col numero 2 delle figure 10, 11 e 12 (*).

(*) Nella coppia di rette la tangente in un punto di una di esse è quella retta stessa;

Ciò posto, siano $P'(x', y')$, $P''(x'', y'')$ punti dati: l'equazione della retta che li unisce può assumersi sotto la forma

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Se i due punti dati (fig. 14) appartengono alla curva di 2° ordine $f(x, y) = 0$, il coefficiente angolare $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ può esser messo sotto una forma speciale. Infatti nella presente ipotesi saranno adempiute le due condizioni

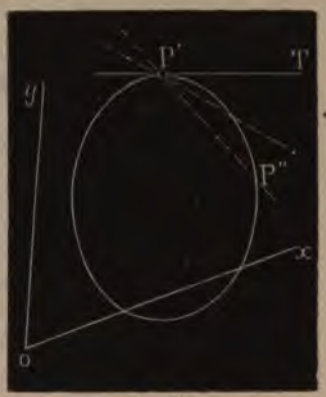


fig. 14

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2gx' + 2fy' + c = 0,$$

$$ax''^2 + 2hx''y'' + by''^2 + 2gx'' + 2fy'' + c = 0,$$

onde sottraendo si deduce

$$a(x''^2 - x'^2) + 2h(x''y'' - x'y') + b(y''^2 - y'^2) + 2g(x'' - x') + 2f(y'' - y') = 0,$$

e dividendo per $x'' - x'$

$$a(x'' + x') + 2h\left(y'' + x'\frac{y'' - y'}{x'' - x'}\right) + b(y'' + y')\frac{y'' - y'}{x'' - x'} + 2g + 2f\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = 0,$$

e riunendo i termini con $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$

$$[a(x'' + x') + 2hy'' + 2g] + [2hx' + b(y'' + y') + 2f]\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = 0,$$

e risolvendo

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{a(x'' + x') + 2hy'' + 2g}{2hx' + b(y'' + y') + 2f};$$

sicchè l'equazione della retta (*corda*) in esame diverrà

$$[18] \qquad y - y' = -\frac{a(x'' + x') + 2hy'' + 2g}{2hx' + b(y'' + y') + 2f}(x - x').$$

---

e nel punto d'incontro delle due rette (che può essere all'infinito) si hanno infinite tangenti, giacchè ogni retta che passi per quel punto incontra la coppia di rette in due punti coincidenti ivi.

Nel caso della retta doppia ogni retta è tangente.

Ora supponiamo che il punto $P'(x', y')$ resti fermo, e $P''(x'', y'')$ cammini sulla curva avvicinandosi indefinitamente a $P'(x', y')$: allora la retta [18] tenderà a prendere una posizione limite, la equazione della quale si otterrà ponendo nella [18] $x'' = x'$ e $y'' = y'$; si troverà così

$$y - y' = -\frac{ax' + hy' + g}{hx' + by' + f}(x - x').$$

Questa è dunque *l'equazione della tangente alla curva* $f(x, y) = 0$ *nel punto* (x', y') (*).

Liberandola dalle frazioni avremo

$$(ax'+hy'+g)x+(hx'+by'+f)y-(ax'+hy'+g)x'-(hx'+by'+f)y'=0;$$

e sommando questa con la prima delle due considerate equazioni di condizione avremo finalmente

$$[19]\quad (ax' + hy' + g)x + (hx' + by' + f)y + (gx' + fy' + c) = 0,$$

od anche

$$[19]'\quad ax'x + h(y'x + x'y) + by'y + g(x' + x) + f(y' + y) + c = 0,$$

od anche

$$[19]''\quad (ax + hy + g)x' + (hx + by + f)y' + (gx + fy + c) = 0 \quad (**).$$

(*) Se si fosse posto $y'' = y'$ e $x'' = x'$ nella equazione della retta che passa per i punti (x', y'), (x'', y'') scritta sotto la forma originale: $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$, si sarebbe trovato $y - y' = \frac{0}{0}(x - x')$. Il simbolo $\frac{0}{0}$ qui sarebbe indizio di una indeterminazione *effettiva;* poichè così procedendo, noi non avremmo tenuto alcun conto della ipotesi essenziale che il punto (x'', y'') tenda a coincidere con (x', y') camminando sulla curva; sicchè la retta in questione potrebbe esser divenuta una qualunque delle infinite rette che passano per (x', y').

Il calcolo differenziale insegna ad applicare metodicamente e con uno speciale algoritmo il procedimento da noi seguito, e riesce a trovare l'equazione della tangente a qualsiasi curva algebrica o trascendente.

(**) L'equazione della tangente può scriversi anche

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & 1 \\ x' & A & H & G \\ y' & H & B & F \\ 1 & G & F & C \end{vmatrix} = 0,$$

com'è facile verificare sviluppando secondo la 1ª orizzontale e tenendo presenti le identità [6].

L'equazione della tangente si ricorda facilmente sotto la forma [19], poichè: « i coefficienti di x e y si ottengono prendendo le semide- « rivate parziali della $f(x, y)$ rispetto a x e y e sostituendovi le co- « ordinate del punto di contatto; e il termine noto $gx' + fy' + c$ si « ottiene prendendo la metà dei termini a 1° grado nella $f(x, y)$, so- « stituendovi le coordinate del punto di contatto, e sommandoli poi « col termine c indipendente dalle coordinate ».

Facili a ricordare sono anche la [19]′ e la [19]″ (*).

Il primo membro della equazione della tangente dicesi una funzione *bilineare* delle x', y' e delle x, y; poichè contiene ambedue queste coppie di quantità a 1° grado. Esso è anche una funzione *simmetrica* di tali coppie di quantità, poichè non si altera scambiando insieme x' con x e y' con y.

§ **14.** Dopo aver visto come, dato un punto sulla curva, si trovi l'equazione della tangente in esso; vediamo come si possa, viceversa, *posto che una retta data sia tangente alla curva, trovare le coordinate del punto di contatto.*

Sia
$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$
l'equazione di una data tangente. Indicando con x', y' le coordinate incognite del punto di contatto, potremo scrivere l'equazione della tangente anche sotto la forma [19]. Adunque x' e y' dovranno aver tali valori, che la equazione data e la [19] rappresentino una stessa retta, e quindi abbiano proporzionali i coefficienti dei termini simili, onde

$$\frac{ax' + hy' + g}{\lambda} = \frac{hx' + by' + f}{\mu} = \frac{gx' + fy' + c}{\nu}.$$

Se chiamiamo k il comune incognito valore di questi tre rapporti (**), potremo scrivere

$$[20] \qquad \begin{cases} ax' + hy' + g = k\lambda, \\ hx' + by' + f = k\mu, \\ gx' + fy' + c = k\nu. \end{cases}$$

(*) Per formare la [19]′ basta in $f(x, y)$ sdoppiare i termini ax^2, $2hxy, \ldots$ scrivendo axx', $h(xy' + x'y), \ldots$, e poi apporre un accento dove indica la [19]′.

Se l'origine è sulla curva ($c = 0$), la tangente ivi è
$$gx + fy = 0.$$

(**) Questa maniera di risolvere un sistema di equazioni lineari, date sotto forma di rapporti eguali, è molto usitata ed elegante.

Da queste equazioni di 1° grado in x', y' e k ricaveremo ciò che a noi occorre, cioè x' e y'; ed avremo

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} -g & h & -\lambda \\ -f & b & -\mu \\ -c & f & -\nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h & -\lambda \\ h & b & -\mu \\ g & f & -\nu \end{vmatrix}} \qquad y' = \frac{\begin{vmatrix} a & -g & -\lambda \\ h & -f & -\mu \\ g & -c & -\nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h & -\lambda \\ h & b & -\mu \\ g & f & -\nu \end{vmatrix}},$$

ovvero

$$[21] \qquad x' = \frac{A\lambda + H\mu + G\nu}{G\lambda + F\mu + C\nu}, \qquad y' = \frac{H\lambda + B\mu + F\nu}{G\lambda + F\mu + C\nu}.$$

Queste formole si ricordano agevolmente, perchè i coefficienti di λ, μ, ν nei numeratori e nel denominatore sono i determinanti minori complementari degli elementi delle successive linee del discriminante Δ.

Osserviamo intanto che le coordinate x', y' del punto di contatto, date dalle [21], devono soddisfare l'equazione della tangente $\lambda x + \mu y + \nu = 0$; sicchè si ha

$$(A\lambda + H\mu + G\nu)\lambda + (H\lambda + B\mu + F\nu)\mu + (G\lambda + F\mu + C\nu)\,\nu = 0,$$

ovvero

$$[22] \qquad A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0.$$

Si ritrova così *la condizione affinchè una retta data* $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ *sia tangente alla curva*, condizione già contenuta nella [17].

Si ottiene la stessa condizione sotto forma di determinante, osservando che le [20] e la $\lambda x' + \mu y' + \nu = 0$ formano un sistema di quattro equazioni fra le tre incognite x', y', k; e però dev'esser nullo il determinante formato dai coefficienti di queste e dai termini noti, ovvero

$$[22]' \qquad \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu & \nu \\ \lambda & a & h & g \\ \mu & h & b & f \\ \nu & g & f & c \end{vmatrix} = 0 \ (*).$$

(*) Questo determinante si forma facilmente dal discriminante orlandolo con una linea orizzontale e una verticale.

È utile osservare che i numeratori e il denominatore nelle formole [21] non sono altro che la metà delle derivate parziali del primo membro della [22] rispetto a λ, μ, ν.

Coordinate di rette ed equazioni tangenziali.

§ **15.** I numeri x, y li abbiamo chiamati *coordinate* (Cartesiane) *di un punto*, perchè dati x e y il punto è individuato, e viceversa. Or dati i rapporti di due dei numeri λ, μ, ν al terzo, la retta $\lambda x+\mu y+\nu=0$ è individuata, e viceversa; dunque potremo analogamente chiamare *coordinate* (Plückeriane) *della retta* i due rapporti suddetti, per es. $\frac{\lambda}{\nu}$ e $\frac{\mu}{\nu}$. Essi rappresentano i valori inversi e cambiati di segno dei segmenti che la retta taglia dagli assi (poichè per $y=0$ l'equazione della retta dà $y=-\frac{\nu}{\lambda}$ e per $x=0$ dà $y=-\frac{\nu}{\mu}$). Noi porremo per brevità

$$u=\frac{\lambda}{\nu}, \quad v=\frac{\mu}{\nu};$$

sicchè l'equazione della retta, divisa per ν, assumerà la forma

$$ux+vy+1=0,$$

che è simmetrica rispetto alle x, y ed alle u, v (*).

Ora la equazione di condizione [22], divisa per ν^2, diviene

$$[23] \qquad Au^2+2Huv+Bv^2+2Gu+2Fv+C=0,$$

la quale differisce dalla $f(x, y)=0$ solo pel mutamento delle $a, b, \ldots$ nelle $A, B, \ldots$ e delle x, y nelle u, v; e noi la indicheremo con

$$F(u, v)=0.$$

(*) Quando la retta passa per l'origine, ν è nullo, e però le coordinate u, v della retta riescono infinite. Ma il loro rapporto $\frac{u}{v}=\frac{\lambda}{\mu}$ determina anche allora la direzione della retta.

Essa stabilisce fra le coordinate u, v di una retta una relazione, che è soddisfatta da tutte le rette tangenti alla curva e solo da esse, precisamente come la $f(x, y) = 0$ è soddisfatta da tutti i punti della curva e solo da essi. Perciò chiameremo $F(u, v) = 0$ *l'equazione tangenziale della curva*, oppure *l'equazione della curva in coordinate di rette.*

La curva, considerata come individuata dai suoi punti, l'abbiamo chiamata *luogo* di essi punti; se la consideriamo come individuata dalle sue tangenti (fig. 15 e 16), la chiameremo *inviluppo* di esse rette tangenti.

fig. 15

fig 16

Se operiamo sui coefficienti $A, H, \ldots$ della $F(u, v)$ come si era operato sui coefficienti $a, h, \ldots$ della $f(x, y)$ per ottenere essi $A, H, \ldots$, e se inoltre mutiamo u e v in x e y, la $F(u, v)$ si muta, per le [6], in $\Delta \cdot f(x, y)$; vale a dire che, a differenza del fattore costante Δ, *le funzioni* $F(u, v)$, $f(x, y)$ *si deducono l'una dall'altra con lo stesso procedimento*, e perciò possono chiamarsi *reciproche* l'una dell'altra. La $F(u, v)$ dicesi anche *aggiunta* alla $f(x, y)$.

Presenta una singolarità il caso $\Delta = 0$ in cui la curva degenera in una coppia di rette, poichè allora la equazione $F(u, v) = 0$ si riduce alla equazione del punto comune alle due rette contato due volte; e infatti si ha (cfr. § 8-3°)

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{A}(Au + Hv + G)^2 \\ &= \frac{1}{B}(Hu + Bv + F)^2 \\ &= \frac{1}{C}(Gu + Fv + C)^2 \\ &= (u\sqrt{A} + v\sqrt{B} + \sqrt{C})^2. \end{aligned}$$

Classe di una curva algebrica.

§ 16. Quante e quali tangenti ad una curva di 2° ordine passano per un dato punto (x_1, y_1)? — A questa domanda si risponde, osservando che, se una tangente alla curva passa pel dato punto, le sue coordinate u, v debbono soddisfare simultaneamente alla $F(u, v) = 0$ ed alla $ux_1 + vy_1 + 1 = 0$. Ora eliminando v fra queste due equazioni si ottiene una risultante

$$F\left(u, -u\frac{x_1}{y_1} - \frac{1}{y_1}\right) = 0,$$

di 2° grado in u; e ad ogni valore di u fornito da questa risultante corrisponde un valore di v. Dunque *per ogni punto si possono condurre ad una curva di 2° ordine due tangenti, reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie.* Per es. nelle fig. 17, 18 e 19 dai punti distinti col numero 1 si possono condurre due tangenti, dai punti 2 della curva una, dai punti 3 nessuna. Ma su questo argomento ritorneremo più tardi (*).

fig. 17

fig. 18

fig. 19

(*) Nel caso di una coppia di rette da ogni punto si può tirare una sola tangente, cioè la retta che va al punto comune alle due rette (che può esser all'infinito). Per questo punto poi si hanno infinite tangenti, come già osservammo.

Nel caso della retta doppia da ogni punto si possono tirare infinite tangenti.

Con lo stesso ragionamento si prova che, se l'equazione di una curva in coordinate tangenziali (o di rette) può ridursi ad essere razionale e intera di grado m in u e v, ossia ad essere razionale intera ed omogenea di grado m in λ, μ, ν, allora per ogni punto del piano si possono tirare m tangenti alla curva, tra reali e distinte, coincidenti, immaginarie. Se dunque chiamiamo *classe* di una curva (inviluppo) il numero delle tangenti che le si possono tirare da un punto, potremo affermare che *la classe di una curva è eguale al grado della sua equazione in coordinate Plückeriane di rette.*

fig. 20

Per es., un punto può considerarsi determinato da tutte le rette che passano per esso (fig. 20); vale a dire che, dette x_0 e y_0 le sue coordinate, *l'equazione del punto in coordinate di rette* sarà

$$x_0 u + y_0 v + 1 = 0.$$

Essendo questa una equazione di 1° grado (e d'altronde essendo evidente che di queste rette ne passa una per ogni dato punto del piano), segue che *il punto è un inviluppo di* 1ª *classe.*

Considerato poi come luogo, *il punto è di ordine zero*; poichè una retta arbitraria in generale non lo incontra.

Invece *una retta è di* 1° *ordine e di classe zero.*

L'ellisse, l'iperbole, la parabola sono luoghi di 2° *ordine ed inviluppi di* 2ª *classe;* poichè da ogni punto si possono a codesti inviluppi tirare due tangenti, tra reali e distinte, coincidenti, immaginarie (*).

Sicchè per le curve (propriamente dette) qui considerate, l'ordine è eguale alla classe (**).

(*) Nulla di particolare nel circolo. Una coppia di rette distinte si può considerare come di 1ª classe, e una retta doppia di classe *infinita.*

(**) Non si creda che ciò avvenga per tutte le curve algebriche; anzi si può dire che in generale avviene il contrario. Per es. si dimostra che in generale una curva di 3° ordine è di 6ª classe, e una curva di 3ª classe è di 6° ordine; una curva di 4° ordine è di 12ª classe, e una curva di 4ª classe è di 12ª ordine; insomma: *una curva di* n^{mo} *ordine è in generale di* $n(n-1)^{ma}$ *classe, e una curva di* n^{ma} *classe è di* $n(n-1)^{mo}$ *ordine.*

Qui si presenta un'obbiezione: Se una curva di n^{ma} classe è di $n(n-1)^{mo}$ ordine, dovrà una curva di $n(n-1)^{ma}$ classe essere di ordine $n(n-1)\{n(n-1)-1\}^{ma}$: or questo numero è $> n$ quando n supera 2; quindi pare che si cada nell'assurdo.

Accenneremo la risposta a tale obbiezione ragionando pel caso di $n = 3$. L'equa-

La equazione [22] fornisce per ν due valori in funzione di λ e μ; ne consegue che *una conica possiede due tangenti parallele a una data direzione* $\mathbf{r}(\lambda x + \mu y + \ldots = 0)$ (fig. 21).

Nel caso della parabola il coefficiente C di ν^2 è nullo, una delle due tangenti è determinata dalla [22], l'altra va all'infinito.

fig. 21

Normale.

§ **17**. La perpendicolare alla tangente nel punto di contatto dicesi *normale* alla curva.

L'equazione della normale nel punto (x', y') *della curva* $f(x, y) = 0$ è presto trovata, poichè basta formare l'equazione di una retta che passi per (x', y') e sia perpendicolare alla tangente rappresentata dalla equazione [19]. Avremo, nel caso di assi ortogonali,

$$[24] \qquad \frac{x - x'}{ax' + hy' + g} = \frac{y - y'}{hx' + by' + f}.$$

Punti in involuzione.

§ **18**. Siano (fig. 22) $\mathbf{P}(x, y)$, $\mathbf{P}'(x', y')$ due punti, e tiriamo per essi la retta indefinita **PP'**, sulla quale fissiamo la direzione positiva e la negativa. Le coordinate di ciascun punto **Q** della

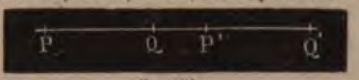


fig. 22

---

zione in coordinate x, y della più generale curva di 3° ordine conta 10 termini, e quindi 9 coefficienti arbitrarii, potendo uno dei coefficienti ridursi all'unità. La equazione tangenziale della curva medesima sarà di 6° grado, e conterrà quindi 28 termini; ma i loro coefficienti non saranno tutti indipendenti, poichè sono funzioni dei 9 suddetti. Dunque la curva più generale di 3° grado non è la curva più generale di 6ª classe, ma una curva speciale di 6ª classe. Sicchè non resta escluso che la curva più generale di 6ª classe sia di $6 . 5 = 30^{mo}$ ordine.

retta si possono assumere sotto la forma

$$\mathbf{Q}\left(\frac{mx+nx'}{m+n},\ \frac{my+ny'}{m+n}\right) \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{Q}\left(\frac{\frac{m}{n}x+x'}{\frac{m}{n}+1},\ \frac{\frac{m}{n}y+y'}{\frac{m}{n}+1}\right),$$

indicando con $\frac{m}{n}$ il rapporto delle distanze **P'Q** e **QP** di esso punto **Q** da **P'** e **P**; rapporto che è positivo pei punti del segmento **PP'**, negativo e in valore assoluto minore di 1 per i punti del prolungamento di **PP'** al di là di **P'**, negativo e in valore assoluto maggiore di 1 per i punti del prolungamento di **P'P** al di là di **P**. Il rapporto diviene zero per il punto **P'**, infinito per **P**, 1 pel punto di mezzo del segmento **PP'**, — 1 pel punto infinito della retta.

A ciascun punto della retta corrisponde un valore del rapporto, e viceversa, a ciascun valore del rapporto un punto; il che si esprime dicendo che la corrispondenza fra i punti della retta e i valori del rapporto $\frac{m}{n}$ è *univoca*.

A due valori opposti (cioè eguali e di segno opposto, ma del resto arbitrarii) del rapporto $\frac{m}{n}$ corrispondono due punti **Q** e **Q'** *coniugati armonicamente* rispetto a **P** e **P'**.

Ad ogni punto **Q** della retta corrisponde uno **Q'** coniugato armonicamente ad esso rispetto a **P** e **P'**, e viceversa, a **Q'** corrisponde **Q** come coniugato; sicchè la corrispondenza fra ciascun punto e il suo coniugato è insieme *univoca* e *reciproca*. Questa doppia proprietà si esprime dicendo che le infinite coppie di punti coniugati armonicamente rispetto a due punti dati **P**, **P'** sono in *involuzione quadratica*.

È chiaro poi che al punto **P'** è coniugato lo stesso **P'**, e similmente a **P** lo stesso **P**; perciò i due punti **P**, **P'** sono chiamati i punti *doppii* della involuzione.

Al punto medio fra **P** e **P'** è coniugato il punto all'infinito della retta **PP'**.

Si noti anche che, se le coordinate di **P** e **P'** sono complesse coniugate, la retta **PP'** sarà reale, e ad ogni punto reale della retta non cesserà di corrispondere come coniugato un punto reale. Infatti sia

$$\mathbf{P}\left\{\begin{matrix} x=\alpha+i\beta \\ y=\gamma+i\delta \end{matrix}\right\}, \qquad \mathbf{P'}\left\{\begin{matrix} x'=\alpha-i\beta \\ y'=\gamma-i\delta \end{matrix}\right\}:$$

allora l'equazione della retta che unisce questi punti sarà

$$\frac{x-(\alpha+i\beta)}{(\alpha+i\beta)-(\alpha-i\beta)}=\frac{y-(\gamma+i\delta)}{(\gamma+i\delta)-(\gamma-i\delta)},$$

che si riduce a

$$\frac{x-\alpha-i\beta}{\beta}=\frac{y-\gamma-i\delta}{\delta},$$

ovvero

$$\frac{x-\alpha}{\beta}=\frac{y-\gamma}{\delta},$$

e quindi rappresenta una retta reale, cioè quella che passa pel punto (α, γ) e fa con gli assi due angoli aventi i seni nel rapporto $\frac{\delta}{\beta}$.

Inoltre sarà

$$\frac{mx+nx'}{m+n}=\frac{(m+n)\,\alpha+i\,(m-n)\,\beta}{m+n}=\alpha+i\,\frac{m-n}{m+n}\,\beta\,;$$

or se questa espressione è reale dovrà essere

$$i\,\frac{m-n}{m+n}=\theta,$$

indicando con θ una quantità reale; e quindi

$$\frac{m+n}{m-n}=\frac{i}{\theta}\,.$$

Ciò posto, l'ascissa del punto corrispondente al rapporto $-\frac{m}{n}$ si ottiene dalla precedente mutando di segno n, e però sarà

$$\alpha+i\,\frac{m+n}{m-n}\,\beta,\quad \text{ovvero } \alpha+\frac{i^2\beta}{\theta}=\alpha-\frac{\beta}{\theta},$$

quantità reale. Lo stesso per l'ordinata.

Tangenti, punti coniugati, poli e polari.

§ 19. Ciò premesso, siano dati (fig. 23, 24, 25) due punti $\mathbf{P}(x, y)$

fig. 23

fig. 24

e $\mathbf{P}'(x', y')$, e si domandi quanti e quali punti della retta $\mathbf{PP}'$ che passa per i due punti dati appartengano anche alla curva rappresentata dalla equazione generale $f(x, y) = 0$.

fig. 25

È manifesto che appartengono alla curva quei punti le cui coordinate soddisfanno alla equazione della curva; e siccome abbiamo già osservato che le coordinate di ciascun punto della retta $\mathbf{PP}'$ possono essere scritte sotto la forma:

$$\frac{mx + nx'}{m + n}, \quad \frac{my + ny'}{m + n};$$

così apparterranno alla curva quei punti della retta $\mathbf{PP}'$ per i quali sarà soddisfatta la equazione

$$f\left(\frac{mx + nx'}{m + n}, \quad \frac{my + ny'}{m + n}\right) = 0 \ (^*),$$

ovvero

$$\frac{a\,(mx + nx')^2}{(m + n)^2} + \frac{2h\,(mx + nx')\,(my + ny')}{(m + n)^2} + \frac{b\,(my + ny')^2}{(m + n)^2}$$

$$+ \frac{2g\,(mx + nx')}{m + n} + \frac{2f\,(my + ny')}{m + n} + c = 0.$$

(*) Questo procedimento è dovuto al JOACHIMSTHAL.

Nel nostro caso x, y e x', y' sono quantità date; e ciò che bisogna ricavare da questa equazione sono quei valori del rapporto $\frac{m}{n}$ per i quali essa riesce soddisfatta.

Moltiplicando per $(m+n)^2$ l'equazione diventa

$$a(mx+nx')^2+2h(mx+nx')(my+ny')+b(my+ny')^2$$
$$+2g(mx+nx')(m+n)+2f(my+ny')(m+n)+c(m+n)^2=0,$$

e ordinando rispetto ad m

$$(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)m^2$$
$$+2\{axx'+h(xy'+yx')+byy'+g(x+x')+f(y+y')+c\}mn$$
$$+(ax'^2+2hx'y'+by'^2+2gx'+2fy'+c)n^2=0.$$

Ora i coefficienti di m^2 e n^2 equivalgono a $f(x, y)$ e $f(x', y')$, e il coefficiente di mn possiamo accennarlo con $axx'+\ldots$; dunque

$$f(x, y)m^2+2(axx'+\ldots)mn+f(x', y')n^2=0,$$

e dividendo per n^2

$$[25] \qquad f(x, y)\left(\frac{m}{n}\right)^2+2(axx'+\ldots)\frac{m}{n}+f(x', y')=0.$$

Questa equazione fornisce i valori del rapporto $\frac{m}{n}$ corrispondenti ai punti che la retta **PP'** ha comuni con la curva.

Da essa scaturiscono molte e importanti conseguenze, delle quali passiamo a svolgere le principali:

1° L'equazione è di 2° grado in $\frac{m}{n}$; e quindi conferma che ogni retta incontra la curva in due punti, o reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginari; ovvero che *la curva è di 2° ordine.*

2° Se il punto **P'** è sulla curva (fig. 26), uno dei due punti d'intersezione coincide con **P'**, e il corrispondente valore di $\frac{m}{n}$ è zero, onde la [25] ha una radice zero; come era d'altronde evidente, essendo ora $f(x', y')=0$. L'altra radice della [25] darà l'altro punto d'intersezione: essa è

$$\frac{m}{n}=-2\,\frac{ax'x+\ldots}{f(x, y)}.$$

fig. 26

3° Se anche l'altro punto d'intersezione cade in **P'** (fig. 27), ossia se la retta **PP'** risulta tangente in **P'**, dovrà esser nullo anche questo altro valore di $\frac{m}{n}$, e per conseguenza sarà nullo il numeratore, cioè

fig. 27

$$ax'x + h(y'x + x'y) + by'y + g(x' + x)$$
$$+ f(y' + y) + c = 0.$$

Questa è una relazione tra le coordinate del punto di contatto **P'** e quelle di un punto qualunque **P** della tangente, vale a dire è *l'equazione della tangente in* **P'**.

Ritroviamo adunque la equazione della tangente sotto la forma [19]'.

4° Supponiamo ora che **P'** sia un punto dato qualunque del piano; la retta **P'P** condotta da **P'** sarà tangente alla curva quando la [25] fornirà per $\frac{m}{n}$ due valori eguali, quando cioè sarà

$$[26] \qquad f(x, y) \,.\, f(x', y')$$
$$- \{ax'x + h(y'x + x'y) + by'y + g(x' + x) + f(y' + y) + c\}^2 = 0.$$

Questa è una relazione fra le coordinate del punto fisso **P'** e quelle di un punto **P** variabile, ma soggetto a stare sopra una retta che passi per **P'** e tocchi la curva; sarà dunque *l'equazione complessiva delle tangenti che si possono tirare dal punto* **P'**(x', y') *alla curva.* E siccome è di 2° grado, così resta confermato che *la curva è di 2ª classe* (*).

fig. 28

Le due tangenti (fig. 27) possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, immaginarie. Sono coincidenti quando **P'** è sulla curva, poichè allora la [26] diviene

$$(ax'x + \ldots)^2 = 0.$$

Chiameremo punti *esterni* alla curva

(*) Non ci fermiamo a mostrare come l'equazione complessiva [26] si decomponga nelle equazioni separate delle due rette che rappresenta, nè a verificare che il suo discriminante è nullo; ciò potrà fornire al lettore un'opportuna occasione per applicare le cose esposte innanzi (§ 8-3°) intorno alle equazioni rappresentanti coppie di rette.

quelli dai quali si possono tirare due tangenti (reali e distinte) alla curva, e *interni* quelli da cui non si possono condurre tangenti (*).

P. es. tutti i punti di una tangente sono esterni, tranne il punto di contatto.

Per ottenere più facilmente un criterio *algebrico* onde arguire se le tangenti da un punto dato $\mathbf{P}'$ siano reali e distinte, reali e coincidenti, immaginarie, osserviamo che l'equazione complessiva delle tangenti condotte dall'origine, dedotta dalla [26] ponendo $x'=y'=0$, è

$$c \,.\, \mathrm{f}(x, y) - (gx + fy + c)^2 = 0,$$

ovvero per la [7]''

$$[26]' \qquad Bx^2 - 2Hxy + Ay^2 = 0.$$

Qui è chiaro che le due tangenti sono reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie, secondo che $AB - H^2 \lesseqgtr 0$, ovvero (essendo per le [6] $AB - H^2 = \Delta c$)

$$\Delta c \lesseqgtr 0.$$

Se ora trasportiamo l'origine nel punto $\mathbf{P}'(x', y')$ senza mutare la direzione degli assi, Δ rimarrà invariato (§ 10-1°) e c diverrà $\mathrm{f}(x', y')$. Adunque *le tangenti da* $\mathbf{P}'$ *saranno reali e distinte, reali e coincidenti, immaginarie, secondo che il prodotto* $\Delta \,.\, \mathrm{f}(x', y')$ *è negativo, nullo o positivo.*

Insomma, *la curva separa quella parte del piano per i punti della quale* $\Delta \,.\, \mathrm{f}(x', y')$ *è positivo* (parte interna alla curva) *da quella parte per cui quel prodotto è negativo* (parte esterna alla curva); e per i punti della curva il detto prodotto è nullo (**).

Infatti $\mathrm{f}\left(\frac{mn + nx'}{m + n}, \frac{my + ny'}{m + n}\right)$ differisce pel fattore positivo $\frac{n^2}{(m + n)^2}$ dal 1° membro della [25]; or quando la [25] ha radici reali, il 1° membro assume il segno di $\mathrm{f}(x, y)$ per valori (reali) di $\frac{m}{n}$ non compresi fra le due radici, e il segno opposto per valori fra le due radici; mentre quando la [25] ha radici immaginarie, il segno è sempre quello di $\mathrm{f}(x, y)$; e ciò basta per concludere che sopra una retta che sechi la curva, questa separa i punti interni dagli esterni, e che i punti di una retta che non sechi nè tocchi la curva sono o tutti esterni o

---

(*) Questa nomenclatura è consigliata da ciò che ci dicono gli occhi, specialmente nel caso dell'ellisse e del circolo che sono curve chiuse.

(**) Quando poi $\Delta = 0$, cioè quando la curva si scinde in due rette, allora il prodotto è nullo qualunque sia il punto $\mathbf{P}'$, e però le due tangenti coincidono da qualunque punto si tirino: esse infatti si riducono alla retta che va da $\mathbf{P}'$ al punto d'incontro delle due rette.

tutti interni. Nell'ultimo caso la curva non può aver tangenti reali, onde è immaginaria.

Ogni punto della curva può considerarsi come l'intersezione di due tangenti venute a coincidere, precisamente come una tangente va considerata come la retta per due punti della curva venuti a coincidere.

Osserviamo ancora che col trasportare l'origine nel punto $\mathbf{P}'(x', y')$ la [26]' diviene (cfr. § 10-1°)

$$B'X^2 - 2H'XY + A'Y^2 = 0,$$

e poichè $X = x - x'$, $Y = y - y'$,

[27] $B'(x - x')^2 - 2H'(x - x')(y - y') + A'(y - y')^2 = 0$:

questa è la equazione complessiva delle tangenti da $\mathbf{P}'$ sotto una forma diversa dalla [26]. Risolvendola rispetto a $(x - x')$ o $(y - y')$ si hanno le equazioni separate delle due tangenti (*).

5° I valori di $\frac{m}{n}$ forniti dalla [25] sono opposti quando il coefficiente di $\frac{m}{n}$ è nullo, cioè quando

[28] $ax'x + h(y'x + x'y) + by'y + g(x' + x) + f(y' + y) + c = 0.$

In tal caso i due punti (reali o immaginarii) ove la retta $\mathbf{PP}'$ seca la curva saranno coniugati armonicamente rispetto ai punti $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ (fig. 29 e 30). Viceversa, i punti $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ saranno coniugati armonicamente rispetto ai due punti d'intersezione della retta che li unisce con la curva, e però li diremo *coniugati* (l'uno all'altro) rispetto alla curva

fig. 29

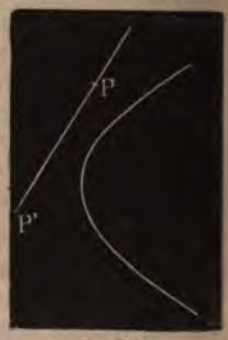


fig. 30

È chiaro (§ 18) che *su ciascuna retta vi sono infinite coppie di punti coniugati, le quali costituiscono una involuzione quadratica, che ha per punti doppi i due punti ove la retta seca la curva* (**).

(*) Si ponga mente che $A'B' - H'^2 = \Delta \,.\, f(x', y')$.

(**) Codesti punti possono essere immaginarii, ma siccome allora le loro coordinate non differiscono che nel segno di i, così ad ogni punto reale della retta corrisponderà un punto coniugato anche reale.

Se i due punti comuni alla retta ed alla curva sono reali, due punti coniugati sono uno esterno e l'altro interno alla curva, altrimenti sono ambedue esterni (quando la conica è reale).

6° Or supponiamo che il punto **P'** sia dato: su ciascuna retta condotta per **P'** (fig. 31 a 35) esiste un punto **P** coniugato a **P'**.

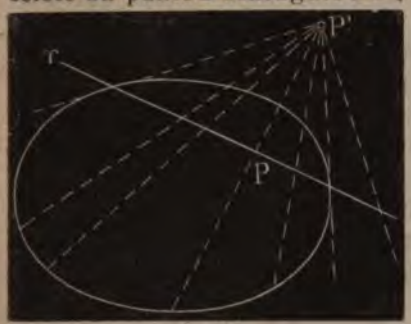


fig. 31

fig. 32

e l'equazione [28] mostra che *il luogo degl'infiniti punti* **P**, *coniugati ad uno stesso punto* **P'**, *è una retta, rappresentata appunto dall'equazione* [28]. Codesta retta **r** dicesi *polare* del punto **P'** rispetto alla curva, e il punto **P'** dicesi *polo* della retta **r**.

Se il punto è reale, la polare è reale; se il punto è immaginario, anche la polare è immaginaria.

fig. 33

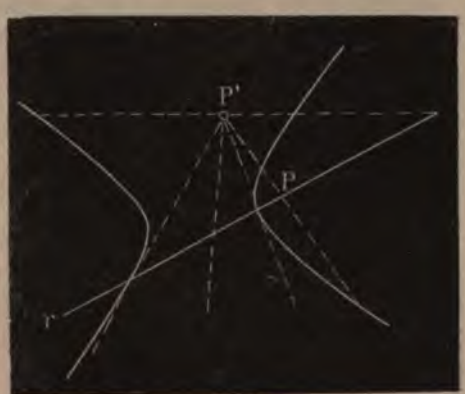


fig. 34

La polare dell'origine è

$$gx + fy + c = 0,$$

che si forma eguagliando a zero l'insieme delle metà dei termini a 1° grado col termine costante della $f(x, y)$.

L'equazione della polare non differisce da quella della tangente altro che pel significato delle x', y', le quali nella equazione della tangente sono le coordinate del punto di contatto, mentre nella equazione della polare sono le coordinate del polo.

Segue da questa analogia che *la polare di un punto della curva è la tangente in quel punto* (*).

L'equazione complessiva [26] delle tangenti condotte dal punto **P'** è evidentemente soddisfatta dai due punti comuni alla curva ed alla polare, poichè le loro coordinate soddisfanno simultaneamente alla equazione della curva $f(x, y) = 0$ ed all'equazione [28] della polare. Adunque le due tangenti condotte da **P'** hanno per punti di contatto i due punti comuni alla curva ed alla polare di **P'** (**), e questi sono reali o immaginarii secondochè tali sono le due tangenti, cioè secondochè **P'** è esterno o interno alla curva. Sicchè: *La polare di un punto è la retta che unisce i punti di contatto delle due tangenti* (reali o immaginarie) *condotte da quel punto;* e perciò la polare suole chiamarsi anche la *corda di contatto* delle tangenti condotte dal polo.

fig. 35

L'analogia, che abbiamo pocanzi segnalata fra l'equazione della polare e quella della tangente, mostra senz'altro che l'equazione della polare di un punto $P'(x', y')$ può anche scriversi sotto le forme [19], ecc. già accennate (§ 13) quando si trattò dell'equazione della tangente; vale a dire:

$$[28]' \quad (ax' + hy' + g)x + (hx' + by' + f)y + (gx' + fy' + c) = 0,$$

$$[28]'' \quad (ax + hy + g)x' + (hx + by + f)y' + (gx + fy + c) = 0.$$

7° Ogni punto $P'(x', y')$ possiede una polare, che è la retta rappresentata dalla equazione [28]. Viceversa, *ogni retta possiede un polo, cioè il punto d'intersezione* (sempre reale) *delle tangenti condotte pei punti* (reali o immaginarii) *nei quali la retta seca la curva.*

Se l'equazione della retta è

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

(*) Lo stesso può provarsi così: Se **P'** è sulla curva, è facile vedere che ogni punto **P** della tangente in **P'** è coniugato armonico a **P'** rispetto ai due punti (coincidenti in **P'**) ove la tangente incontra la curva.

(**) Lo stesso risulta dall'osservare che quando un punto **P** coniugato a **P'** cade sulla curva, uno dei due punti comuni alla **PP'** e alla curva cade in **P**, e quindi anche l'altro cade in **P**, visto che quei due punti comuni sono coniugati armonicamente rispetto a **P** e **P'**.

le coordinate del polo $\mathbf{P}'(x', y')$ *saranno date dalle formole* [21], già trovate pel punto di contatto di una data tangente; poichè nella ricerca delle formole [21] non si è tenuto conto dell'ipotesi che il punto (x', y') stesse sulla curva. Avremo dunque

$$[21] \qquad x' = \frac{A\lambda + H\mu + G\nu}{G\lambda + F\mu + C\nu}, \qquad y' = \frac{H\lambda + B\mu + F\nu}{G\lambda + F\mu + C\nu}.$$

§ 20. Sia $\mathbf{P}''$ (fig. 36) un punto coniugato a $\mathbf{P}'$: allora è chiaro dalla definizione che la polare di $\mathbf{P}'$ passa per $\mathbf{P}''$ e la polare di $\mathbf{P}''$ passa per $\mathbf{P}'$; dunque: *Se la polare di un punto passa per un altro punto, viceversa, la polare di questo passerà pel primo.*

fig. 36

Per conseguenza: *Se un punto percorre una retta fissa, la polare del punto gira intorno a un punto fisso*, che è il polo di quella retta.

Ovvero: *Se una retta rota intorno ad un punto fisso, il polo della retta percorre una retta fissa, che è la polare di quel punto.*

(Nelle fig. 37 e 38 i punti 1, 2, 3... sono sopra una retta, e le rispettive polari I, II, III... passano pel polo di quella retta).

fig. 37

Inoltre: *La retta che passa per due*

fig. 38

punti è la polare del punto d'intersezione delle polari di quei due punti (fig. 36).

Ovvero: *Il punto d'incontro di due rette è il polo della retta che unisce i poli di quelle rette.*

Da ultimo, ricordando che la polare è la corda di contatto delle due tangenti condotte dal polo, abbiamo (fig. 38): *Se un punto percorre una retta data, la corda di contatto delle tangenti condotte da esso passa per un punto fisso, che è il polo della retta data.*

E, *se una retta rota intorno a un punto dato, le tangenti nei punti comuni alla retta ed alla curva si intersecano sopra una retta fissa, che è la polare del punto dato.*

Ecco poi un teorema, che permette di costruire la polare con l'uso della sola riga, supposto dato il polo e descritta la curva; e che quindi dà anche il modo di tirar le tangenti da un punto dato, con la sola riga.

Per un punto si tirino due secanti alla curva, e si tirino le altre due coppie di rette con cui si possono congiungere i punti di intersezione della curva con le due secanti; i due punti d'incontro di tali due coppie di rette saranno sulla polare del primo punto.

Possiamo supporre, senza mancare alla generalità, che il punto da cui si tirano le due secanti sia l'origine **O** (fig. 39 e 40), e le due secanti siano gli assi delle coordinate **Ox**, **Oy**. Siano **P** e **P'** i punti

fig. 39

fig. 40

ove la **Ox** seca la curva, **Q** e **Q'** quelli ove **Oy** seca la curva; indichiamo con p, p' i segmenti **OP**, **OP'** e con q, q' i segmenti **OQ**, **OQ'**. Oltre alle **PP'**, **QQ'**, vi sono due altre coppie di rette che uniscono **P** e **P'** a **Q** e **Q'**; cioè **PQ** e **P'Q'**, **PQ'** e **P'Q**.

Le equazioni di **PQ** e **P'Q'** sono

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad \frac{x}{p'} + \frac{y}{q'} = 1,$$

e quelle di **PQ'** e **P'Q**

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q'} = 1, \quad \frac{x}{p'} + \frac{y}{q} = 1;$$

ora, sommando membro a membro le due prime equazioni, si ha

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\right)x+\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}\right)y=2,$$

e lo stesso si ha sommando le altre due equazioni; dunque la nuova equazione così ottenuta rappresenta la retta che unisce il punto **M** comune alle rette **PQ** e **P'Q'** col punto **N** comune alle rette **PQ'** e **P'Q**.

Intanto l'equazione della retta **MN** può trasformarsi osservando che p e p' sono le radici della equazione $f(x, 0) = ax^2 + 2gx + c = 0$, e però si ha

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{p+p'}{pp'}=-\frac{2g}{c};$$

e similmente q e q' sono le radici della $f(0, y) = by^2 + 2fy + c = 0$, onde

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=\frac{q+q'}{qq'}=-\frac{2f}{c};$$

quindi la equazione della **MN** diviene

$$-\frac{2g}{c}x-\frac{2f}{c}y=2,$$

ovvero

$$gx+fy+c=0,$$

che è appunto la polare dell'origine (§ 19-6°) (*).

(*) Le nozioni e le proprietà qui esposte di punti coniugati, polari e poli, restano nella sostanza inalterate quando la curva si scinde in due rette; ma allora hanno luogo alcune particolarità, che ci limitiamo ad enunciare, e delle quali sarà facile al lettore rendersi ragione ricordando che, quando sopra una retta si ha un gruppo armonico di quattro punti e due punti coniugati coincidono, degli altri due uno coincide con essi e l'altro è un punto qualunque della retta.

Ad ogni punto **P'** come polo (fig. 41) corrisponde una retta **r'** come polare rispetto alla data coppia di rette, e questa polare passa pel punto **O** comune alle due rette medesime; in particolare a un punto di una delle due rette corrisponde la retta stessa. Fa eccezione il punto **O**, poichè ad esso corrispondono tutte le rette del piano.

fig. 41

Ad ogni retta **r'** che passi per **O** corrispondono

Rette in involuzione.

§ **21**. Ricordiamo che, date due rette **r**, **r'** in un piano (fig. 42), nel fascio da esse determinato ad ogni retta **s** corrisponde un'altra **s'** *coniugata armonicamente* ad essa rispetto a **r** e **r'**, tale, cioè, che risulti $\frac{\text{sen}\,\mathbf{rs}}{\text{sen}\,\mathbf{sr'}} = -\frac{\text{sen}\,\mathbf{rs'}}{\text{sen}\,\mathbf{s'r'}}$. Questa corrispondenza è *univoca* e *reciproca*, e però le infinite coppie **s**, **s'** costituiscono una *involuzione quadratica* intorno al punto **rr'** e nel piano **rr'**. E siccome alla retta **r** corrisponde **r** stessa, e alla **r'** la stessa **r'**; così **r** e **r'** sono le rette *doppie* della involuzione.

fig. 42

Siccome ogni retta è intersecata da quattro rette costituenti un gruppo armonico in quattro punti costituenti un gruppo armonico, così tutte le coppie di rette coniugate nella involuzione suddetta secano una qualunque retta del piano **rr'** in coppie di punti in involuzione. Viceversa, data su una retta una involuzione di coppie di

---

come poli infiniti punti **P'**, . . . , il luogo dei quali è una retta **r''** che passa per **O**. Ad ogni retta che non passi per **O** corrisponde **O** come polo.

Le due rette **r'**, **r''** sono in armonia con le due rette date, giacchè ogni retta del piano seca **r'** e **r''** in due punti in armonia con quelli ove seca le due rette date.

Quando le due rette date sono parallele, il punto **O** va all'infinito e le **r'**, **r''** riescono parallele ad esse.

Nel caso della retta doppia, ogni punto fuori di essa ha per polare la retta stessa, ed ogni punto di essa tutte le rette del piano. Ciascuna retta ha per poli tutti i punti della retta doppia, e la retta doppia tutti i punti del piano.

Ai medesimi risultati si perverrebbe assumendo l'equazione della data coppia di rette sotto la forma (§ 2-V)

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha' x + \beta' y + \gamma') = 0,$$

e ripetendo su questa le cose esposte nei §§ 19 e 20. Allora alla equazione [28] della polare si può dare la forma seguente:

$$(\alpha x' + \beta y' + \gamma)(\alpha' x + \beta' y + \gamma') + (\alpha' x' + \beta' y' + \gamma')(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0;$$

la quale mostra che la polare passa pel punto comune alle due rette date. Riesce poi indeterminata la polare quando $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$ e $\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' = 0$, cioè quando il polo è il punto comune alle due rette date. E così via.

punti, le coppie di rette che proiettano questi da un punto arbitrario saranno anche in involuzione.

Si noti anche che, quando le rette date **r**, **r'** siano immaginarie, ma abbiano equazioni differenti pel solo segno di i, il loro punto comune sarà tuttavia reale, e ad ogni retta reale condotta per esso non cesserà di corrispondere una retta reale nella involuzione.

Infatti, se le equazioni delle rette **r**, **r'** sono

$$(px+qy+r)+i(p'x+q'y+r')=0, \quad (px+qy+r)-i(p'x+q'y+r')=0,$$

le due rette si secano nel punto comune alle rette reali $px+qy+r=0$, $p'x+q'y+r'=0$. Inoltre i due punti ove **r** e **r'** secano uno degli assi, p. es. quello delle x, sono immaginarii, ma le loro ascisse sono quantità complesse coniugate; se ora pel punto **rr'** tiriamo una retta reale, questa secherà l'asse in un punto reale, e però il suo coniugato rispetto ai suddetti due punti immaginarii sarà reale, e quindi sarà reale anche la retta che unisce quest'ultimo punto al punto **rr'**.

Rette coniugate.

§ **22**. 1° Da un punto **O** (fig. 43, 44, 45) tiriamo alla curva le due tangenti, e siano **r**, **r'** due rette condotte per **O** e coniugate armoniche rispetto alle due tangenti: le due rette **r**, **r'** si diranno *coniugate* rispetto alla curva.

È chiaro che *per uno stesso punto* **O** *passano infinite coppie di rette coniugate, le quali costituiscono una involuzione, che ha per rette doppie le due tangenti condotte dal punto* **O** (*).

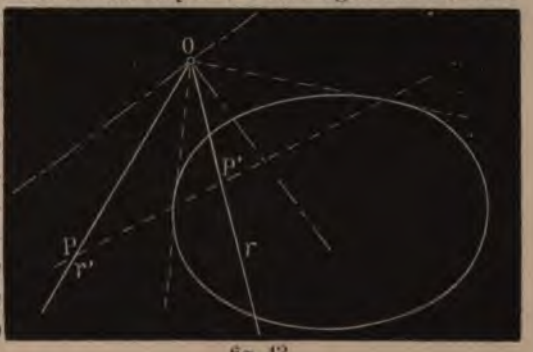


fig. 43

La corda di contatto delle due tangenti condotte da **O**, ossia la po-

(*) Le tangenti possono essere immaginarie; ma le loro equazioni separate differiscono solo per il segno di i; per conseguenza ad ogni retta reale passante per **O** corrisponderà una retta coniugata reale.

lare di **O**, è divisa armonicamente dalle **r**, **r'** e dalle due tangenti; onde i punti **P**, **P'**, nei quali **r**, **r'** secano la polare di **O**, sono coniugati rispetto alla curva; e per conseguenza la polare di **P'** deve passare per **P**. Ma la polare di **P'** deve anche passare per **O**, polo della retta

fig. 44

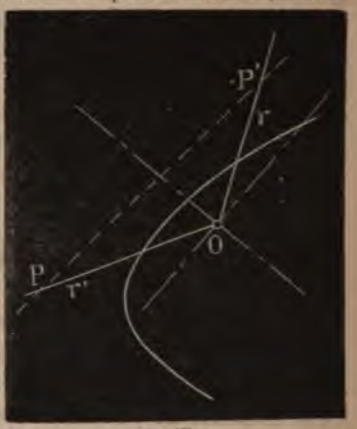


fig. 45

PP'; quindi sarà **OP**, ossia **r**, la polare di **P'**; e similmente sarà **r'** la polare di **P**. Sicchè, *se due rette sono coniugate, ciascuna passa pel polo dell'altra* (*).

Inoltre, *una stessa retta* **r'** *ne ha infinite coniugate rispetto alla curva, cioè tutte le rette* **r**, . . . *che passano pel punto* **P**, *polo della* **r'**.

In particolare, tutte le rette coniugate a una tangente sono quelle che passano pel suo punto di contatto.

2° È facile *trovare la condizione affinchè sieno coniugate due rette* **r**, **r'** *date mediante le equazioni*

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0, \quad \lambda' x + \mu' y + \nu' = 0.$$

Infatti dovrà il polo della **r** giacere sulla **r'**, e però le coordinate di quel polo dovranno soddisfare alla equazione della **r**; ma le dette coordinate sono date dalle [21], quindi la richiesta condizione sarà

$$\lambda' \frac{A\lambda + H\mu + G\nu}{G\lambda + F\mu + C\nu} + \mu' \frac{H\lambda + B\mu + F\nu}{G\lambda + F\mu + C\nu} + \nu' = 0,$$

(*) Di qui apparisce che, se il punto **O** è esterno alla curva, di due rette coniugate condotte per esso l'una secherà la curva e l'altra no; e se **O** è interno, allora entrambe secheranno la curva (supposta reale).

ovvero sotto altre forme:

$$[29] \quad (A\lambda+H\mu+G\nu)\lambda'+(H\lambda+B\mu+F\nu)\mu'+(G\lambda+F\mu+C\nu)\nu'=0,$$

$$A\lambda\lambda'+B\mu\mu'+C\nu\nu'+F(\mu\nu'+\mu'\nu)+G(\nu\lambda'+\nu'\lambda)+H(\lambda\mu'+\lambda'\mu)=0,$$

$$(A\lambda'+H\mu'+G\nu')\lambda+(H\lambda'+B\mu'+F\nu')\mu+(G\lambda'+F\mu'+C\nu')\nu=0.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & a & h & g \\ \mu' & h & b & f \\ \nu' & g & f & c \end{vmatrix} = 0 \ (^*).$$

Dividendo per $\nu\nu'$ si ottengono le altre forme:

$$(Au + Hv + G)u' + (Hu + Bv + F)v' + (Gu + Fv + C) = 0,$$

$$Auu' + H(vu' + uv') + Bvv' + G(u + u') + F(v + v') + C = 0.$$

. . . . . .

La condizione affinchè due rette sieno coniugate, sotto queste ultime forme, non differisce dalla condizione [28] affinchè due punti sieno coniugati, se non in questo: che i coefficienti a, b, ... della $f(x, y) = 0$ sono sostituiti dai coefficienti A, B... della equazione in coordinate di rette $F(u, v) = 0$, e le coordinate dei punti (x, y) e (x', y') dalle coordinate delle rette (u, v) e (u', v').

Ritenendo nella equazione [29] (o nelle sue equivalenti) la retta r′ come data, la detta equazione conferma che vi sono infinite rette coniugate alla r′, e fornisce l'equazione del punto nel quale tutte si incontrano, cioè *l'equazione del polo della* r′.

3° È utile cercare *la condizione affinchè sieno coniugate due rette passanti per un dato punto.* Se il punto è l'origine, basta porre nella [29] $\nu = 0$, $\nu' = 0$, e si ha

$$A\lambda\lambda' + H(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + B\mu\mu' = 0.$$

(*) A questa si perviene direttamente, osservando che nel nostro caso coesistono le [20] colla $\lambda' x' + \mu' y' + \nu' = 0$, posto che sia (x', y') il polo della $\lambda x + \mu y + \nu = 0$.

Se poi il punto è $O(x', y')$, basta trasportare ivi l'origine: allora λ, μ, λ', μ' non si alterano, e A, H, B divengono A', H', B' (§ 10-1°); quindi la condizione sarà

$$[30] \qquad A'\lambda\lambda' + H'(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + B'\mu\mu' = 0.$$

§ 23. Da questa equazione trarremo alcune conseguenze importanti:

1° Quando le due tangenti tirate dal dato punto (x', y') sono reali, è chiaro che fra le infinite coppie di rette coniugate uscenti dal dato punto ve ne ha una, ed una sola, di rette ortogonali fra loro; cioè la coppia delle rette che bisecano gli angoli delle due tangenti. Ora mostreremo che, anche quando le tangenti siano immaginarie, *fra tutte le coppie di rette coniugate uscenti da un dato punto, esiste una coppia reale di rette coniugate ortogonali, e in generale una sola* (*).

Infatti, due rette per (x', y') sono coniugate se soddisfanno alla [30], e sono anche ortogonali se inoltre verificano la nota condizione

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' - (\lambda\mu' + \lambda'\mu)\cos\omega = 0.$$

Eliminando $(\lambda\mu' + \lambda'\mu)$ da queste due equazioni di condizione, si ottiene

$$(A'\cos\omega + H')\,\lambda\lambda' + (B'\cos\omega + H')\,\mu\mu' = 0,$$

onde

$$\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda'}{\mu'} = -\frac{B'\cos\omega + H'}{A'\cos\omega + H'};$$

eliminando invece $\lambda\lambda'$, si ottiene

$$(A'\cos\omega + H')\,(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + (B' - A')\,\mu\mu' = 0,$$

onde

$$\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{A' - B'}{A'\cos\omega + H'};$$

ed ora conoscendo la somma e il prodotto di $\frac{\lambda}{\mu}$ e $\frac{\lambda'}{\mu'}$, si potranno

(*) Diciamo « in generale », poichè vedremo in seguito che vi sono dei punti, detti *fuochi*, pei quali passano infinite coppie ortogonali. Tali vedremo essere per es. il centro nel circolo.

calcolare i loro valori come radici della equazione di 2° grado

$$(A' \cos \omega + H') \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - (A' - B') \frac{\lambda}{\mu} - (B' \cos \omega + H') = 0.$$

Le due rette in quistione saranno reali se sono reali le radici di questa equazione; e che così sia, basta provarlo pel caso che l'angolo ω sia retto, ad evitare calcoli, trattandosi di una proprietà indipendente dalla scelta degli assi. Ora quando ω è retto, la condizione di ortogonalità si riduce a

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0 \text{ ossia } \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda'}{\mu'} = -1;$$

sicchè il prodotto delle due radici $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$ dell'accennata equazione è -1, e per conseguenza le due radici sono certamente reali.

2° Ciascuna delle due tangenti tirate dal punto (x', y') alla curva è coniugata a sè stessa rispetto alla curva: e però il valore del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ corrispondente a ciascuna delle due tangenti si otterrà supponendo nella equazione [30] λ' e μ' uguali a λ e μ: si ha così l'equazione di 2° grado

$$A'\lambda^2 + 2H'\lambda\mu + B'\mu^2 = 0,$$

dalla quale si ricaveranno per $\frac{\lambda}{\mu}$ i due valori corrispondenti alle due tangenti (*) (cfr. § 19-4°).

Figure polari-reciproche o coniugate.

§ 24. L'analogia fra le equazioni $f(x, y) = 0$, $F(u, v) = 0$, non che l'analogia fra l'equazione della retta polare di un punto e quella del punto polo di una retta, dipendono dalla corrispondenza che me-

(*) La nozione di rette coniugate e le relative proprietà sussistono, con le debite modificazioni, nel caso che la curva si scinda in due rette. Non insistiamo su questo punto, che il lettore potrà sviluppare da sè, appoggiandosi a quanto accennammo circa i poli e le polari rispetto a una coppia di rette.

diante la conica $f(x, y) = 0$ si può porre fra gli elementi *punto* e *retta* del piano, e fra le figure da essi rispettivamente formate.

A ciascuno degli ∞^2 punti del piano corrisponde (come polare) ciascuna delle ∞^2 rette del piano, e viceversa. Agli ∞ punti di una retta corrispondono le ∞ rette di un fascio (intorno al polo della retta), e viceversa; e il rapporto anarmonico di 4 di quei punti eguaglia quello delle 4 rette corrispondenti (*). A un sistema di punti e rette corrisponde un sistema di rette e punti. Agli ∞ punti di una curva corrispondono ∞ rette inviluppanti un'altra curva, e a questa come luogo corrisponde quella come inviluppo: se l'una è di ordine n l'altra è di classe n. A una curva di 2° ordine e classe corrisponde una curva di 2ª classe e ordine; a due punti coniugati rispetto all'una, due rette coniugate rispetto all'altra; a un punto con la sua polare rispetto all'una, una retta col suo polo rispetto all'altra. Ai punti della conica $f(x, y) = 0$ considerata come luogo corrispondono le tangenti nei punti medesimi alla conica considerata come inviluppo, e viceversa; ai punti comuni alla conica e ad una retta corrispondono le tangenti condotte dal polo della retta alla conica stessa; a due punti coniugati due rette coniugate; ecc.

Due figure corrispondenti nel modo accennato si dicono *polari-reciproche*, *correlative*, *coniugate*, ecc. Questa corrispondenza è un caso particolare della *legge di dualità*.

Qui è opportuno osservare (correlativamente al § 15) che un inviluppo, la cui equazione tangenziale sia $f(u, v) = au^2 + \ldots = 0$, è una curva di 2ª classe e 2° ordine, e la sua equazione locale è $F(x, y) = Ax^2 + \ldots = 0$. Quando $\Delta = 0$, la $f(u, v)$ si scinde in due fattori di 1° grado, e l'inviluppo si riduce a una coppia di punti (considerati come inviluppi), i quali possono essere reali e distinti,

---

(*) Infatti, se (x', y') (x'', y''), $\left(\frac{mx'+nx''}{m+n}, \frac{my'+ny''}{m+n}\right)$, $\left(\frac{m'x'+n'x''}{m'+n'}, \frac{m'y'+n'y''}{m'+n'}\right)$ sono quattro punti di una retta, il loro rapporto armonico è $\frac{m}{n} : \frac{m'}{n'}$; ora le loro polari hanno per equazioni

$$ax'x + \ldots = 0, \quad ax''x + \ldots = 0, \quad m(ax'x + \ldots) + n(ax''x + \ldots) = 0,$$

$$m'(ax'x + \ldots) + n'(ax''x + \ldots) = 0,$$

onde si vede che il rapporto anarmonico di queste polari è anche $\frac{m}{n} : \frac{m'}{n'}$.

reali e coincidenti, immaginarii. Allora la $F(x, y)$ diviene un quadrato, avendosi

$$F(x, y) = \frac{1}{A}(Ax+Hy+G)^2 = \frac{1}{B}(Hx+By+F)^2 = \frac{1}{C}(Gx+Fy+C)^2$$

$$= (x\sqrt{A} + y\sqrt{B} + \sqrt{C})^2,$$

e la retta pei due punti ha per equazione indifferentemente

$$Ax + Hy + G = 0, \quad Hx + By + F = 0, \quad Gx + Fy + C = 0,$$

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{B} + \sqrt{C} = 0.$$

Da ultimo osserviamo (correlativamente al § 2, es. II) che *una curva di 2ª classe è individuata quando ne sono date cinque tangenti.*

Triangoli coniugati.

* § **25.** 1° Dato un triangolo **P'P''P'''** (fig. 46), le polari dei suoi vertici, **r'**, **r''**, **r'''**, costituiscono un altro triangolo (o trilatero), che potremo indicare con **r'r''r'''**. Per ipotesi i vertici del 1° triangolo sono i poli dei lati del 2°; e quindi, viceversa, i vertici del 2° sono i poli dei lati del 1° (poichè essendo **r'** e **r''** polari di **P'** e **P''**, sarà il punto **r'r''** polo della retta **P'P''**, e così via). E i due triangoli sono *coniugati* (l'uno all'altro) rispetto alla conica.

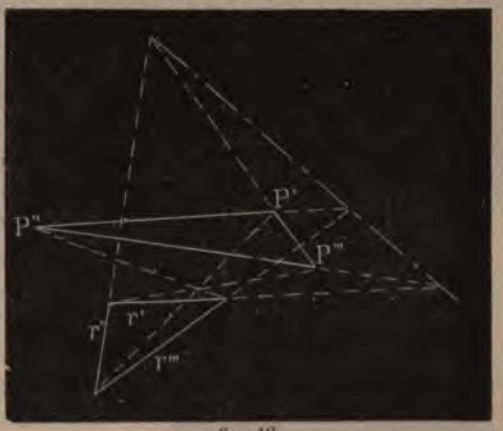


fig. 46

Due triangoli coniugati sono in omologia; vale a dire: *le tre rette che uniscono i vertici dell'uno a quelli dell'altro* (**P'** con **r''r'''**, **P''** con **r'''r'**, **P'''** con **r'r''**) *concorrono in un medesimo punto* (centro di omologia), *e i tre punti d'intersezione dei lati dell'uno con quelli dell'altro* (cioè i punti ove le **P'P''**, **P''P'''**, **P'''P'** secano rispettivamente le **r'''**, **r'**, **r''**) *sono in una medesima retta* (asse di omologia), *e quel punto di concorso è il polo di questa retta.*

Infatti, le equazioni delle $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$, polari di $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, $\mathbf{P}'''$, sono per la [28]

$$ax'x + \ldots + c = 0,\ ax''x + \ldots + c = 0,\ ax'''x + \ldots + c = 0;$$

la retta $(\mathbf{P}', \mathbf{r}''\mathbf{r}''')$ ha una equazione della forma

$$(ax''x + \ldots) + k(ax'''x + \ldots) = 0,$$

e siccome x', y' devono verificarla, sarà

$$(ax''x' + \ldots) + k(ax'''x' + \ldots) = 0,$$

onde

$$k = -\frac{ax'x'' + \ldots}{ax'''x' + \ldots};$$

sicchè la equazione diviene

$$(ax'''x' + \ldots)(ax''x + \ldots) = (ax'x'' + \ldots)(ax'''x + \ldots).$$

Similmente le equazioni delle rette $(\mathbf{P}'', \mathbf{r}'''\mathbf{r}')$ e $(\mathbf{P}''', \mathbf{r}'\mathbf{r}'')$ sono

$$(ax'x'' + \ldots)(ax'''x + \ldots) = (ax''x''' + \ldots)(ax'x + \ldots),$$

$$(ax''x''' + \ldots)(ax'x + \ldots) = (ax'''x' + \ldots)(ax''x + \ldots).$$

Or le tre ultime equazioni sommate membro a membro danno una identità, adunque le tre rette che esse rappresentano concorrono in un punto.

Inoltre, essendo $\mathbf{r}''\mathbf{r}'''$ polo della $\mathbf{P}''\mathbf{P}'''$ e $\mathbf{P}'$ polo della $\mathbf{r}'$, sarà la retta $(\mathbf{P}', \mathbf{r}''\mathbf{r}''')$ polare del punto $(\mathbf{r}', \mathbf{P}''\mathbf{P}''')$; e similmente la retta $(\mathbf{P}'', \mathbf{r}'''\mathbf{r}')$ sarà polare del punto $(\mathbf{r}'', \mathbf{P}'''\mathbf{P}')$, la retta $(\mathbf{P}''', \mathbf{r}'\mathbf{r}'')$ polare del punto $(\mathbf{r}''', \mathbf{P}'\mathbf{P}'')$. Ma quelle tre rette concorrono in un punto, dunque questi tre punti sono in una retta, che sarà la polare di quel punto.

Come corollario del teorema precedente: *un triangolo iscritto in una curva di 2° ordine, e il triangolo circoscritto formato dalle tangenti nei vertici del primo, sono in omologia.*

fig. 47

2° Un punto $\mathbf{P}'$ (fig. 47), con due punti $\mathbf{P}''$, $\mathbf{P}'''$ presi sulla polare di $\mathbf{P}'$ e coniugati fra loro, costituiscono una terna di punti mutuamente coniugati rispetto alla curva. Nel triangolo $\mathbf{P}'\mathbf{P}''\mathbf{P}'''$ ciascun vertice è polo del lato opposto, vale a

dire che il triangolo ha per coniugato se stesso rispetto alla curva, e perciò lo diremo *autoconiugato* rispetto alla curva. (Esempio il triangolo **OPP'** delle fig. 43, 44, 45).

O ancora: una retta, con due rette coniugate condotte pel polo di essa, costituiscono una terna di rette mutuamente coniugate: un trilatero *autoconiugato*.

Vi sono ∞^3 triangoli o trilateri autoconiugati.

È facile assicurarsi che due dei tre lati secano la curva in punti reali e uno in punti immaginarii. Inoltre le rette da ciascun vertice ai punti ove il lato opposto seca la curva, sono le tangenti che si possono condurre per quel vertice.

Quadrangoli e quadrilateri completi.

* § **26**. 1° Siano (fig. 48) **M**, **N**, **P**, **Q** quattro punti; si tirino le tre coppie di rette che possono passare per essi, cioè

MN e **PQ**, **MP** e **QN**,
MQ e **NP**;

e sia **R** l'intersezione della prima coppia di rette, **S** della seconda, **T** della terza. La figura così formata dicesi un *quadrangolo completo;* i quattro punti **M**, **N**, **P**, **Q** ne sono i *vertici*, le sei rette i *lati* (a due a due *opposti*), **R**, **S**, **T** i tre punti *diagonali*.

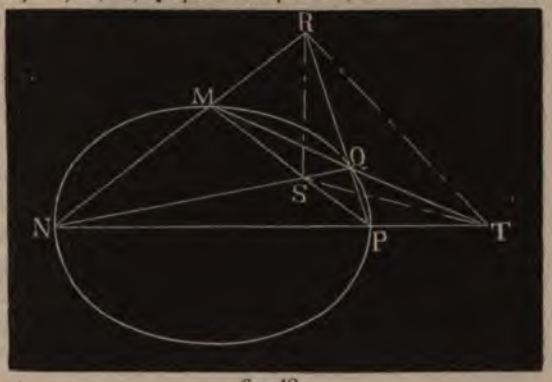


fig. 48

Pei quattro punti **M**, **N**, **P**, **Q** possono descriversi infinite curve di 2° ordine (§ 1), le quali diremo costituire un *fascio*. Per ogni punto dato del piano ne passa una. Di questo fascio fanno parte le tre coppie di rette testè nominate, e sono le sole.

Da un teorema sulle polari (§ 20) sappiamo che la retta **ST** è la polare di **R** rispetto alla curva, e similmente **TR** è polare di **S**, e **RS** di **T**. Adunque *il triangolo* **RST** *è autoconiugato rispetto a ciascuna curva del fascio* (*).

Ed è facile vedere che *in generale è il solo*.

(*) Si aggiunga che l'intersezione delle tangenti in **M** e **N** è sulla **ST**, come pure

È chiaro poi che la **ST** seca **MN** nel punto armonico di **R** rispetto a **M** e **N**, e **PQ** nel punto armonico di **R** rispetto **P** e **Q**; che le quattro rette **MP**, **QN**, **RS**, **ST** sono in armonia, e similmente le **MQ**, **NP**, **ST**, **TR**, e le **MN**, **PQ**, **RS**, **TR**.

Insomma, nella figura composta da un quadrangolo completo e dal triangolo dei suoi punti diagonali (in tutto 9 rette, che dànno 13 punti di mutua intersezione), quattro punti di una stessa retta formano un gruppo armonico, e quattro rette per uno stesso punto formano altresì un gruppo armonico.

2° Siano ora (fig. 49) **m**, **n**, **p**, **q** quattro rette. Si osservino le tre coppie di punti comuni alle quattro rette, cioè

mn e **pq**, **mp** e **qn**, **mq** e **np**;

e sia **r** la retta che passa per la prima coppia di punti, **s** per la seconda, **t** per la terza. La figura così formata si chiama un *quadrilatero completo;* le quattro rette **m**, **n**, **p**, **q** ne sono i *lati*, i sei punti i *vertici* (a due a due *opposti*), e le tre rette **r**, **s**, **t** le *diagonali*.

fig. 49

Codesta figura può anche considerarsi come un quadrangolo completo, di cui siano **mp**, **pn**, **nq**, **qm** i quattro vertici, **m** e **n**, **p** e **q**, **s** e **t** i lati (a due a due opposti); **mn**, **pq**, **st** i tre punti diagonali.

Siccome cinque tangenti individuano una curva di 2ª classe, così esistono infinite curve di 2ª classe tangenti alle quattro rette **m**, **n**, **p**, **q**; e diremo che formano una *schiera*. Fra esse le tre coppie di vertici suddetti.

Il trilatero **rst** *è autoconiugato rispetto a tutte le curve della schiera* (*), *ed è in generale il solo.*

---

l'intersezione delle tangenti in **P** e **Q**. Le intersezioni delle tangenti in **M**, **P** e in **Q**, **N** sono sulla **TR**. Le intersezioni delle tangenti in **M**, **Q** e **N**, **P** sono sulla **RS**.

(*) Si aggiunga che la corda di contatto delle **m**, **n** e quella delle **p**, **q** passano pel punto **st**, quelle delle **m**, **p** e **q**, **n** passano pel punto **tr**, e quelle delle **m**, **q** e **n**, **p** pel punto **rs**.

Diametri, centro, asintoti.

§ **27**. Passiamo ora ad esaminare le interessanti conseguenze che si deducono dalle cose dette innanzi intorno alle tangenti, polari, ecc., quando si prendono in considerazione i punti all'infinito del piano.

E innanzi tutto ricordiamo: che ciascuna retta del piano ha un punto all'infinito, comune a tutte le sue parallele; e che i punti all'infinito su tutti i sistemi di rette parallele nel piano sono tutti in una stessa retta, *la retta all'infinito*, la equazione della quale si ottiene dalla equazione generale di 1° grado

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

facendo tendere λ e μ verso zero mentre ν resta finito.

1° Ciò premesso, la retta all'infinito incontra la curva in due punti reali e distinti, reali e coincidenti, immaginarii, secondochè il 1° membro della [17] per $\lambda = \mu = 0$ è negativo, nullo o positivo, cioè secondochè $C \gtreqless 0$; onde *la curva ha due, uno, nessun punto all'infinito, secondo che è una iperbole, una parabola, o una ellisse.*

Questo fatto è d'accordo con quanto già dicemmo circa la forma della iperbole, della parabola e della ellisse; poichè la iperbole ha due rami doppiamente infiniti, la parabola uno, e l'ellisse è una curva chiusa, priva di rami infiniti.

Lo stesso fatto potrebbe dar ragione dei nomi attribuiti alle dette curve. Accenneremo in altro luogo le proprietà che effettivamente consigliarono l'adozione dei nomi: *ellisse*, *iperbole*, *parabola*.

2° Una retta seca la curva in due punti reali o immaginarii, il cui punto di mezzo è sempre reale, ed ha per coniugato sulla retta il punto all'infinito. Quindi segue che, se per un punto dato **P** (fig. 50 e 51) si tiri la parallela alla polare **r** di esso, su questa parallela il punto **P** avrà per coniugato il punto all'infinito ove la detta parallela

fig. 50

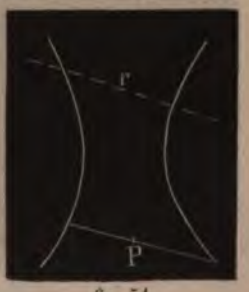


fig. 51

seca la **r**; e però il punto **P** bisecherà il segmento che la curva taglia da quella parallela.

Adunque *per ogni punto si può tirare alla curva una corda che resti in esso bisecata, e in generale una sola.*

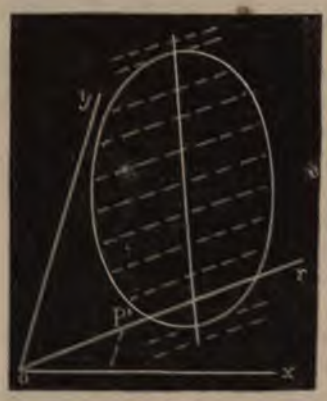


fig. 52

3° Tutte le rette parallele a una stessa retta **r** (fig. 52, 53, 54) hanno in comune il punto all'infinito sulla **r**, e quindi la polare di questo punto all'infinito biseca tutte le corde che la curva intercetta sulle dette parallele; ovvero: *il luogo dei punti medii di un sistema di corde parallele a una stessa direzione è una retta*, che è chiamata perciò *diametro* della curva.

Ad ogni direzione corrisponde un punto all'infinito, e quindi un diametro.

E *le polari dei punti di un diametro sono parallele alle corde che esso biseca.*

fig. 53

In particolare, *le tangenti nei punti ove un diametro seca la curva sono parallele alle corde che esso biseca.*

4° Se n e m sono i seni degli angoli che la data direzione **r** fa con gli assi delle x e delle y (o anche solamente proporzionali a tali seni), allora la retta condotta per l'origine nella direzione **r** avrà evidentemente per equazione

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n},$$

fig. 54

e la sua direzione dipenderà solo dal rapporto $\frac{m}{n}$, il quale perciò chiameremo *rapporto direttivo* della retta (e delle sue parallele). Ad ogni valore del rapporto direttivo corrisponde una direzione,

e viceversa. Inoltre la x e la y dei punti della retta **r**, di cui è parola, sono proporzionali a m e n; e quindi per un punto $\mathbf{P}'(x', y')$ qualunque della retta potremo assumere

$$x' = \rho m, \qquad y' = \rho n,$$

indicando con ρ un fattore arbitrario. La polare di questo punto ha per equazione (§ 19-6°)

$$(ax + hy + g)\rho m + (hx + by + f)\rho n + (gx + fy + c) = 0,$$

ovvero

$$(ax + hy + g)m + (hx + by + f)n + (gx + fy + c)\frac{1}{\rho} = 0.$$

Se ora facciamo crescere ρ all'infinito, il punto $\mathbf{P}'$ diverrà il punto all'infinito sulla data direzione, $\frac{1}{\rho}$ tenderà a zero, e quindi avremo come *equazione del diametro che biseca le corde parallele alla direzione* **r** *fissata dal rapporto direttivo* $\frac{m}{n}$:

[31] $$(ax + hy + g)m + (hx + by + f)n = 0,$$

ovvero

[31]' $$(am + hn)x + (hm + bn)y + (gm + fn) = 0.$$

In particolare, i diametri che bisecano le corde parallele agli assi delle x e delle y (fig. 55, 56, 57) corrispondono alle ipotesi:

$(n = 0,\ m \gtrless 0)$, $(m = 0,\ n \gtrless 0)$,

e perciò sono

$ax + hy + g = 0,\ hx + by + f = 0,$

ovvero le derivate parziali della $f(x, y)$ eguagliate a zero.

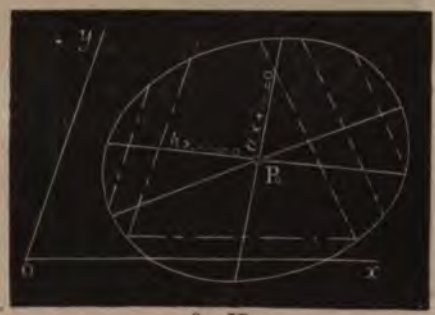


fig. 55

5° Ad ogni direzione di corde corrisponde un diametro (fig. 55, 56); tutti però *gl'infiniti diametri passano per un medesimo punto.* Infatti l'equazione [31] di un diametro qualunque prova che esso passa pel punto comune ai due

$$ax + hy + g = 0, \quad hx + by + f = 0.$$

Le coordinate x_0, y_0 di questo punto $\mathbf{P}_0$ si ricavano da queste due equazioni, e sono

fig. 56

$$[32] \quad x_0 = \frac{G}{C}, \quad y_0 = \frac{F}{C}.$$

Allo stesso si perviene osservando che i diametri, come polari dei punti della retta all'infinito, passano pel polo della retta all'infinito; or le coordinate di questo polo si traggono dalle [21] ponendovi $\lambda = \mu = 0$, e così si ritrovano le x_0, y_0.

Viceversa, *ogni retta condotta pel punto* $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ *è un diametro;* poichè la sua equazione può ricevere la forma [31]; od anche perchè, avendo il polo sulla polare di $\mathbf{P}_0$ (e quindi all'infinito), biseca le corde (parallele) dirette a quel polo.

Da coteste premesse s'inferisce che *il punto* $\mathbf{P}_0$ *biseca tutte le corde che passano per esso;* e però è centro di simmetria della curva, o semplicemente *centro* della curva.

Nella ellisse e nella iperbole il centro è reale, unico e a distanza finita; il che concorda con la circostanza che il denominatore C delle sue coordinate allora non è nullo. E precisamente, nell'ellisse il centro è interno alla curva, visto che la sua polare, cioè la retta all'infinito, seca la curva in punti immaginarii; e nell'iperbole è esterno.

Rammentiamo che si ha

$$ax_0 + hy_0 + g = 0, \quad hx_0 + by_0 + f = 0;$$

e però la [2] darà

$$f(x_0, y_0) = (ax_0 + hy_0 + g)x_0 + (hx_0 + by_0 + f)y_0 + (gx_0 + fy_0 + c) = gx_0 + fy_0 + c$$

$$= g\frac{G}{C} + f\frac{F}{C} + c = \frac{gG + fF + cC}{C},$$

e per la 3ª delle [3]

$$[33] \qquad f(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{C}. \quad (*)$$

(*) Poichè $\Delta \cdot f(x_0, y_0) = \frac{\Delta^2}{C}$, il centro è interno all'ellisse, esterno all'iperbole (§ 19-4°).

Similmente

[33]' $$ax_0x + \ldots + c = gx_0 + fy_0 + c = \frac{\Delta}{C}.$$

Questi risultamenti ci serviranno tra breve.

fig. 57

6° *Nella parabola il centro è all'infinito* (fig. 57), ed è il punto ove la retta all'infinito tocca la curva (il che è d'accordo coll'essere nella parabola $C=0$).

Sicchè *tutti i diametri della parabola sono paralleli*, e secano la curva in un punto a distanza finita, variabile con essi, e *nel* punto all'infinito.

7° Quando oltre a C son nulli G e F, il luogo si riduce a due rette parallele (§ 7), x_0 e y_0 riescono indeterminate, e vi sono infiniti centri, il cui luogo è la retta

$$ax + hy + g = 0$$

ossia

$$hx + by + f = 0.$$

8° *Le tangenti* t e t' (fig. 58) *condotte dal centro alla iperbole hanno per punti di contatto i due punti all'infinito della curva*, essendo il centro polo della retta all'infinito. Esse si dicono *asintoti*, poichè si comprende che debbono accostarsi indefinitamente alla curva, senza mai raggiungerla.

fig. 58

L'equazione complessiva degli asintoti si forma ponendo le coordinate del centro x_0, y_0 in luogo di x', y' nell'equazione complessiva [26] delle tangenti tirate dal punto (x', y'): tenendo presente la [33] e la [33]' si trova immediatamente

$$\frac{\Delta}{C}.\mathrm{f}(x, y) - \left(\frac{\Delta}{C}\right)^2 = 0,$$

ovvero

[34] $$\mathrm{f}(x, y) - \frac{\Delta}{C} = 0;$$

equazione che si forma da quella della curva $f(x, y) = 0$ mutando solo c in $c - \frac{\Delta}{C}$ (*).

Nella parabola gli asintoti coincidono in uno, che è la retta all'infinito.

Nella ellisse gli asintoti sono immaginarii.

9° *Le parallele condotte da un punto arbitrario* **P** *agli asintoti secano la curva in un punto a distanza infinita e in un altro a distanza finita.* Esse sono reali e distinte nella iperbole, immaginarie nella ellisse, e nella parabola sono i diametri.

Diametri coniugati, assi.

§ **28.** 1° *Un diametro è coniugato a tutte le corde che biseca,* poichè queste passano pel suo polo (all'infinito).

2° *La relazione fra i rapporti direttivi* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$ *di un sistema di corde parallele e del diametro ad esse coniugato* si potrebbe far derivare dalla [29] o dalla [30], le quali esprimono la relazione fra due rette coniugate (**). Ma preferiamo osservare che il diametro rappresentato dalla [31]' ha per rapporto direttivo $-\frac{hm+bn}{am+hn}$, sicchè la

---

(*) Le equazioni separate degli asintoti non sono altro che quelle dedotte dalla [8] e dalla [8]' nel § 8-3°, poichè bisognerebbe mutarvi solo c in $c - \frac{\Delta}{C}$, il che non altera le C, F, G colà adoperate.

(**) La [31]' mostra che bisognerebbe porre nella relazione [29]

$$\lambda = am + hn, \quad \mu = hm + bn, \quad \nu = gm + fn,$$

$$\lambda' = am' + hn', \quad \mu' = hm' + bn', \quad \nu' = gm' + fn'.$$

Con questo la [29] diviene

$$\begin{vmatrix} 0 & am + hn & hm + bn & gm + fn \\ am' + hn' & a & h & g \\ hm' + bn' & h & b & f \\ gm' + fn' & g & f & c \end{vmatrix} = 0;$$

relazione cercata sarà

$$\frac{m'}{n'} = -\frac{hm + bn}{am + hn},$$

ovvero

[35] $$amm' + h(mn' + m'n) + bnn' = 0,$$

o anche

[35]' $$a\,\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'} + h\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) + b = 0.$$

Nella parabola i diametri sono tutti paralleli, e però hanno tutti uno stesso rapporto direttivo. Infatti allora (*) si ha

$$-\frac{hm + bn}{am + hn} = -\frac{h}{a} = -\frac{b}{h},$$

e quindi il *rapporto direttivo dei diametri della parabola è* $-\frac{h}{a}$ *o* $-\frac{b}{h}$.

3° *Due diametri* r, r' (fig. 59, 60) *della ellisse e dell'iperbole sono coniugati, se l'uno biseca le corde parallele all'altro.*

Questa relazione è reciproca;

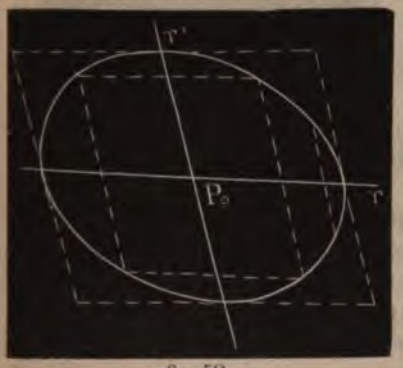


fig. 59

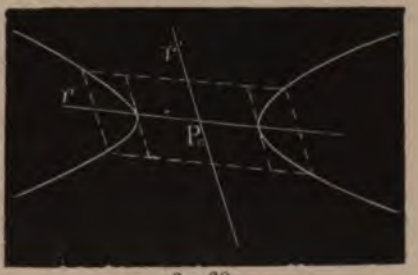


fig. 60

---

sottraendo dalla 1ª orizzontale la 2ª e la 3ª moltiplicate per m, n, e poi riducendo, si trova

$$amm' + h(mn' + m'n) + bnn' = 0.$$

Volendo poi far capo dalla [30], bisognerebbe sostituire a x', y' le x_0, y_0 date dalle [32], ed a λ, μ e λ', μ' rispettivamente $n, -m$ e $n', -m'$. Dopo qualche riduzione si ricadrebbe nella equazione precedente.

(*) In questo passaggio, come in tutti i calcoli relativi alla parabola, è utile tener presente e adoperare di continuo la relazione $ab = h^2$ e le equivalenti

$$a = \frac{h^2}{b},\quad b = \frac{h^2}{a},\quad \frac{a}{h} = \frac{h}{b},\ \text{ecc.}$$

poichè se **r** passa pel polo di **r'**, anche **r'** passerà pel polo di **r** (§ 20 e 22); o anche perchè fra i rapporti direttivi di due diametri coniugati passa la relazione [35]', la quale non si altera scambiando $\frac{m}{n}$ con $\frac{m'}{n'}$.

Nella parabola si può dire che ciascun diametro ha per diametro coniugato la retta all'infinito.

4° *Nell'ellisse e nell'iperbole, le infinite coppie* **r** *e* **r'**, **s** *e* **s'**,... (fig. 61 e 62) *di diametri coniugati sono in involuzione* (§ 22).

fig. 61

fig. 62

Le rette doppie della involuzione, cioè i diametri coniugati a se stessi, sono le tangenti condotte dal centro, ossia gli asintoti.

Se un diametro è reale, il coniugato è reale, come prova la [35]'. Nella ellisse tutti i diametri secano la curva in punti reali.

Nella iperbole, di due diametri coniugati l'uno cade in due angoli opposti degli asintoti e l'altro negli altri due angoli opposti; l'uno seca la curva in punti reali e l'altro in punti immaginarii. E i due rami della curva cadono nei primi due angoli opposti degli asintoti.

5° I rapporti direttivi degli asintoti si ottengono ponendo nella [35]' $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$, e si ha

[36] $$a\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2h\frac{m}{n} + b = 0,$$

ovvero

[36]' $$am^2 + 2hmn + bn^2 = 0.$$

La equazione di 2° grado [36] dà per $\frac{m}{n}$ due valori, che saranno *i rapporti direttivi degli asintoti.*

E siccome una retta, condotta per l'origine nella direzione determinata dal rapporto $\frac{m}{n}$, ha per equazione

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n};$$

così, ponendo nella [36] $\frac{x}{y}$ invece di $\frac{m}{n}$, si avrà l'equazione *complessiva delle parallele agli asintoti condotte per l'origine:* essa è

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2h\frac{x}{y} + b = 0,$$

ovvero

[37] $$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0, \ (^*)$$

vale a dire si forma eguagliando a zero l'insieme dei termini a 2° grado nella equazione della curva.

L'equazione complessiva delle parallele agli asintoti condotte da un punto qualunque (x', y') si trova trasportando l'origine in quel punto mediante le sostituzioni

$$x = X + x', \qquad y = Y + y':$$

allora la [37], visto che a, b, h non mutano (§ 10-1°), diviene

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0;$$

e poichè $X = x - x'$ e $Y = y - y'$, la richiesta equazione sarà

[38] $$a(x - x')^2 + 2h(x - x')(y - y') + b(y - y')^2 = 0.$$

Risolvendola rispetto a $x - x'$ o $y - y'$, si hanno le equazioni delle singole rette.

L'equazione complessiva degli asintoti fu già trovata; ma si può anche dedurla dalla [38] ponendovi in luogo di x', y' le coordinate del centro x_0, y_0, il che dà

[39] $$a(x - x_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0) + b(y - y_0)^2 = 0 \ (^{**}).$$

(*) Nella parabola, essendo $C = ab - h^2 = 0$, le due rette coincidono in una, la cui equazione è $ax + hy = 0$ od anche $hx + by = 0$.

(**) Sviluppando e tenendo presenti le [3] e [4], si ritrova la [34].

Risolvendola rispetto a $x - x_0$ o $y - y_0$, si ottengono le equazioni separate degli asintoti.

6° *Fra gli infiniti diametri ve ne ha due, in generale, ortogonali alle corde coniugate* (fig. 63 e 64).

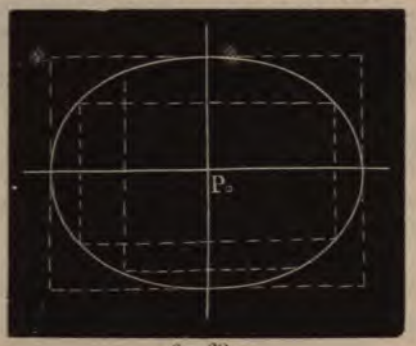


fig. 63

fig. 64

Infatti la relazione [35]', combinata con la condizione di ortogonalità

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} + 1 + \left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) \cos\omega = 0,$$

eliminandone una volta $\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'}$ e un'altra volta $\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}$, porge

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = -\frac{a-b}{a\cos\omega - h}, \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = -\frac{b\cos\omega - h}{a\cos\omega - h};$$

e conoscendo ora la somma e il prodotto dei due rapporti $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, questi saranno determinati come radici dell'equazione di 2° grado:

$$[40] \qquad (a\cos\omega - h)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + (a-b)\frac{m}{n} - (b\cos\omega - h) = 0,$$

ovvero

$$[40]' \qquad \begin{vmatrix} n^2 & -nm & m^2 \\ a & h & b \\ 1 & \cos\omega & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A ciascuno dei due valori di $\frac{m}{n}$ forniti da questa equazione corrisponde un diametro che è perpendicolare alle corde coniugate.

I due diametri di cui si tratta sono coniugati; poichè ciascuno è

ortogonale al suo diametro coniugato, e quindi a tutte le corde che biseca. Essi costituiscono la coppia di diametri coniugati e ortogonali; i quali nell'iperbole sono i diametri che bisecano gli angoli degli asintoti, e nell'ellisse sono reali benchè gli asintoti siano immaginari, come risulta da quanto si disse (§ 23-1°) circa la coppia di rette coniugate ortogonali uscenti da un punto.

Questi due diametri sono evidentemente assi di simmetria della curva, e sono chiamati *assi* o diametri *principali* della curva.

Vertici sono chiamati i punti in cui essi incontrano la curva.

Che gli assi della conica siano sempre reali, non sarà inutile anche provarlo calcolando il discriminante della equazione [40]; il quale, moltiplicato per -4, è

$$4(a\cos\omega - h)(b\cos\omega - h) + (a-b)^2$$

$$= (a-b)^2\operatorname{sen}^2\omega + (a-b)^2\cos^2\omega + 4ab\cos^2\omega - 4(a+b)h\cos\omega + 4h^2$$

$$= (a-b)^2\operatorname{sen}^2\omega + (a+b)^2\cos^2\omega - 4(a+b)h\cos^2\omega + 4h^2$$

$$= (a-b)^2\operatorname{sen}^2\omega + [(a+b)\cos\omega - 2h]^2;$$

or questa quantità è positiva come somma di due quadrati; quindi i valori di $\frac{m}{n}$ dati dalla [40] sono in generale due, reali e distinti.

La stessa quantità può poi trasformarsi in

$$(a-b)^2\operatorname{sen}^2\omega + (a+b)^2(1-\operatorname{sen}^2\omega) - 4(a+b)h\cos\omega + 4h^2(\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega)$$

$$= (a+b)^2 - 4(a+b)h\cos\omega + 4h^2\cos^2\omega + 4h^2\operatorname{sen}^2\omega - 4ab\operatorname{sen}^2\omega$$

$$= (a+b-2h\cos\omega)^2 - 4(ab-h^2)\operatorname{sen}^2\omega,$$

ovvero in

$$I^2 - 4C\operatorname{sen}^2\omega.$$

La quantità

$$K = \sqrt{I^2 - 4C\operatorname{sen}^2\omega}$$

è una funzione reale, positiva, irrazionale dei coefficienti (dei termini a 2° grado) *della* $f(x, y)$. Inoltre $\frac{K}{\operatorname{sen}^2\omega}$ *è un invariante assoluto*, perchè

$$\frac{K}{\operatorname{sen}^2\omega} = \sqrt{\left(\frac{I}{\operatorname{sen}^2\omega}\right)^2 - 4\frac{C}{\operatorname{sen}^2\omega}} = \text{costante}.$$

7° Nell'ellisse e nell'iperbole, *l'equazione complessiva delle parallele agli assi condotte per l'origine* si ottiene dalla [40] ponendovi $\frac{x}{y}$ invece di $\frac{m}{n}$; e si trova

$$[41] \qquad (a\cos\omega - h)x^2 + (a-b)xy - (b\cos\omega - h)y^2 = 0.$$

Da ultimo *l'equazione complessiva degli assi* si ricava da questa [41] trasportando l'origine al centro, ossia mutando x e y in $x - x_0$ e $y - y_0$: essa è dunque

$$[42] \; (a\cos\omega - h)(x-x_0)^2 + (a-b)(x-x_0)(y-y_0) - (b\cos\omega - h)(y-y_0)^2 = 0.$$

Risolvendola rispetto a $x - x_0$ o $y - y_0$ si hanno *le equazioni separate dei due assi* (*).

8° *Nella parabola vi è un solo asse* (**) (fig. 65). Per determinarlo nel modo più spedito, si osservi che il rapporto direttivo $\frac{m}{n}$ delle sue corde, e quello dei diametri, $-\frac{h}{a}$, devono soddisfare la condizione di ortogonalità

fig. 65

$$\frac{m}{n}\left(-\frac{h}{a}\right) + 1 + \left(\frac{m}{n} - \frac{h}{a}\right)\cos\omega = 0,$$

onde

$$[43] \qquad \frac{m}{n} = \frac{h\cos\omega - a}{a\cos\omega - h},$$

od anche per analogia

$$[43]' \qquad \frac{m}{n} = \frac{b\cos\omega - h}{h\cos\omega - b} \quad (***).$$

La parabola ha un sol *vertice* (a distanza finita).

9° Ora cercheremo *l'equazione dell'asse della parabola, e le coordinate del vertice.*

(*) Dalla [31] e dalla [40] eliminando $\frac{m}{n}$, si avrebbe l'equazione degli assi sotto l'altra forma

$$(a\cos\omega - h)(hx+by+f)^2 - (a-b)(ax+hy+g)(hx+by+f) - (b\cos\omega - h)(ax+hy+g)^2 = 0.$$

(**) L'altro asse è la retta all'infinito.

(***) Dalla $h = \pm\sqrt{ab}$ si ha pure

$$\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\,.\cos\omega}{\pm\sqrt{b} - \sqrt{a}\,.\cos\omega}.$$

L'asse biseca le corde il cui rapporto direttivo è dato dalla [43]; e però la sua equazione si ottiene dalla equazione [31] di un diametro qualunque ponendo per $\frac{m}{n}$ il detto rapporto, od anche ponendo

$$m = h\cos\omega - a, \quad n = a\cos\omega - h:$$

essa è dunque

$$(h\cos\omega - a)(ax + hy + g) + (a\cos\omega - h)(hx + by + f) = 0;$$

e ordinando e ricordando che $h^2 = ab$,

$$(a+b-2h\cos\omega)ax+(a+b-2h\cos\omega)hy+(ag+hf)-(af+gh)\cos\omega=0;$$

qui aggiungendo e togliendo $(a + b - 2h\cos\omega)g$, ossia Ig (§ 10), si ha

$$Iax + Ihy + Ig + G + F\cos\omega = 0,$$

e dividendo per I

$$[44] \qquad ax + hy + g + \frac{G + F\cos\omega}{I} = 0.$$

Invece di questa forma dell'equazione dell'asse, possiamo ottenerne un'altra mercè i soliti scambii di x con y, a con b, f con g: allora F e G si scambiano e h, I non mutano, e si ha

$$[44]' \qquad hx + by + f + \frac{F + G\cos\omega}{I} = 0.$$

Per trovare l'ascissa del vertice, basta combinare la equazione [44]' dell'asse con l'equazione della curva sotto la forma [12]; eliminando dalle due equazioni $hx + by + f$, si trova subito

$$[45] \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{(F + G\cos\omega)^2 + AI^2}{2GI^2}, \\ \text{e poi} \\ y = \dfrac{(G + F\cos\omega)^2 + BI^2}{2FI^2}. \end{array} \right. \quad (*)$$

(*) È utile trasformare alquanto queste formole. Dalle [6] si ha per $C = 0$

$$F^2 = -\Delta a, \quad G^2 = -\Delta b, \quad FG = \Delta h,$$

onde

$$(F + G\cos\omega)^2 = F^2 + G^2 + 2FG\cos\omega - G^2\operatorname{sen}^2\omega = -\Delta I - G^2\operatorname{sen}^2\omega.$$

10° Termineremo accennando un'altra maniera per determinare gli assi di una conica.

Se $\frac{m}{n}$ è il rapporto direttivo di una retta, la solita condizione di ortogonalità dà per rapporto direttivo di una retta perpendicolare alla prima $-\frac{m\cos\omega + n}{m + n\cos\omega}$; sicchè, se il diametro [31]' è un asse, sarà

$$\frac{am + hn}{m + n\cos\omega} = \frac{hm + bn}{m\cos\omega + n} = \lambda,$$

ove λ è un rapporto da determinare; e quindi

$$(a - \lambda)m + (h - \lambda\cos\omega)n = 0,$$

$$(h - \lambda\cos\omega)m + (b - \lambda)n = 0,$$

onde la condizione

[46] $$\begin{vmatrix} a - \lambda & h - \lambda\cos\omega \\ h - \lambda\cos\omega & b - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e sviluppando

[46]' $$\operatorname{sen}^2\omega \,.\, \lambda^2 - I\lambda + C = 0.$$

Questa equazione di 2° grado (*) fornisce per λ i due valori $\frac{I \pm K}{2\operatorname{sen}^2\omega}$, a ciascuno dei quali corrisponde un valore di $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n} = -\frac{h - \lambda\cos\omega}{a - \lambda} = -\frac{b - \lambda}{h - \lambda\cos\omega} = \pm\frac{\sqrt{b - \lambda}}{\sqrt{a - \lambda}}.$$

I due valori di ρ sono reali, e sono invarianti assoluti della $f(x, y)$.

Per la parabola, la [46]' dà $\lambda = \frac{I}{\operatorname{sen}^2\omega}$ (oltre $\lambda = 0$, cui corrisponde la retta all'infinito).

---

e quindi

[45]' $$\begin{cases} x = \dfrac{AI - \Delta}{2GI} - \dfrac{G}{2I^2}\operatorname{sen}^2\omega, \\[2ex] y = \dfrac{BI - \Delta}{2FI} - \dfrac{F}{2I^2}\operatorname{sen}^2\omega. \end{cases}$$

(*) La presente equazione è la stessa che ci occorse al § 10-2°, salvo il cambio di λ in $-\lambda$.

Altro modo di dimostrare le proprietà del centro, dei diametri, degli assi, degli asintoti.

*§ **29**. Nelle pagine precedenti abbiamo stabilito le nozioni dei diametri, del centro, degli asintoti, dei diametri coniugati e degli assi, riguardandoli come casi particolari della polare, del polo, delle tangenti e delle rette coniugate, ed avvalendoci della considerazione dei punti all'infinito del piano. Tuttavia, atteso l'importanza che i diametri, il centro e gli asintoti hanno nello studio delle curve di 2° ordine, e tenuto conto che la scoperta delle loro proprietà fu di molto anteriore a quella dei poli e delle polari, ci sembra utile rifare direttamente la esposizione delle loro proprietà più spiccate, in modo che possa esser compresa anche da chi non avesse notizia di poli e polari.

Dall'origine o (fig. 66) tiriamo una retta, e siano α, β gli angoli che essa fa rispettivamente con gli assi delle x e delle y, ρ la distanza dell'origine da un punto qualunque $\mathbf{P}(x, y)$ della retta. Ponendo

$$m = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega}, \quad n = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega},$$

avremo evidentemente

$$x = m\rho, \quad y = n\rho \ (^*).$$

Sarà poi

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

fig. 66

l'equazione della retta; sicchè basta conoscere il *rapporto direttivo* $\frac{m}{n}$ per fissare la direzione della retta.

Per determinare i punti, nei quali la curva è incontrata da una retta condotta per l'origine nella direzione fissata dal rapporto $\frac{m}{n}$, basterà sostituire i valori $m\rho$ e $n\rho$ di x e y nella equazione della

(*) Nel caso degli assi ortogonali sarà $m = \cos\alpha$, $n = \operatorname{sen}\alpha$.

curva $f(x, y) = 0$: si avrà così una equazione di 2° grado in ρ, la quale fornirà le distanze dell'origine dai punti ove la retta seca la curva: essa è

$$[47] \qquad (am^2 + 2hmn + bn^2)\rho^2 + 2(gm + fn)\rho + c = 0,$$

e può dirsi l'equazione *polare* della curva.

Da questa equazione derivano molte conseguenze:

1° Quando m e n son tali da annullare il coefficiente di ρ, $gm + fn$; quando cioè

$$\frac{m}{n} = -\frac{f}{g},$$

la [47] dà per ρ due valori opposti, vale a dire che la retta **r** (fig. 67) corrispondente a $\frac{m}{n} = -\frac{f}{g}$ seca la curva in due punti (reali o immaginarii), fra cui l'origine è il punto di mezzo.

fig. 67

L'equazione di cotesta retta è

$$\frac{x}{y} = -\frac{f}{g},$$

ovvero

$$gx + fy = 0,$$

e si forma eguagliando a zero il gruppo dei termini a 1° grado della $f(x, y)$.

Trasportando l'origine in un punto qualunque (x', y'), le f, g divengono (§ 10) $hx' + by' + f$, $ax' + hy' + g$, e l'ultima equazione diviene

$$\frac{m}{n} = -\frac{hx' + by' + f}{ax' + hy' + g}.$$

Questa equazione prova che *per ogni punto* (x', y') *si può tirare una corda che resti bisecata in esso*, e fissa la direzione di tale corda.

2° La stessa equazione stabilisce una relazione fra il rapporto direttivo $\frac{m}{n}$ di una corda e le coordinate x', y' del suo punto medio. Se dunque facciamo restar costante $\frac{m}{n}$ e variare il punto (x', y') in modo da soddisfare sempre alla [47], questo punto percorrerà il luogo

rappresentato dalla equazione

$$\frac{m}{n} = -\frac{hx + by + f}{ax + hy + g},$$

ovvero

[48] $$m(ax + hy + g) + n(hx + by + f) = 0,$$

o anche

[48]' $$(am + hn)x + (hm + bn)y + (gm + fn) = 0,$$

cioè una retta. Dunque *il luogo dei punti di mezzo di un sistema di corde parallele è una retta*, la quale dicesi *diametro coniugato* a quelle corde (fig. 52, 53, 54). Ad ogni sistema di corde parallele corrisponde un diametro; e se $\frac{m}{n}$ è il rapporto direttivo delle corde, la [48] o la [48]' è l'equazione del diametro ad esse coniugato.

In particolare

[49] $$ax + hy + g = 0, \quad hx + by + f = 0$$

sono i diametri coniugati alle corde rispettivamente parallele agli assi delle x e delle y.

3° Dalla [48] si rileva che tutti i diametri passano pel punto comune ai due diametri [49], vale a dire pel punto $\mathbf{P}_0$ (fig. 55, 56) di coordinate

[50] $$x_0 = \frac{G}{C}, \quad y_0 = \frac{F}{C}.$$

Adunque *nell'ellisse e nell'iperbole* ($C \gtrless 0$) *tutti i diametri passano per un punto. Questo biseca le corde che passano per esso*, e però dicesi *centro* della curva.

Nella parabola tutti i diametri sono paralleli (fig. 57). Poichè per $C = 0$ x_0 e y_0 risultano infinite. O altrimenti, poichè quando $C = 0$, onde $\frac{b}{h} = \frac{h}{a}$, i due diametri [49] riescono paralleli, e quindi tutti gli altri diametri riescono paralleli ad essi. Per ciascuno sarà $-\frac{h}{a} = -\frac{b}{h}$ il rapporto direttivo.

4° Quando m e n hanno tali valori da annullare il coefficiente di ρ^2 nella [46], cioè quando

[51] $$am^2 + 2hmn + bn^2 = 0,$$

onde

$$[51]' \qquad a\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2h\frac{m}{n} + b = 0,$$

allora un valore di ρ diviene infinito; dunque quelle due rette per l'origine, che corrispondono ai due rapporti $\frac{m}{n}$ determinati dalla [51]', secano la curva in due punti, di cui uno (almeno) è a distanza infinita. E siccome trasportando l'origine in ogni altro punto le a, h, b non mutano, e quindi neanche la [51]'; così (fig. 58) *per ogni punto* P *possono tirarsi due rette, che incontrino la curva in due punti di cui uno sia a distanza infinita; e le direzioni di tali rette sono le stesse per ogni punto. Esse sono reali e distinte nell'iperbole* (perchè $h^2 - ab > 0$); *immaginarie nell'ellisse* (perchè $h^2 - ab < 0$); *e nella parabola si riducono ad una per ciascun punto, e precisamente al diametro che passa per quel punto* (perchè $h^2 - ab = 0$, e però la [51]' dà $\frac{m}{n} = -\frac{h}{a}$, che è anche il rapporto direttivo dei diametri).

5° *Nell'iperbole quelle due rette* t, t', *che passano pel centro e incontrano la curva all'infinito, sono tangenti della curva all'infinito* (fig. 58); perchè, se uno dei due punti d'incontro di una retta pel centro con la curva è a distanza infinita, anche l'altro, che deve essere equidistante dal centro, sarà a distanza infinita, e però coinciderà col primo. Si comprende che le due rette in questione andranno avvicinandosi indefinitamente alla curva senza mai raggiungerla, e però si dicono *asintoti* della curva.

6° Sia $\frac{m}{n}$ il rapporto direttivo di una retta (fig. 59 e 60): allora la [48]' rappresenta un diametro r' bisecante le corde parallele ad essa; sicchè, se chiamiamo $\frac{m'}{n'}$ il rapporto direttivo del diametro r', sarà evidentemente

$$\frac{m'}{n'} = -\frac{hm + bn}{am + hn};$$

onde

$$[52] \qquad amm' - hmn' - m'n - bnn' = 0.$$

Siccome questa relazione non si altera scambiando $\frac{m}{n}$ con $\frac{m'}{n'}$, così: *dati due diametri* r, r', *se il secondo biseca le corde pa-*

rallele al primo, anche il primo bisecherà le corde parallele al secondo. Due diametri così fatti sono *coniugati* l'uno all'altro.

7° Tra le corde coniugate a un diametro r contano anche le tangenti nei punti ove esso seca la curva; adunque *le tangenti nelle estremità di un diametro sono parallele alle corde e al diametro coniugato ad esso.*

8° In generale un diametro non è perpendicolare alle corde coniugate; ma *nell'ellisse e nell'iperbole vi sono due diametri perpendicolari alle corde coniugate*, e diconsi gli *assi* della curva.

Basta provarlo nell'ipotesi che gli assi delle coordinate sieno ortogonali, trattandosi di una proprietà indipendente dalla posizione dei medesimi. Allora, se un diametro e una corda ad esso coniugata fanno gli angoli α e α' con l'asse delle x, sarà

$$\frac{n}{m} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{n'}{m'} = \operatorname{tg}\alpha',$$

e la [52] divisa per mm' diverrà

$$[52]' \qquad a + h(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha') + b\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' = 0.$$

I due diametri saranno poi perpendicolari se $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$, onde $\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; e l'ultima equazione diverrà

$$a + h\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - b = 0,$$

ovvero

$$[53] \qquad h\operatorname{tg}^2\alpha + (a - b)\operatorname{tg}\alpha - h = 0.$$

Questa equazione dà per $\operatorname{tg}\alpha$ due valori reali, perchè il loro predotto è -1; dunque vi sono due diametri perpendicolari alle corde che bisecano, cioè due *assi*. È chiaro poi che *i due assi sono diametri coniugati;* perchè, se un diametro r biseca le corde perpendicolari ad esso, il diametro coniugato r' (che è una di quelle corde) sarà perpendicolare a r, e quindi bisecherà le corde parallele a r, cioè perpendicolari a r'.

Nella parabola vi è un solo asse. Infatti, supposte le coordinate

ortogonali, per ogni diametro sarà $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{m}{n} = -\frac{h}{a}$ (3°), e quindi saranno perpendicolari al diametro quelle corde per le quali

$$\frac{m'}{n'} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{h} = \frac{h}{b}.$$

Un teorema di Newton.

*§ **30**. Siano ρ_1, ρ_2 le due radici della equazione polare [47]; sarà

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{c}{am^2 + 2hmn + bn^2}.$$

Siano poi ρ'_1, ρ'_2 le radici della stessa [47] relative ad un altro rapporto direttivo $\frac{m'}{n'}$: sarà similmente

$$\rho'_1 \rho'_2 = \frac{c}{am'^2 + 2hm'n' + bn'^2}.$$

Dividendo membro a membro si avrà

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho'_1 \rho'_2} = \frac{am'^2 + 2hm'n' + bn'^2}{am^2 + 2hmn + bn^2}.$$

Di qui si scorge che, se dall'origine **O** (fig. 68) si tirano due rette alla curva, il prodotto dei due segmenti $\rho_1 = \mathbf{OP}_1$, $\rho_2 = \mathbf{OP}_2$, che la curva fa sulla prima retta, sta al prodotto dei due segmenti $\rho'_1 = \mathbf{OP}'_1$, $\rho'_2 = \mathbf{OP}'_2$, che la curva fa sulla seconda retta, in un certo rapporto, che dipende solo dai coefficienti dei termini a 2° grado della equazione della curva e dall'inclinazione delle due rette sugli assi delle coordinate (*), vale a dire dipende da quantità che non si alterano quando si sposta l'origine senza cangiare la direzione delle due rette e degli assi. Onde il teorema:

fig. 68

(*) I due segmenti che la curva fa su ciascuna delle due rette possono essere complessi coniugati; ma il loro prodotto è anche allora reale (e positivo).

Se da un punto mobile si tirano alla curva due rette in direzioni fisse, i prodotti delle coppie di segmenti che la curva segna su queste rette sono in rapporto costante.

Da un altro punto **O** (fig. 69) si tirino le parallele op_1p_2 e $op'_1p'_2$ alle due rette precedenti: pel teorema ora enunciato sarà

$$OP_1 \cdot OP_2 : OP'_1 \cdot OP'_2 = op_1 \cdot op_2 : op'_1 \cdot op'_2,$$

e permutando

$$\frac{OP_1 \cdot OP_2}{op_1 \cdot op_2} = \frac{OP'_1 \cdot OP'_2}{op'_1 \cdot op'_2} = \text{costante.}$$

Ovvero: *Se due rette rotano intorno a due punti fissi serbandosi parallele fra loro, i prodotti dei segmenti che la curva segna sulle due rette serbano un rapporto costante.*

fig. 69

Corollario 1°. Se il secondo punto è il centro, si ha che *il prodotto dei segmenti di una secante che roti intorno a un punto fisso è proporzionale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa.*

Infatti allora (fig. 71)

$$op_1 = -op_2, \quad op_1 \cdot op_2 = -op_1^2.$$

Ne segue che *nel circolo il prodotto dei segmenti è costante su ogni trasversale condotta per un punto fisso:* teorema notissimo.

fig. 70

2° *Le due tangenti condotte da un punto sono proporzionali ai semidiametri ad esse paralleli.*

Infatti (fig. 71) in questo caso il cor. 1° dà

$$\frac{OT \cdot OT}{oP^2} = \frac{OT' \cdot OT'}{oP_1^2}, \quad \text{onde} \quad \frac{OT}{oP} = \frac{OT'}{oP'}.$$

3° *I quadrati di un sistema di corde parallele sono proporzionali ai prodotti dei segmenti che esse determinano sul diametro coniugato.*

fig. 71

fig. 72

Infatti, siano (fig. 72 e 73) **AA'** un diametro, **C** il centro, e **PP'** una corda bisecata da **AA'** in **Q**. Allora il teorema generale, di cui andiamo esponendo le conseguenze principali, darà

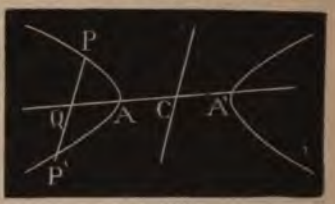


fig. 73

$$\frac{QP \,.\, QP'}{QA \,.\, QA'} = \text{costante}, \qquad \frac{QP^2}{QA \,.\, QA'} = \text{costante}.$$

4° Siano **O**, **o** due punti di una retta parallela a un asintoto della iperbole (fig. 74), ovvero due punti di un diametro della parabola (fig. 75); insomma due punti di una retta, che sechi la curva in un punto **A** a distanza finita e in un punto all'infinito. Indicando questo con ∞, sarà

fig. 74

$$\frac{OP_1 \,.\, OP_2}{op_1 \,.\, op_2} = \frac{OA \,.\, O\infty}{oA \,.\, o\infty} = \frac{OA}{oA} \,.\, \frac{O\infty}{o\infty};$$

ma è noto che $\frac{O\infty}{o\infty} = 1$ (*); dunque

$$\frac{OP_1 \,.\, OP_2}{op_1 \,.\, op_2} = \frac{OA}{oA};$$

fig. 75

vale a dire che *i prodotti dei segmenti, che una retta parallela a un asintoto nell'iperbole, ovvero un diametro nella parabola, taglia sopra un sistema di corde parallele, sono proporzionali ai semplici segmenti che queste corde staccano da quella retta.*

(*) Infatti, se in una retta si hanno tre punti **O**, **o**, **B**, sarà $\frac{OB}{oB} = \frac{Oo + oB}{oB} = \frac{Oo}{oB} + 1$; ora quando **O**, **o** restano fermi e **B** si allontana all'infinito, la distanza **oB** cresce indefinitamente, $\frac{Oo}{oB}$ tende a zero, e quindi $\frac{OB}{oB}$ tende ad 1.

Osservazioni sull'iperbole equilatera, sul circolo, sulla coppia di rette.

§ 31. 1° I valori del rapporto $\frac{m}{n}$ corrispondenti agli asintoti ci sono forniti dalla equazione [36]; sicchè indicandoli con $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, avremo le relazioni

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=-\frac{2h}{a}, \quad \frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{b}{a}.$$

Gli asintoti sono ortogonali (fig. 76) quando i due rapporti $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ verificano la condizione di perpendicolarità

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}+1+\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)\cos\omega=0,$$

la quale per le precedenti relazioni si riduce a

$$\frac{b}{a}+1-\frac{2h}{a}\cos\omega=0,$$

ovvero

$$a+b-2h\cos\omega=0,$$

o infine

$$I=0.$$

fig. 76

Dunque: *la relazione cui debbono soddisfare i coefficienti* (dei termini a 2° grado) *della* $f(x,y)=0$, *affinchè la curva abbia gli asintoti ortogonali, è* $I=0$.

La curva allora non può essere che una iperbole; e a convincersene basta osservare (come al § 23-1°) che quando ω è retto si ha $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=-1$, sicchè la [36] ha radici reali.

Una tale iperbole vien chiamata *ortogonale* per la detta proprietà degli asintoti. Viene anche chiamata *equilatera* per una ragione che sarà esposta in seguito.

Il fatto, che la funzione I dei coefficienti della $f(x,y)$ coll'annullarsi esprime che la curva possiede una proprietà indipendente dalla posizione degli assi delle coordinate, è perfettamente d'accordo con l'altro fatto già osservato (§ 10), che la funzione $\frac{I}{\operatorname{sen}^2\omega}$ è un invariante assoluto della $f(x,y)$.

2° Esaminiamo le modificazioni che subiscono le proprietà relative ai diametri, agli asintoti, alle polari, ecc. nel caso di un circolo.

Definito il circolo come il luogo dei punti aventi da uno stesso punto (α, β) una stessa distanza ρ, vedemmo che la sua equazione è (§ 1-III)

$$(x-\alpha)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega + (y-\beta)^2 = \rho^2,$$

e che il circolo appartiene alla specie ellisse (§ 8-6°).

Dalla definizione emerge che il punto (α, β) è il centro del circolo, e che ciascun diametro ne è un asse di simmetria; e però ciascuna retta è perpendicolare al diametro che passa pel suo polo, e *tutte le coppie di diametri coniugati sono ortogonali.*

Queste infinite coppie di diametri costituiscono una involuzione, della quale le rette doppie sono gli asintoti (immaginarii) del circolo.

L'equazione complessiva degli asintoti sarà, giusta la [39],

$$(x-\alpha)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\omega + (y-\beta)^2 = 0;$$

e però le equazioni separate dagli asintoti saranno

$$(x-\alpha)+(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)(y-\beta)=0, \quad (x-\alpha)+(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)(y-\beta)=0,$$

od anche

$$(\cos\omega-i\,\mathrm{sen}\,\omega)(x-\alpha)+(y-\beta)=0, \quad (\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)(x-\alpha)+(y-\beta)=0.$$

Or siccome in queste equazioni non vi è più traccia di ρ, così *tutti i circoli concentrici del piano hanno gli stessi asintoti.*

Siccome poi i coefficienti di x e y nelle stesse equazioni sono indipendenti anche da α e β, così *tutti i circoli del piano hanno gli asintoti paralleli.*

E se ricordiamo che gli asintoti sono le tangenti alla curva nei punti all'infinito, conchiuderemo che *tutti i circoli del piano hanno in comune due punti immaginari all'infinito*, detti i punti *ciclici* del piano.

Una conica è circolo, se passa per i due punti ciclici.

Due circoli concentrici sono anche tangenti nei due punti ciclici (ossia hanno un *doppio contatto* all'infinito).

Ciò posto, consideriamo in un fascio di rette le infinite coppie di rette ortogonali. Potendo queste considerarsi come le coppie di diametri coniugati di qualunque circolo abbia per centro il centro del fascio, concludiamo che *le infinite coppie di rette ortogonali appartenenti a un fascio costituiscono un'involuzione, le cui rette doppie*

sono le due rette (immaginarie) che vanno ai due punti ciclici del piano.

In altre parole: *due rette perpendicolari sono in armonia con le due rette che vanno dal loro punto comune ai due punti ciclici del loro piano;* ovvero *hanno i punti all'infinito in armonia coi punti ciclici.*

3° Il circolo si distingue fra le coniche per la proprietà di possedere infiniti assi. Ora l'equazione quadratica [40], che fornisce i rapporti direttivi degli assi, ammette più di due radici, anzi diviene una identità, quando son nulli i coefficienti dei singoli suoi termini, vale a dire quando si verificano le condizioni

$$a \cos \omega - h = 0, \quad a - b = 0, \quad b \cos \omega - h = 0,$$

che si riducono alle due

$$a = b, \quad h = a \cos\omega;$$

e ritroviamo così le condizioni perchè la $f(x, y) = 0$ rappresenti un circolo.

La stessa equazione [40] ha le due radici eguali quando è nullo il suo discriminante, il quale moltiplicato per -4 vedemmo essere (§ 28-6°)

$$I^2 - 4C\text{sen}^2\omega \quad \text{ovvero} \quad K^2.$$

Ma vedemmo pure che questa quantità può ridursi a una somma di due quadrati:

$$(a - b)^2\text{sen}^2\omega + [(a + b)\cos\omega - 2h]^2,$$

e quindi non può annullarsi se non quando si annullano ambo i quadrati, ossia quando

$$a - b = 0, \quad (a + b)\cos\omega - 2h = 0,$$

onde

$$a = b, \quad h = a\cos\omega,$$

e però allora la conica è un circolo.

Concludiamo che *le due condizioni perchè la* $f(x, y) = 0$ *rappresenti un circolo si possono compendiare nell'unica* $I^2 - 4C\text{sen}^2\omega = 0$ *ovvero* $K = 0$, qualora siano reali i coefficienti dei termini a 2° grado.

4° Ci resta ad esaminare come si applichino le nozioni e le proprietà del centro, dei diametri e degli asintoti al caso che la curva rappresentata dalla $f(x, y) = 0$ si scinda in due rette.

È chiaro che, se le due rette sono convergenti, i diametri sono le rette che passano per il punto comune alle due rette date, e questo punto è il centro. Due diametri coniugati sono rette coniugate armonicamente rispetto alle due rette stesse. Gli asintoti sono le due rette date. Gli assi sono le bisettrici degli angoli delle due rette date, e sono reali anche quando queste siano immaginarie.

E di qui segue che: se la $f(x, y) = 0$ rappresenta due rette, la [31] rappresenta le rette del fascio determinato alle due rette (fra cui la $gx + fy + c = 0$); la [35] è la relazione fra i rapporti direttivi di due rette in armonia con le due rette date; la [36] dà i rapporti direttivi delle due rette date; la [40] determina i rapporti direttivi delle bisettrici degli angoli delle due rette date; e la [42] è l'equazione complessiva di tali bisettrici (che sono sempre reali).

Fuochi.

§ **32**. Abbiamo dimostrato (§ 23-1°) che per un punto assegnato passa una, ed in generale una sola, coppia di rette coniugate ortogonali. Ora ci proponiamo d'investigare se vi sono dei punti, dai quali si possa tirare più di una coppia di rette coniugate ortogonali.

A tale uopo riprendiamo la equazione (§ 23-1°):

$$(A'\cos\omega + H')\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - (A' - B')\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - (B'\cos\omega + H') = 0,$$

la quale determina i valori del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ corrispondenti alle due rette coniugate ortogonali che si possono tirare da un punto dato (x', y'); ed osserviamo che, se per questo punto si potesse tirare un'altra coppia di rette coniugate ortogonali, quella equazione dovrebbe fornire per $\frac{\lambda}{\mu}$ anche due altri valori; sicchè essa avrebbe più radici di quello che il suo grado comporta, e quindi si ridurrebbe a una identità; per conseguenza i coefficienti dei singoli termini sarebbero nulli, vale a dire avrebbero luogo le relazioni

$$A'\cos\omega + H' = 0, \quad A' - B' = 0, \quad B'\cos\omega + H' = 0,$$

che equivalgono alle due seguenti:

$$A' = B' = -\frac{H'}{\cos\omega},$$

ovvero, restituendo a A', B', H' il loro significato (§ 10-1°),

$$Cx'^2-2Gx'+A=Cy'^2-2Fy'+B=-\frac{1}{\cos\omega}(Cx'y'-Fx'-Gy'+H).$$

Abbiamo così due equazioni di 2° grado fra le due quantità x', y'; sicchè possiamo prevedere che *in generale esistono quattro punti tali, che per ciascuno di essi passino due, e quindi infinite, coppie di rette coniugate ortogonali.* Tali punti chiameremo *fuochi* della curva.

Per procedere con maggiore speditezza alla determinazione delle x', y', introdurremo una terza incognita ϵ, e scriveremo le ultime equazioni come segue:

$$[54]\qquad \begin{cases} Cx'^2-2Gx'+A=\epsilon, \\ Cy'^2-2Fy'+B=\epsilon, \\ Cx'y'-Fx'-Gy'+H=-\epsilon\cos\omega. \end{cases}$$

a) Quando C non è nullo, ossia quando la curva è una ellisse o una iperbole, dalle due prime [54] ricaviamo

$$x'=\frac{G}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{G^2-C(A-\epsilon)}=\frac{G}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{C\epsilon-(CA-G^2)},$$

$$y'=\frac{F}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{F^2-C(B-\epsilon)}=\frac{F}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{C\epsilon-(BC-F^2)},$$

ovvero, per le [6],

$$[55]\qquad x'=\frac{G}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{C\epsilon-\Delta b},\quad y'=\frac{F}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{C\epsilon-\Delta a};$$

sicchè per determinare x' e y' resta a conoscere ϵ.

A tale uopo sostituiscansi nella terza delle [54] i valori [55] di x' e y', e si avrà

$$CH-FG+(\pm\sqrt{C\epsilon-\Delta b})(\pm\sqrt{C\epsilon-\Delta a})=-C\epsilon\cos\omega,$$

ovvero, poichè $FG-CH=\Delta h$,

$$[56]\qquad (\pm\sqrt{C\epsilon-\Delta b})(\pm\sqrt{C\epsilon-\Delta a})=-C\epsilon\cos\omega+\Delta h;$$

e quadrando e ordinando rispetto a ϵ,

$$[57] \qquad C\,\mathrm{sen}^2\omega \,.\, \epsilon^2 - \Delta I \,.\, \epsilon + \Delta^2 = 0.$$

Questa equazione (*) fornisce i due valori di ϵ:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta(I+K)}{2C\,\mathrm{sen}^2\omega}, \qquad \epsilon_2 = \frac{\Delta(I-K)}{2C\,\mathrm{sen}^2\omega},$$

i quali sono reali e sono invarianti assoluti della $f(x, y)$.

A ciascun valore di ϵ corrispondono per le [55] due valori di x' e due di y'; ma i segni dei radicali nelle [55] dipendono l'uno dall'altro mediante la [56], sicchè a ciascun valore di x' corrisponde un sol valore di y'; dunque al valore ϵ_1 corrisponde un paio di fuochi, e similmente al valore ϵ_2 ne corrisponde un altro paio.

Due fuochi corrispondenti ad uno stesso valore di ϵ si trovano in linea retta col centro e simmetricamente rispetto ad esso; poichè la semisomma delle loro ascisse è $\frac{G}{C}$, ascissa del centro, e similmente per le ordinate.

Di più il diametro che passa per tali due fuochi è un asse della curva; poichè la corda sua coniugata condotta per uno di quei due fuochi è perpendicolare al diametro stesso, dietro la definizione dei fuochi.

Il quadrato della distanza di un fuoco (x', y') dal centro $\left(\frac{G}{C}, \frac{F}{C}\right)$ è espresso da

$$d^2 = \left(x' - \frac{G}{C}\right)^2 + \left(y' - \frac{F}{C}\right)^2 + 2\left(x' - \frac{G}{C}\right)\left(y' - \frac{F}{C}\right)\cos\omega;$$

sostituendo i valori di x' e y' dati dalle [55], si ha

$$d^2 = \frac{1}{C^2}\left\{2C\epsilon - \Delta(a+b) + 2(\pm\sqrt{C\epsilon - \Delta b})\,(\pm\sqrt{C\epsilon - \Delta a})\cos\omega\right\},$$

e per la [56]

$$d^2 = \frac{1}{C^2}\left\{2C\epsilon - \Delta(a+b) + 2(-C\epsilon\cos\omega + \Delta h)\cos\omega\right\}$$

$$= \frac{1}{C^2}(2C\epsilon\,\mathrm{sen}^2\omega - \Delta I);$$

(*) Questa equazione ha per radici quelle della [46]' moltiplicate per $\frac{\Delta}{C}$.

e sostituendo quivi ad ϵ una volta ϵ_1 e un'altra ϵ_2, e chiamando d_1, d_2 i corrispondenti valori di d, si ha

$$d_1^2 = \frac{\Delta K}{C^2}, \quad d_2^2 = -\frac{\Delta K}{C^2},$$

onde

[58] $$d_1 = \frac{\sqrt{\Delta K}}{C}, \quad d_2 = \frac{\sqrt{-\Delta K}}{C};$$

sicchè delle due distanze d_1, d_2 una sarà reale e una immaginaria; e precisamente sarà reale d_1 se Δ è positivo, d_2 se Δ è negativo. Per conseguenza (fig. 77 e 78) *nella ellisse e nella iperbole vi è una coppia di fuochi reali*, **F** *e* **F'**, *situati sopra uno degli assi simmetricamente rispetto al centro* **C**.

fig. 77

Questi fuochi sono interni alla curva, vale a dire che da essi non si possono tirare tangenti alla curva; altrimenti per ciascun fuoco passerebbe solo una coppia di rette coniugate ortogonali, cioè quella delle bisettrici degli angoli delle tangenti. Quindi segue che l'asse che contiene i due fuochi (asse *focale*) seca la curva, anche se è una iperbole, in due punti reali **V** e **V'** (*vertici*). E le distanze **VF**, **F'V'** sono eguali (*).

fig. 78

b) Quando la curva è una parabola, ossia quando $C = 0$, le [54] si riducono alle

[54]' $$-2Gx' + A = \epsilon, \quad -2Fy' + B = \epsilon, \quad Fx' + Gy' - H = \epsilon \cos \omega,$$

e la [57] a

[57]' $$\epsilon = \frac{\Delta}{I};$$

(*) Nel circolo è chiaro che i due fuochi cadono nel centro (poichè $K = 0$ e $d = 0$); così pure nella coppia di rette (poichè $\Delta = 0$ e $\epsilon = 0$).

fig. 79

onde

$$[55]' \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{A-\epsilon}{2G} = \dfrac{AI-\Delta}{2GI}, \\[2ex] y' = \dfrac{B-\epsilon}{2F} = \dfrac{BI-\Delta}{2FI}; \end{cases}$$

sicchè (fig. 79) *la parabola ha un sol fuoco reale* **F** (a distanza finita), *situato sopra l'asse e interno alla curva* (*).

Direttrici.

§ 33. La retta polare di un fuoco dicesi *direttrice*. Essa è perpendicolare all'asse sul quale giace il fuoco corrispondente (§ 27-3°), ed è reale se questo è reale (§ 19-6°).

Adunque *nell'ellisse e nell'iperbole vi sono due direttrici reali, perpendicolari all'asse focale, simmetriche rispetto al centro, e che non secano la curva. E nella parabola vi è una direttrice reale* (a distanza finita), *perpendicolare all'asse, e che non seca la curva* (**).

Se nell'ellisse e nell'iperbole (fig. 77 e 78) **D** e **D'** sono i punti ove le direttrici secano l'asse focale, sarà **D** coniugato a **F** e **D'** a **F'**, e però sarà

$$\mathbf{CF} \,.\, \mathbf{CD} = \mathbf{CV}^2, \qquad \mathbf{CF'} \,.\, \mathbf{CD'} = \mathbf{CV}^2.$$

Nella parabola poi (fig. 79), se la direttrice seca l'asse in **D**, sarà **D** coniugato armonicamente a **F** rispetto a **V** e al punto all'infinito dell'asse, e quindi **V** dividerà per metà la distanza **DF**.

È chiaro che ogni retta pel fuoco ha il polo nel punto ove la sua perpendicolare pel fuoco seca la direttrice corrispondente; poichè due rette perpendicolari uscenti da un fuoco sono coniugate.

(*) L'altro fuoco reale è il punto all'infinito della parabola.
Dalle [55]' e dalle [45]' si ha la distanza tra il vertice e il fuoco:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{2I^2}\sqrt{F^2+G^2+2FG\cos\omega} = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}\,.$$

(**) L'altra direttrice reale è la retta all'infinito.

L'equazione di una direttrice si forma sostituendo nella equazione generale [28] della polare i valori [55] di x', y'; e si trova, fatte le riduzioni (*):

$$[59] \quad \pm\sqrt{C\epsilon-\Delta b}\,(ax+hy+g)\pm\sqrt{C\epsilon-\Delta a}\,(hx+by+f)+\Delta=0.$$

Nel caso della parabola, l'equazione della direttrice, cioè della polare del punto [55]', può ridursi alla forma

$$[59] \quad 2(F\cos\omega+G)x+2(F+G\cos\omega)y-(A+B+2H\cos\omega)=0.$$

Alcune proprietà dei fuochi (**).

*§ **34**. Sia preso per origine un fuoco **F** della curva (fig. 80, 81, 82), e sieno gli assi ortogonali: allora le equazioni [54], che determinano le coordinate dei fuochi, dovranno essere soddisfatte da

$$x'=0, \qquad y'=0,$$

e quindi sarà (per uno dei due valori di ϵ)

$$A=\epsilon, \quad B=\epsilon, \quad H=0,$$

e l'equazione della curva per la [7]'' diverrà

$$[60] \qquad \epsilon(x^2+y^2)+(gx+fy+c)^2=0,$$

onde

$$[60]' \qquad \sqrt{x^2+y^2}=\pm\sqrt{-\frac{1}{\epsilon}}\,(gx+fy+c).$$

Osservando che $\sqrt{x^2+y^2}$ è la distanza **PF** di un punto **P**(x, y) della curva dall'origine **F**; e che $gx+fy+c=0$ rappresenta (§ 19-6°) la polare dell'origine **F** (cioè la direttrice corrispondente al fuoco **F**), sicchè $gx+fy+c$ è eguale alla distanza **PE** del punto **P**(x, y) da questa direttrice, moltiplicata per $\pm\sqrt{g^2+f^2}$; vediamo che l'ultima

(*) Lasciamo al lettore, per suo esercizio, la cura di sviluppare i calcoli e le riduzioni qui indicate, le quali si poggiano sempre sulle solite identità [3], [4], [6].

(**) I §§ 34 e 35 formano una disgressione, certo molto interessante, dallo studio dell'equazione generale di 2° grado, ma possono essere tralasciati senza alcun danno.

equazione si traduce nel seguente teorema: *la distanza di un punto qualunque della curva da un fuoco serba un rapporto costante alla distanza dello stesso punto dalla direttrice corrispondente a quel fuoco.* Questo rapporto è $\sqrt{\frac{f^2+g^2}{-\epsilon}}$.

Grazie alla simmetria dei fuochi e delle direttrici rispetto al centro, è manifesto che il rapporto in questione è lo stesso anche per le distanze **PF'** e **PE'** d'un punto qualunque **P** della curva dall'altro fuoco **F'** e dalla relativa direttrice.

Noteremo alcune conseguenze del teorema ora dimostrato.

1° Dalla [60]' emerge che *la distanza di ciascun punto della curva da un fuoco si esprime mediante una funzione razionale e lineare delle coordinate del punto*, e ciò qualunque sia la posizione degli assi coordinati.

Viceversa: *il luogo di un punto, le cui distanze da un punto fisso si possano esprimere mediante una stessa funzione razionale e lineare delle coordinate di esso punto, è una curva di 2° ordine, di cui quel punto è un fuoco e la retta rappresentata da quella funzione eguagliata a zero è la corrispondente direttrice.* Poichè l'equazione del luogo, preso per origine il punto, sarà della forma $\sqrt{x^2+y^2}=px+qy+r$, che è riducibile facilmente alla [60]'.

fig. 80

2° Sia **P** un punto di una ellisse (fig. 80); **PF** e **PF'** le sue distanze dai fuochi **F** e **F'**, dette *raggi focali* del punto **P**; **PE** e **PE'** le sue distanze dalle direttrici. Indicando con e il rapporto costante fra le distanze dei punti della curva da un fuoco e dalla rispettiva direttrice, avremo in particolare pei vertici **V**, **V'**:

$$e=\frac{VF}{DV}=\frac{FV'}{DV'}=\frac{FV'-VF}{DV'-DV}=\frac{FF'}{VV'}=\frac{CF}{CV};$$

adunque *il rapporto costante è il rapporto della distanza tra un fuoco e il centro alla metà dell'asse focale;* esso dicesi *eccentricità*, poichè appunto misura la distanza di ciascun fuoco dal centro, quando si prende il semiasse per unità di lunghezza.

Nella ellisse l'eccentricità è minore di 1, poichè $CF' < CV'$; sicchè i punti della ellisse sono più vicini a un fuoco che alla relativa direttrice (*).

fig. 81

Per l'iperbole (fig. 81) si può ripetere ciò che abbiamo detto per l'ellisse, solo che *nell'iperbole l'eccentricità è maggiore di* 1, e i punti della iperbole sono più lontani dal fuoco che dalla direttrice.

Nella parabola (fig. 82) *l'eccentricità è eguale a* 1; poichè, essendo (§ 33) $DV = VF$, è pure

$$e = \frac{VF}{DV} = 1.$$

fig. 82

I punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice.

3° Tornando all'ellisse, si ha

$$e = \frac{PF}{EP} = \frac{PF'}{PE'} = \frac{PF+PF'}{EP+PE'} = \frac{PF+PF'}{EE'} = \frac{PF+PF'}{DD'},$$

onde

$$PF + PF' = e.DD' = \text{costante},$$

e quindi

$$PF + PF' = VF + VF' = VF + FV' = VV';$$

sicchè *la somma dei raggi focali* ($PF + PF'$) *di ciascun punto dell'ellisse è costante, ed è eguale all'asse focale* VV'.

Per l'iperbole poi si ha similmente

$$e = \frac{PF}{EP} = \frac{PF'}{E'P} = \frac{PF - PF'}{EP - E'P} = \frac{PF - PF'}{EE'} = \frac{PF - PF'}{DD'},$$

onde

$$PF - PF' = e.DD' = \text{costante} = FV' - V'F' = FV' - FV = VV';$$

(*) Nel circolo l'eccentricità è nulla, come pure nella coppia di rette.

sicchè *la differenza dei raggi focali* (**PF** — **PF'**) *di ciascun punto dell'iperbole è costante ed eguale all'asse focale* **VV'**.

4° Nell'ellisse, pel punto **B** estremo dell'altro asse, si ha dall'ultimo teorema 2**BF** = **VV'**, onde **BF** = **CV**. Dunque: *i due fuochi dell'ellisse sono sull'asse maggiore; e la distanza di un fuoco dal centro è il 2° cateto di un triangolo rettangolo, di cui l'ipotenusa sia il semiasse maggiore e il 1° cateto l'altro semiasse.*

*§ **35**. Per dare un altro esempio del vantaggio che può ritrarsi da una particolare scelta degli assi, assumiamo per origine un punto **P** della ellisse o dell'iperbole (fig. 83), e per assi la tangente **Px** e la normale **Py**. In questa ipotesi la $f(x, 0) = 0$, ossia

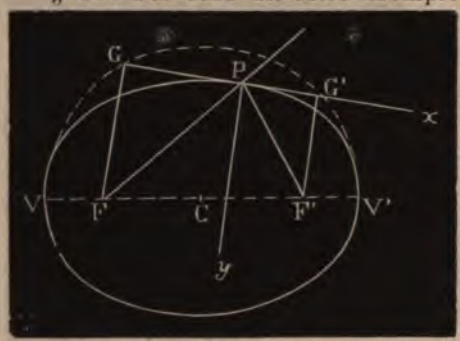


fig. 83

$$ax^2 + 2gx + c = 0,$$

dovrà dare (§ 11) per x due valori nulli, e quindi sarà

$$g = 0, \qquad c = 0.$$

Sarà poi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & f \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = -af^2,$$

$$A = -f^2,\ B = 0,\ C = ab - h^2,\ F = -af,\ G = hf,\ H = 0;$$

e le [54] diverranno

$$[54]'' \qquad \begin{cases} Cx'^2 - 2hfx' - (f^2 + \epsilon) = 0, \\ Cy'^2 + 2afy' - \epsilon = 0, \\ Cx'y' + afx' - hfy' = 0. \end{cases}$$

Da queste equazioni derivano varie interessanti proposizioni (*):

(*) Le proposizioni dei §§ 34 e 35 sussistono, debitamente interpretate, anche pei due fuochi immaginarii.

1° Dette x', y' le coordinate del fuoco **F**, e x'', y'' quelle del fuoco **F'**, si ha dalla 2ª della [54]''

$$y'y'' = -\frac{\epsilon}{C};$$

ora y, y'' sono le distanze **FG**, **F'G'** dei due fuochi dalla tangente **Px**; ed ϵ, C non variano, qualunque punto **P** della curva scelgasi come origine (§§ 10 e 32). Dunque *il prodotto delle distanze dei due fuochi da una tangente qualunque è costante.*

2° La equazione

$$C(x^2+y^2)-2hfx+2afy-(f^2+\epsilon)=0$$

rappresenta un circolo (§ 2-4°), il quale: 1° passa pei punti $G(x', 0)$ e $G'(x'', 0)$ in forza della prima delle [54]''; 2° ha per centro il punto $\left(\frac{hf}{C}, -\frac{af}{C}\right)$, ossia $\left(\frac{G}{C}, \frac{F}{C}\right)$, ossia il centro **C** della curva; 3° ha per raggio

$$\pm\frac{1}{C}\sqrt{h^2f^2+a^2f^2+C(f^2+\epsilon)}=\pm\frac{1}{C}\sqrt{af^2(a+b)+C\epsilon}$$

$$=\pm\frac{1}{C}\sqrt{C\epsilon-\Delta I},$$

che non varia qualunque sia l'origine **P** (visto che C, Δ, I, ϵ non variano). Dunque *il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da ciascun fuoco sulle tangenti, ovvero la podaria di un fuoco, è un circolo concentrico alla curva e* (per conseguenza) *avente per diametro l'asse focale* **VV'** (*).

3° Le equazioni dei raggi focali **PF**, **PF'** sono

$$y'x-x'y=0, \quad y''x-x''y=0;$$

e moltiplicandole si ha l'equazione complessiva di **PF** e **PF'**:

$$y'y''.\,x^2-(x'y''+x''y')xy+x'x''.\,y^2=0.$$

(*) Quindi segue che le lunghezze dei due semiassi sono espresse dalla formola $\pm\frac{1}{C}\sqrt{C\epsilon\,\mathrm{sen}^2\omega-\Delta I}$, ove ϵ è l'una o l'altra radice della [57].

Ora dalla 2ª delle [54]″ si ha

$$y'y'' = -\frac{\epsilon}{C}, \quad y' + y'' = -\frac{2af}{C},$$

e dalla 1ª

$$x'x'' = -\frac{f^2 + \epsilon}{C}, \quad x' + x'' = \frac{2hf}{C};$$

di più si ha

$$x'y'' + x''y' = x'(y' + y'') + y'(x' + x'') - 2x'y'$$

$$= -\frac{2af}{C}x' + \frac{2hf}{C}y' - 2x'y' = -\frac{2}{C}(Cx'y' + afx' - hfy'),$$

da cui per la 3ª delle [54]″

$$x'y'' + x''y' = 0.$$

Ciò posto, la suddetta equazione complessiva diviene

$$\epsilon x^2 + (f^2 + \epsilon)y^2 = 0,$$

che si scinde nelle due

$$x = y\sqrt{\frac{f^2}{-\epsilon} - 1}, \quad x = -y\sqrt{\frac{f^2}{-\epsilon} - 1}.$$

Queste son dunque di nuovo le equazioni delle **PF**, **PF′**; e dalla loro forma apparisce che **PF** e **PF′** sono egualmente inclinate agli assi delle coordinate. Per conseguenza: *la tangente e la normale in un punto della curva bisecano gli angoli dei raggi focali che vanno a quel punto.*

Nell'ellisse la tangente biseca l'angolo esterno dei raggi focali e la normale l'interno: nella iperbole avviene il contrario (*).

4° *Nella parabola la podaria del fuoco si riduce alla tangente al vertice; e la tangente e la normale in un punto bisecano l'angolo del raggio focale e del diametro che passano per quel punto.*

(*) Se in un fuoco **F** dell'ellisse si pone una fiamma, e si suppone la curva capace di *riflettere* i raggi luminosi emananti da **F**, avverrà che il raggio diretto secondo **FP** si rifletterà facendo l'angolo di riflessione eguale a quello d'incidenza, e quindi, per l'ultimo teorema, si rifletterà secondo **PF′**. Adunque nell'altro fuoco **F′** convergeranno tutti i raggi emananti da **F**, sicchè si avrà in **F′** una immagine della fiamma posta in **F**. Questa proprietà ha suggerito di attribuire ai punti **F** e **F′** il nome di *fuochi*.

Forme ridotte dalla equazione generale di 2° grado.

§ **36**. Lo studio delle proprietà speciali della ellisse, della iperbole e della parabola riesce più agevole dopo aver ridotta l'equazione della curva a forma più semplice mediante una particolare scelta degli assi delle coordinate. Dovendo l'equazione rimanere di 2° grado dopo la trasformazione, il modo più naturale che si presenti per semplificarla consiste nel cangiare la posizione degli assi in guisa che l'equazione perda uno o più termini. Nelle pagine precedenti abbiamo più volte ricorso a cosiffatte semplificazioni (§§ 4, 7, 34, 35); ma ora vogliamo trattare la questione in modo più ordinato e sistematico.

fig. 84

Le sostituzioni atte a far passare da due assi **ox**, **oy** (fig. 84) a due altri **OX**, **OY** sono, com'è ben noto:

$$[61] \qquad x = \alpha X + \beta Y + x', \quad y = \alpha' X + \beta' Y + y',$$

ove x', y' sono le coordinate della nuova origine **O** rispetto agli assi primitivi **ox**, **oy**, e

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{\mathbf{OX}, \mathbf{oy}})}{\operatorname{sen} \mathbf{xoy}}, \qquad \beta = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{\mathbf{OY}, \mathbf{oy}})}{\operatorname{sen} \mathbf{xoy}},$$

$$\alpha' = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{\mathbf{OX}, \mathbf{ox}})}{\operatorname{sen} \mathbf{xoy}}, \qquad \beta' = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{\mathbf{OY}, \mathbf{ox}})}{\operatorname{sen} \mathbf{xoy}};$$

e supponiamo che per effetto di queste sostituzioni la $f(x, y) = 0$ divenga

$$[62] \qquad a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + 2g'X + 2f'Y + c' = 0.$$

Le x', y' possono ricevere qualunque valore reale e finito; ma le quattro quantità α, β, α', β', che dipendono solo dalla direzione dei nuovi assi e non già dalla posizione della nuova origine, non sono tutte arbitrarie, potendo considerarsi come funzioni di due sole quantità indipendenti, p. e. degli angoli $\widehat{\mathbf{OX}, \mathbf{ox}}$ e $\widehat{\mathbf{OY}, \mathbf{ox}}$ (ovvero degli

angoli $\widehat{\mathbf{OX},\mathbf{ox}}$ e $\widehat{\mathbf{XOY}}$), visto che la conoscenza di questi due angoli basta a determinare la direzione dei nuovi assi. Adunque nell'eseguire la trasformazione noi possiamo disporre di quattro quantità arbitrarie, cioè di x', y' e (p. es.) degli angoli $\widehat{\mathbf{OX},\mathbf{ox}}$ e $\widehat{\mathbf{OY},\mathbf{ox}}$. Ma ciò non ci permette di concludere che potremo disporre di quelle quattro quantità in modo che riescano nulli quattro assegnati coefficienti della equazione trasformata [62]; poichè ciò può risultare incompatibile con le restrizioni, essenziali nel caso nostro, che i valori di quelle quattro quantità sieno finiti e reali, e che inoltre i due angoli $\widehat{\mathbf{OX},\mathbf{ox}}$ e $\widehat{\mathbf{OY},\mathbf{ox}}$ sieno diseguali.

§ **37**. Per chiarir meglio la cosa, gioverà esaminare varii dei casi che la questione presenta; cominciando da quelli nei quali vogliasi annullare un sol coefficiente:

1° $a' = 0$. Per $Y = 0$ la [62] dà $a'X^2 + 2g'X + c' = 0$, equazione che dà le ascisse dei due punti ove **OX** seca la curva. Ora se $a' = 0$, una di queste ascisse diviene infinita, e viceversa; dunque bisognerà assumere l'asse **OX** in modo che sechi la curva in un punto a distanza infinita. Sicchè la trasformazione sarà impossibile nella ellisse, che non è secata da alcuna retta a distanza infinita; possibile nella iperbole, ove **OX** dovrà esser parallela a un asintoto; e possibile nella parabola, ove **OX** sarà un diametro, purchè sia pure $h' = 0$.

$b' = 0$. Analoga conclusione rispetto ad **OY**.

$c' = 0$. Bisognerà portare l'origine sulla curva; il che è sempre possibile (tranne quando $C > 0$ e $\Delta a > 0$, poichè allora la curva è immaginaria).

$f' = 0$. Per $X = 0$ la [62] dà $b'Y^2 + 2f'Y + c' = 0$, equazione che determina le ordinate dei due punti comuni a **OY** e alla curva. Se $f' = 0$, sarà **O** il punto di mezzo di quei due punti, e viceversa. Dunque si potrà prendere per asse delle Y una retta qualunque, ma bisognerà portare l'origine nel punto ove essa è secata dal diametro coniugato alla sua direzione.

$g' = 0$. Analoga conclusione rispetto ad **OX**.

$h' = 0$. Il diametro coniugato alla direzione **OX** è $a'X + h'Y + g' = 0$, il quale per $h' = 0$ è parallelo a **OY**; e viceversa. Dunque bisognerà prendere gli assi **OX**, **OY** paralleli a due diametri coniugati nella ellisse e nella iperbole; e nella parabola basterà che l'asse **OX** sia un diametro.

2° Passiamo a considerare due coefficienti. Possono presentarsi

15 combinazioni, l'esame delle quali riesce facile appoggiandosi ai 6 casi già trattati, e però non le tratteremo singolarmente.

Notiamo solo che si può annullare:

a' e b', a' e g', a' e f', a' e c', b' e g', b' e f', b' e c', solo nella iperbole (infatti nei detti casi $C' = -h'^2 < 0$);

a' e h', b' e h' solo nella parabola ($C' = 0$);

f' e g' solo nella ellisse e nella iperbole, dovendo allora l'origine cadere nel centro (cfr. i casi $f' = 0$ e $g' = 0$).

3° Fra i casi in cui si vogliono nulli tre coefficienti, noteremo che si può rendere nulli:

h', f' e g' solo nell'ellisse e nell'iperbole, prendendo per assi due diametri coniugati;

h', f' e c', o h', g' e c' nelle stesse curve, prendendo per asse **OX** (o **OY**) un diametro e per asse **OY** (o **OX**) la tangente in un suo estremo.

4° Fra i casi in cui si vogliano nulli quattro coefficienti, notiamo quelli in cui si annullano:

a', b', f' e g', che è possibile solo nella iperbole, e si risolve prendendo per assi gli asintoti;

a', h', f' e c', o b', h', g' e c', che è possibile solo nella parabola, e si risolve prendendo per asse un diametro e la tangente nella sua estremità.

Equazione riferita al centro.

§ **38**. Dopo aver esposte queste considerazioni generali, passiamo a trattare con tutti gli sviluppi alcuni dei casi testè accennati, cominciando da quello della sparizione dei termini a 1° grado ($f' = 0$ e $g' = 0$) e del termine in XY ($h' = 0$).

Trasportando l'origine nel punto (x', y') senza alterare la direzione degli assi, la $f(x, y) = 0$ diviene (§ 10)

$$[63] \quad aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax' + hy' + g)X + 2(hx' + by' + f)Y + f(x', y') = 0.$$

Si fanno sparire i termini di 1° grado in X e Y, eguagliandone a zero i coefficienti, cioè ponendo

$$[64] \qquad ax' + hy' + g = 0, \quad hx' + by' + f = 0;$$

ma queste due equazioni dànno per x', y' le coordinate del centro (§ 27 5°); adunque basta prendere come nuova origine il centro della curva (fig. 85).

fig. 85

Viceversa, è chiaro che una equazione di 2° grado priva dei termini a 1° grado non si altera mutando di segno ambedue le coordinate, il che implica che l'origine sia un centro.

Quindi è impossibile trasformare la $f(x, y)$ in modo che svaniscano ambedue i termini di 1° grado, quando la curva è una parabola; caso che per ora escludiamo.

Ciò posto, si ha dalla [33]

$$f(x', y') = \frac{\Delta}{C}.$$

Per conseguenza la [63] si riduce a

$$[65] \qquad aX^2 + 2hXY + bY^2 + \frac{\Delta}{C} = 0.$$

Equazione riferita a due diametri coniugati.

§ **39**. Dopo aver privata l'equazione dei termini a 1° grado, sposteremo ora la direzione degli assi intorno al centro; il che si esegue mediante una sostituzione della forma

$$[66] \qquad X = \alpha x + \beta y, \quad Y = \alpha' x + \beta' y,$$

ove α, β, α', β' hanno analoghi significati che nelle [61], e si indicano con x, y le nuove coordinate.

Per effetto di tali sostituzioni la [65] prenderà la forma

$$[67] \qquad a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + \frac{\Delta}{C} = 0,$$

essendo evidente che le sostituzioni [66] non influiscono sul termine noto della [65].

Eseguendo le sostituzioni [66], si ottengono a', b', h' espressi mediante i coefficienti a, b, h della [65] e le quantità α, β, α', β': sicchè, attribuendo a α, β, α', β' valori tali da render nullo h' (*), e poi sostituendoli nelle espressioni di a' e b', si avranno i valori di a' e b' da porre nella [67]; la quale allora prenderà la forma

$$[68] \qquad a'x^2 + b'y^2 + \frac{\Delta}{C} = 0,$$

che dicesi forma *canonica* della $f(x, y)$.

Ma possiamo trovare i richiesti valori di a' e b' senza eseguire i calcoli indicati, mediante la considerazione degli *invarianti*, quando sia dato l'angolo dei novelli assi, che chiameremo Ω.

Noi sappiamo (§ 10) che

$$\frac{I'}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \frac{I}{\operatorname{sen}^2\omega}, \qquad \frac{C'}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \frac{C}{\operatorname{sen}^2\omega},$$

ponendo

$$I' = a' + b' - 2h'\cos\Omega, \qquad C' = a'b' - h'^2.$$

Ora, quando si suppone $h' = 0$, le precedenti eguaglianze dànno

$$a' + b' = \frac{\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^2\omega} I, \qquad a'b' = \frac{\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^2\omega} C \ (^{**}),$$

e fanno conoscere la somma e il prodotto di a' e b'; sicchè a' e b' sono le radici della equazione di 2° grado

$$[69] \qquad \psi^2 - \frac{\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^2\omega} I \,.\, \psi + \frac{\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^2\omega} C = 0,$$

onde

$$[70] \qquad \begin{cases} a' = \frac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\left\{I \pm \sqrt{I^2 - 4\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega} C}\right\}, \\[2ex] b' = \frac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\left\{I \mp \sqrt{I^2 - 4\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega} C}\right\}. \end{cases}$$

(*) Al fatto si trova

$$h' = a\alpha\beta + h(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + b\alpha'\beta' = 0.$$

Si stabilisce così una relazione fra α, β, α', β'; e poichè queste dipendono da due variabili, si potrà ottenere lo scopo desiderato in infiniti modi.

La detta relazione coincide con la [35].

(**) La $\dfrac{\Delta'}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \dfrac{\Delta}{\operatorname{sen}^2\omega}$ darebbe lo stesso che la $\dfrac{C'}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \dfrac{C}{\operatorname{sen}^2\omega}$.

Sui quali valori bisogna fare due osservazioni:

La prima si è che, quando la curva è un'iperbole ($C<0$), la quantità sotto radicale è positiva, e a', b' sono reali, qualunque sia l'angolo dato Ω. Ma quando la curva è una ellisse ($C>0$), allora la quantità positiva senΩ deve essere data abbastanza grande, in modo che la quantità sotto radicale non sia negativa, altrimenti a' e b' risulterebbero immaginarii. Laonde gli estremi valori possibili di senΩ sono quelli che annullano il radicale, ossia

$$\pm 2 \operatorname{sen} \omega \frac{\sqrt{C}}{I}.$$

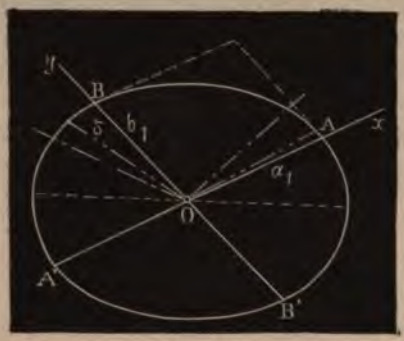


fig. 86

La seconda osservazione riguarda il doppio segno nei valori di a' e b'. Quando l'equazione della curva è ridotta alla forma [68], ad ogni valore dell'una coordinata corrispondono due valori eguali ed opposti dell'altra, e però gli assi delle coordinate sono due diametri coniugati della curva (fig. 86 e 87). Ora ad ogni coppia di diametri coniugati **Ox**, **Oy** inclinati fra loro dell'angolo Ω ne corrisponde un'altra, composta dei diametri rispettivamente simmetrici ai due primi rispetto agli assi della curva; ed è facile vedere che, secondo che si riferisce la curva all'una o all'altra coppia di diametri, bisognerà assumere i segni superiori o gli inferiori innanzi ai radicali in a' e b' (*).

fig. 87

Ciò premesso, bisogna distinguere due casi:

1° Nella ellisse ($C>0$) a' e b' hanno lo stesso segno (§ 5). Scritta la [68] sotto la forma

$$[68]' \qquad \frac{x^2}{\left(-\frac{\Delta}{Ca'}\right)} + \frac{y^2}{\left(-\frac{\Delta}{Cb'}\right)} = 1,$$

(*) Vi è un'altra spiegazione del doppio segno in a' e b', che è d'accordo con la precedente, grazie alla simmetrica posizione delle due coppie di diametri in questione. Presi come assi delle x e delle y due diametri coniugati, si può fare lo scambio e prendere il primo come asse delle y e il 2° come asse delle x, il che equivale a scambiare fra loro i due segni preposti a ciascun radicale.

se l'ellisse è reale, i coefficienti di x^2 e y^2 sono positivi, e si può porre

$$[71] \qquad -\frac{\Delta}{Ca'} = a_1^2, \qquad -\frac{\Delta}{Cb'} = b_1^2,$$

indicando con a_1, b_1 quantità positive; onde la equazione si ridurrà a

$$[72] \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Siccome per $y = 0$ si ha $x = \pm a_1$,
e per $x = 0$ si ha $y = \pm b_1$,

così a_1 e b_1 sono le lunghezze dei due semidiametri **OA** e **OB** (fig. 86) ai quali la curva è riferita, semidiametri inclinati sotto l'angolo Ω.

È facile poi esprimere a_1 e b_1 in funzione dei coefficienti a, b, ... della equazione generale e dell'angolo Ω. Infatti dalle [71] si scorge che, mediante la sostituzione

$$-\frac{\Delta}{C\psi} = \tau \quad \text{ovvero} \quad \psi = -\frac{\Delta}{C\tau},$$

l'equazione [69] si trasforma in una equazione di 2° grado in τ:

$$[73] \qquad \tau^2 + \frac{I\Delta}{C^2}\tau + \frac{\Delta^2}{C^3}\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega} = 0,$$

la quale avrà per radici a_1^2 e b_1^2; e precisamente sarà

$$[73]' \qquad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{\Delta}{2C^2}\left\{-I \pm \sqrt{I^2 - 4\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega}C}\right\} \\[2ex] b_1^2 = \dfrac{\Delta}{2C^2}\left\{-I \mp \sqrt{I^2 - 4\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega}C}\right\}. \end{cases}$$

2° Nella iperbole ($C < 0$), a' e b' hanno segni opposti, e quindi nella [68]' i coefficienti di x^2 e y^2 avranno segni opposti. Se nel valore [70] di a' supponiamo che $\pm$ sia il segno di Δ, sarà $\frac{\Delta}{a'}$ positivo e $\frac{\Delta}{b'}$ negativo; e potremo porre

$$[71]' \qquad a_1^2 = -\frac{\Delta}{Ca'}, \quad b_1^2 = \frac{\Delta}{Cb'},$$

indicando con a_1 e b_1 quantità positive. Allora la [68]' prenderà la forma:

$$[72]' \qquad \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

$$\text{Per } y = 0 \text{ la [72]' dà } x = \pm a_1,$$
$$\text{e per } x = 0 \quad \text{»} \quad y = \pm b_1 i,$$

onde si conferma che di due diametri coniugati l'uno seca l'iperbole in due punti reali **A**, **A'** e l'altro in due punti immaginari.

Se portiamo sul secondo due segmenti **OB**, **OB'** eguali a $\pm b_1$ (fig. 87), e chiamiamo la distanza $\mathbf{BB'} = 2b_1$ *lunghezza* del diametro coniugato al diametro **AA'**, potremo determinare a_1 e b_1 mediante la [73], che avrà per radici a_1^2 e $-b_1^2$, e porgerà

$$[73]'' \qquad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{\Delta}{2C^2}\left\{-I \pm \sqrt{I^2 - 4\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega}C}\right\}, \\ b_1^2 = \dfrac{\Delta}{2C^2}\left\{I \pm \sqrt{I^2 - 4\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega}C}\right\}, \end{cases}$$

ove $\pm$ è il segno di Δ.

§ **40**. Qui è opportuno accennare alcuni teoremi, che scaturiscono immediatamente dalla equazione [73].

1° Si ha dalla [73], per l'ellisse,

$$[74] \qquad a_1^2 + b_1^2 = -\frac{\Delta I}{C^2};$$

il quale risultato, indipendente da Ω, ci dice che *nella ellisse la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati è costante.*

Si ha pure

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{\Delta^2}{C^3} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega},$$

onde

$$[75] \qquad a_1 b_1 \operatorname{sen}\Omega = \pm \frac{\Delta}{C^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen}\omega;$$

dunque *è costante l'area* ($a_1 b_1 \operatorname{sen}\Omega$) *del parallelogrammo costruito sopra due semidiametri coniugati della ellisse.*

Da ultimo notiamo che *nella ellisse esiste una coppia di diametri coniugati eguali* (*equiconiugati*). La loro lunghezza δ e il loro angolo φ si ottengono dalla [73] supponendone nullo il discriminante e ponendo $\tau = \delta$, $\Omega = \varphi$; e quindi si ha (*)

$$\delta = \frac{1}{2C}\sqrt{-2\Delta I}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \pm 2 \operatorname{sen}\omega \frac{\sqrt{C}}{I}.$$

È facile verificare che *i due diametri equiconiugati sono le diagonali di quel rettangolo* (circoscritto alla curva) *che ha gli assi per rette mediane.* E siccome abbiamo dianzi trovato che gli estremi valori possibili di $\operatorname{sen}\Omega$ sono appunto i valori di $\operatorname{sen}\varphi$, così vediamo che *nell'ellisse i diametri equiconiugati son quelli che fanno il minimo angolo acuto* (gli assi fanno il massimo, cioè l'angolo retto).

2° Passiamo all'iperbole. Dalla [73] si deduce

$$[74]' \qquad a_1^2 - b_1^2 = -\frac{\Delta I}{C^2},$$

$$[75]' \qquad a_1 b_1 \operatorname{sen}\Omega = \pm \frac{\Delta}{(-C)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen}\omega;$$

sicchè *nell'iperbole è costante la differenza dei quadrati di due semidiametri coniugati, ed è costante l'area del parallelogrammo costruito sopra due semidiametri coniugati.*

Nell'iperbole ortogonale, essendo $I = 0$ (§ 31) onde $a_1 = b_1$, *ciascun diametro è eguale al coniugato;* il che dà ragione dell'epiteto *equilatera* ad essa attribuito.

Privando la [72]' del termine noto 1, si ha l'equazione

$$[76] \qquad \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 0,$$

che rappresenta due rette

$$\frac{x}{a_1} - \frac{y}{b_1} = 0, \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 0,$$

(*) L'equazione dell'ellisse riferita a questi diametri sarà

$$x^2 + y^2 = \delta^2$$

come quella del circolo riferito a due diametri *ortogonali.*

le quali passano pel centro e sono evidentemente le diagonali del parallelogrammo avente per mediane i due diametri coniugati **AA'**, **BB'**. Ora è facile vedere che le coordinate dei punti comuni a queste diagonali e all'iperbole sono infinite, vale a dire che le dette diagonali sono gli asintoti dell'iperbole (*). Dunque *gli asintoti sono le diagonali di tutti i parallelogrammi aventi per mediane due diametri coniugati.*

È chiaro poi che *nell'iperbole l'angolo acuto di due diametri coniugati può aver tutti i valori, da zero* (per un asintoto) *a un retto* (per gli assi).

Equazione riferita agli assi.

§ **41.** 1° Le precedenti formole relative alla ellisse ed alla iperbole si semplificano se si assumono come assi delle coordinate i due assi della curva, cioè i due diametri coniugati ortogonali.

fig. 88

Infatti, ponendo $\Omega = \frac{\pi}{2}$ e chiamando a_0, b_0 le lunghezze **OA**, **OB** dei semiassi (fig. 88), l'equazione [72] della ellisse prende la forma

$$[77] \qquad \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1,$$

e a_0^2, b_0^2 sono le radici della equazione (**)

$$[78] \qquad \tau^2 + \frac{I\Delta}{C^2}\tau + \frac{\Delta^2}{C^2}\operatorname{sen}^2\omega = 0,$$

cioè

$$[79] \qquad a_0^2 = \frac{\Delta}{2C^2}(-I \pm K), \quad b_0^2 = \frac{\Delta}{2C^2}(I \mp K).$$

(*) Lo stesso risulta, sia dalla [39], sia dal ricordare che per la [34] l'equazione complessiva degli asintoti deve differire da quella dell'iperbole solo nel termine noto, e questo dev'esser nullo ora che l'origine è sugli asintoti.

(**) Le radici di questa equazione sono quelle della [46]' moltiplicate per $-\frac{\Delta}{C^2}\operatorname{sen}^2\omega$, ovvero quelle della [57] moltiplicate per $-\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{C}$.

Si noti che la conica è un'ellisse reale, un'ellisse immaginaria, o un'iperbole (reale) secondochè la equazione [78] o la [73] o la [57] presenta 2, 0, 1 variazione di segno

Potremo supporre sempre preso come asse delle x l'asse maggiore, vale a dire $a_0 > b_0$: allora nelle [79] $\pm$ è il segno di Δ.

E qui notiamo che, essendo K il massimo valore che può assumere il radicale nelle [73]', ne segue che *dei due assi della ellisse l'uno è il massimo e l'altro il minimo fra i diametri.*

Inoltre si ha dalla [78]

$$[80] \qquad \begin{cases} a_0^2 + b_0^2 = -\dfrac{\Delta I}{C^2}, \\[2ex] a_0 b_0 = \pm \dfrac{\Delta}{C^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen} \omega. \end{cases}$$

2° L'equazione [72] dell'iperbole riferita ai proprii assi è

$$[77]' \qquad \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} = 1,$$

ove $2a_0 = \mathbf{AA}'$ è la lunghezza dell'asse (fig. 89) che seca la curva (asse *focale* o *trasverso* o *primo*), e $2b_0 = \mathbf{BB}'$ si chiama la *lunghezza* dell'asse che non seca la curva (asse *immaginario* o *secondo*).

fig. 89

Le a_0^2, b_0^2 sono date dalle

$$[79]' \qquad \begin{cases} a_0^2 = \dfrac{\Delta}{2C^2}(-I \pm K), \\[2ex] b_0^2 = \dfrac{\Delta}{2C^2}(I \pm K), \end{cases}$$

ove $\pm$ è il segno di Δ.

Segue dalle [73]'' e [79]' che *fra i diametri che secano l'iperbole l'asse focale è il minimo, e fra quelli che non secano l'altro asse è il minimo.*

Si ha pure

$$[80]' \qquad \begin{cases} a_0^2 - b_0^2 = -\dfrac{\Delta I}{C^2}, \\[2ex] a_0 b_0 = \pm \dfrac{\Delta}{(-C)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen} \omega. \end{cases}$$

Da ultimo si ha

$$[81] \qquad a_0^2 + b_0^2 = \pm \frac{\Delta K}{C^2};$$

ma il 2° membro fu trovato eguale al quadrato della distanza fra un fuoco e il centro (§ 32, eq. [58]), dunque *nell'iperbole la distanza di un fuoco dal centro è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui i cateti sono i semiassi.*

Altro modo di ottenere l'equazione riferita agli assi.

*§ **42**. A rendere più elementare la riduzione dell'equazione $f(x, y)=0$ quando si prendono per assi delle coordinate gli assi della curva, supponiamo che, dopo aver trasportata l'origine al centro, si mutino (se occorre) le direzioni degli assi delle coordinate in modo che divengano ortogonali (basta mutarne un solo): allora la $f(x, y) = 0$, che già si era ridotta alla forma [65]

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + \frac{\Delta}{C} = 0,$$

conserverà la stessa forma, solo che a, b, h muteranno; e poniamo che essa divenga

$$a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + \frac{\Delta}{C} = 0.$$

Ciò posto, si facciano rotare i due attuali assi di un angolo α intorno al centro; bisognerà mutare X e Y e in $x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha$ e $x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$, e l'equazione diverrà

$$a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + \frac{\Delta}{C} = 0,$$

ove

$$a_1 = a'\cos^2\alpha + 2h'\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + b'\mathrm{sen}^2\alpha,$$

$$b_1 = a'\mathrm{sen}^2\alpha - 2h'\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + b'\cos^2\alpha,$$

$$2h_1 = -2a'\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + 2h'(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) + 2b'\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha.$$

Dalle due prime relazioni si deduce

[82] $$a_1 + b_1 = a' + b',$$

[83] $$a_1 - b_1 = (a' - b')\cos 2\alpha + 2h'\mathrm{sen}\,2\alpha,$$

e dalla terza

[84] $$2h_1 = -(a' - b')\,\mathrm{sen}\,2\alpha + 2h'\cos 2\alpha.$$

Dalle [82], [83], [84] si possono ottenere a_1, b_1, $2h_1$ in funzione dell'angolo arbitrario α.

Volendo che svanisca il termine in xy, bisognerà porre $2h_1 = 0$, ossia

$$-(a' - b') \operatorname{sen} 2\alpha + 2h' \cos 2\alpha = 0,$$

onde

[85] $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2h'}{a' - b'}.$$

Questa formola dà per 2α infiniti valori; e se si chiama $2\alpha_1$ l'angolo positivo e minore di π che ha per tangente $\frac{2h'}{a' - b'}$, tutti i detti angoli saranno compresi nella formola $2\alpha = 2\alpha_1 + k\pi$, onde

$$\alpha = \alpha_1 + k\frac{\pi}{2},$$

ove k è un numero intero positivo o negativo. L'aggiunzione o sottrazione di quattro quadranti non alterando la direzione dei lati di un angolo, potremo limitarci a prendere $k = 0, 1, 2, 3$, ed avremo rispettivamente

$$\alpha = \alpha_1, \quad \alpha_1 + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 + 2\frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 + 3\frac{\pi}{2};$$

avremo cioè due rette perpendicolari fra loro, che dovremo prendere per assi coordinati; ed è indifferente di prendere l'una o l'altra per asse delle x, ed è arbitraria la direzione positiva o negativa su ciascuna, poichè l'equazione non contiene che x^2 e y^2. Se prendiamo per α il valor minimo α_1, avremo per asse delle x positive quella direzione che fa l'angolo minimo α_1.

Dalla [85] si ricava

$$\operatorname{sen} 2\alpha_1 = \frac{2h'}{\pm\sqrt{(a' - b')^2 + 4h'^2}}, \qquad \cos 2\alpha_1 = \frac{a' - b'}{\pm\sqrt{(a' - b')^2 + 4h'^2}},$$

$\pm$ è il segno di h' (poichè $\operatorname{sen} 2\alpha_1 > 0$, essendo $0 < 2\alpha_1 < \pi$). Allora la [83] dà

$$a_1 - b_1 = \frac{(a' - b')^2 + 4h'^2}{\pm\sqrt{(a' - b')^2 + 4h'^2}} = \pm\sqrt{(a' - b')^2 + 4h'^2},$$

e questa combinata con la [82] porge

$$a_1 = \tfrac{1}{2}\left(a' + b' \pm \sqrt{(a' - b')^2 + 4h'^2}\right)$$

$$b_1 = \tfrac{1}{2}\left(a' + b' \mp \sqrt{(a' - b')^2 + 4h'^2}\right);$$

e l'equazione si riduce alla forma canonica

$$a_1x^2 + b_1y^2 + \frac{\Delta}{C} = 0. \qquad [86]$$

Se ora supponiamo che la curva sia una ellisse, e chiamiamo $\pm a_0$ e $\pm b_0$ le parti (reali) che la curva taglia sui proprii assi a partire dal centro, l'ultima equazione darà

$$\text{per } y = 0, \quad a_0^2 = -\frac{\Delta}{Ca_1}; \quad \text{per } x = 0, \quad b_0^2 = -\frac{\Delta}{Cb_1},$$

onde

$$a_1 = -\frac{\Delta}{Ca_0^2}, \quad b_1 = -\frac{\Delta}{Cb_0^2};$$

in conseguenza la equazione [86] si riduce a

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1.$$

Quando poi la curva è una iperbole, basta mutare b_0 in $b_0 i$, e la equazione si riduce a

$$\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} = 1.$$

Iperbole riferita agli asintoti.

§ **43**. Quando la curva è una iperbole, la sua equazione si può ridurre a una forma semplicissima, prendendo per assi delle coordinate gli asintoti (fig. 90).

fig. 90

Infatti è chiaro che allora, l'origine essendo nel centro, l'equazione mancherà dei termini a 1° grado (§ 38), e avrà la forma

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + \frac{\Delta}{C} = 0.$$

Inoltre mancheranno i termini coi quadrati delle coordinate; poichè ponendo $y = 0$ l'equazione deve dare per x due valori infiniti, e

quindi (§ 11) dev'esser nullo il coefficiente di x^2; e similmente ponendo $x=0$ si devono trovare per y due valori infiniti, e quindi dev'esser nullo il coefficiente di y^2. Sicchè l'equazione avrà la forma, bilineare è simmetrica in x e y:

$$[87] \qquad 2h'xy + \frac{\Delta}{C} = 0 \text{ (*)};$$

e si tratta di determinare h' in funzione dei coefficienti della $f(x, y)$.

A tale uopo bisognerebbe applicare alla [65] le sostituzioni [66]:

$$X = \alpha x + \beta y, \qquad Y = \alpha' x + \beta' y,$$

e poi eguagliare a zero i coefficienti di x^2 e y^2, e trovare i conseguenti valori di α, β, α', β'.

Ma possiamo (come pel caso di due diametri coniugati) ottenere h' senza eseguire la trasformazione, mediante le solite proprietà invariantive. Infatti, essendo attualmente $a'=0$ e $b'=0$, sarà

$$I' = -2h'\cos\Omega, \qquad C' = -h'^2,$$

detto Ω l'angolo compreso fra quelle direzioni degli asintoti che si vogliono assumere come positive; quindi le [14] e [15] daranno

$$[88] \qquad \frac{-2h'\cos\Omega}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \frac{I}{\operatorname{sen}^2\omega}, \qquad \frac{-h'^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \frac{C}{\operatorname{sen}^2\omega}.$$

Dividendo la 2ª delle [88] pel quadrato della 1ª si ha

$$[89] \qquad \operatorname{tg}\Omega = \pm \frac{2\sqrt{-C}}{I} \operatorname{sen}\omega,$$

onde

$$[89]' \qquad \cos\Omega = \pm \frac{I}{K},$$

(*) Si può anche dimostrare osservando che l'equazione [34] degli asintoti differisce da quella della curva solo pel termine noto, che deve essere diminuito di $\frac{\Delta}{C}$. Ma attualmente l'equazione degli asintoti è $xy=0$, dunque quella della curva sarà della forma

$$2h'xy + \frac{\Delta}{C} = 0.$$

ciascuna delle quali formole determina l'angolo degli asintoti (*). Fra i segni $+$ e $-$ si sceglierà il segno di I o l'opposto, secondo che si assegnano le direzioni positive sugli asintoti in modo che comprendano un angolo acuto o ottuso.

Dividendo poi la 2ª delle [88] per la 1ª e per la [89]', si trova

$$h' = \pm \frac{2C}{K}.$$

Avuto h', si sostituirà nella [87], che diverrà

[90] $$xy = L^2,$$

posto

[91] $$L^2 = \pm \frac{\Delta K}{4C^2} \text{ (**)},$$

ovvero per la [81]

$$L^2 = \frac{a_0^2 + b_0^2}{4}.$$

Equazione riferita a un diametro e alla tangente nella sua estremità.

§ **44**. Ora esporremo una riduzione della $f(x, y) = 0$, che vale anche per la parabola, anzi è la più semplice e la più usitata riduzione dell'equazione di una parabola.

Prendasi per asse delle X un diametro qualunque, e per asse delle Y la tangente nella sua estremità. Allora ponendo $X = 0$ la [62] deve dare per Y due valori nulli, onde (§ 11) $c' = 0$ e $f' = 0$. Inoltre il diametro coniugato all'asse delle Y, ossia $h'X + b'Y + f' = 0$, deve coincidere con l'asse delle X, onde $h' = 0$ e $f' = 0$.

(*) La [89] conferma che gli asintoti sono perpendicolari quando $I = 0$, vale a dire quando l'iperbole è equilatera (cfr. § 31-1ª).

Quando la $f(x, y) = 0$ *rappresenta due rette, la formola* [89] *dà l'angolo delle due rette,* e queste sono perpendicolari se $I = 0$.

(**) Prendendo per direzioni positive degli asintoti quelle nel cui angolo cade un punto dell'iperbole, risulteranno x e y del medesimo segno per quel punto, onde xy sarà positivo, come anche L^2. Allora nella [91] $\pm$ sarà il segno di Δ. Inoltre risulterà xy positivo per ogni punto della curva, il che conferma che i due rami della curva cadono l'uno in un angolo degli asintoti e l'altro nell'opposto.

Sicchè l'equazione diverrà

$$[92] \qquad a'X^2 + b'Y^2 + 2g'X = 0,$$

nel caso dell'ellisse e dell'iperbole.

Nel caso della parabola, dovendo inoltre la equazione per $Y = 0$ dare un valore di X infinito, sarà anche $a' = 0$, e però l'equazione si ridurrà a

$$[92]' \qquad b'Y^2 + 2g'X = 0.$$

1° Occupiamoci prima della [92] (*); ed osserviamo che per ottenere a', b', g', si potrebbero fare nella $f(x, y)$ le sostituzioni [61], indi eguagliare a zero le espressioni di h', f', c', assegnare in conseguenza dei valori convenienti ai coefficienti delle dette sostituzioni (il che potrà farsi in infiniti modi), e da ultimo determinare a', b', g'. Ma possiamo determinare più presto a', b', g' mercè gl'invarianti, quando è dato l'angolo Ω dei nuovi assi. Infatti le [14], [15], [16] divengono

$$[93] \qquad \frac{a' + b'}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \frac{I}{\operatorname{sen}^2\omega}, \quad \frac{a'b'}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \frac{C}{\operatorname{sen}^2\omega}, \quad \frac{-b'g'^2}{\operatorname{sen}^2\Omega} = \frac{\Delta}{\operatorname{sen}^2\omega}.$$

Le due prime conducono agli stessi valori [70] di a' e b' trovati nel caso di due diametri coniugati. Indi la 3ª fornirà

$$[94] \qquad g' = \pm \frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega} \sqrt{-\frac{\Delta}{b'}}.$$

Sui doppi segni preposti ai radicali contenuti nei valori [70] di a' e b', è da notare che nell'ellisse e nell'iperbole vi sono due coppie di diametri coniugati inclinati fra loro, e quindi anche alle tangenti nei loro estremi, sotto l'angolo Ω; secondochè si sceglie un diametro dell'una o dell'altra coppia come asse delle X, bisognerà adottare i segni superiori o gli inferiori (**).

Quanto poi al doppio segno $\pm$ nell'espressione [94] di g', esso dipende dal fissare come direzione positiva dell'asse delle X quella dal-

(*) Preferiamo trattare direttamente la questione; ma il calcolo sarebbe assai più breve partendo dall'equazione [72] o [72]' della curva riferita al diametro che qui si considera e al suo coniugato.

(**) Nella ellisse si potrà anche dire: secondo che si sceglie l'uno o l'altro diametro di una stessa coppia, poichè amendue secano la curva.

l'origine verso l'interno o verso l'esterno della curva, e sarà quindi facile scegliere nei singoli casi.

Da quanto precede si rileva che l'equazione [92] può scriversi così:

[95] $$Y^2 = 2pX + qX^2,$$

posto

$$2p = -\frac{2g'}{b'}, \quad q = -\frac{a'}{b'}.$$

Nel caso della ellisse dalle [71] si trae subito

$$q = -\frac{b_1^2}{a_1^2};$$

e poi anche

$$p = \left(\mp \frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}\sqrt{Cb_1^2}\right) : \left(-\frac{\Delta}{Cb_1^2}\right) = \pm \frac{\operatorname{sen}\Omega}{\operatorname{sen}\omega}\frac{C^{\frac{3}{2}}}{\Delta} b_1^3,$$

onde eliminando sen Ω mediante la [75],

$$p = \frac{b_1^2}{a_1}.$$

Con questo la [95] diviene

[96] $$Y^2 = 2\frac{b_1^2}{a_1}X - \frac{b_1^2}{a_1^2}X^2$$

nel caso della ellisse. L'asse positivo delle X è diretto verso l'interno, perchè $Y = 0$ dà $X = 2a_1$.

Similmente si ha per la iperbole

[96]' $$Y^2 = 2\frac{b_1^2}{a_1}X + \frac{b_1^2}{a_1^2}X^2.$$

L'asse positivo delle X è diretto verso l'interno, perchè $Y = 0$ dà $X = -2a_1$.

2° Resta a trattare il caso della parabola, l'equazione della quale abbiam ridotta alla forma [92]'. Dovremo porre nelle [93] $a' = 0$ e $C = 0$; allora la 1ª dà

$$b' = \frac{\operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^2\omega} I,$$

la 2ª si riduce a una identità, e la 3ª dà

$$g' = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}.$$

Quindi si vede che l'equazione della parabola, riferita a un diametro e alla tangente nell'estremo di esso (che facciano l'angolo Ω), è

$$[97] \qquad Y^2 = 2pX,$$

posto $2p = -\frac{2g'}{b'}$; e può assumersi

$$[98] \qquad 2p = 2\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\Omega}\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}},$$

dirigendo l'asse positivo delle X verso l'interno della curva.

Il coefficiente $2p$ nelle equazioni [95] e [97] vien chiamato *parametro* corrispondente a quel diametro che si è scelto come asse delle X (*).

§ **45**. In particolare, l'equazione della parabola, riferita al proprio asse (diretto verso l'interno della curva) e alla tangente nel vertice, è

$$[99] \qquad y^2 = 2Px,$$

ove

$$[100] \qquad 2P = 2\operatorname{sen}^2\omega\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

E l'equazione dell'ellisse o dell'iperbole, riferita all'asse (diretto da un vertice verso l'interno) ed alla tangente in quel vertice, è

$$[101] \qquad y^2 = 2\frac{b_0^2}{a_0}x \mp \frac{b_0^2}{a_0^2}x^2.$$

Il coefficiente $2\frac{b_0^2}{a_0}$ nella ellisse e nell'iperbole, e il coefficiente $2P$ nella parabola, si chiama parametro *principale* o *lato retto* della curva.

Riduzione speciale della parabola.

*§ **46**. La riduzione della equazione $f(x, y) = 0$ nel caso della parabola può essere trattata in modo più elementare, come segue:

Cominciamo dal supporre che gli assi primitivi siano ortogonali (se non fossero già tali basterebbe spostarne un solo).

(*) Risulta dalle [96], [96]' e [97] che nell'ellisse Y^2 è minore di $2pX$, nella iperbole maggiore, nella parabola eguale. Questa proprietà fu quella che suggerì i nomi di *ellisse*, *iperbole*, *parabola* (Pappo, *Collectiones mathematicæ*, lib. VII).

Ciò premesso, essendo $C=0$, onde $ab=h^2$, saranno a e b dello stesso segno, e potremo supporli positivi (*) e porre

$$\pm\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}=h,$$

ove $\pm$ è il segno di h.

Allora la $f(x,y)=0$ diverrà (cfr. § 8)

$$[102]\qquad (x\sqrt{a}\pm y\sqrt{b})^2+2gx+2fy+c=0.$$

Ora facciamo rotare gli assi di un angolo φ, compreso fra 0 e π, e tale che sia

$$\operatorname{tg}\varphi=\mp\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \text{onde}\quad \cos\varphi=\mp\sqrt{\frac{b}{a+b}},\quad \operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{a}{a+b}};$$

e trasformiamo le coordinate mediante le sostituzioni

$$x=X\cos\varphi-Y\operatorname{sen}\varphi,\quad y=X\operatorname{sen}\varphi+Y\cos\varphi,$$

onde

$$x=\frac{\mp X\sqrt{b}-Y\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\quad y=\frac{X\sqrt{a}\mp X\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

La [102] diverrà

$$\left\{\frac{\sqrt{a}(\mp X\sqrt{b}-Y\sqrt{a})\pm\sqrt{b}(X\sqrt{a}\mp Y\sqrt{b})}{\sqrt{a+b}}\right\}^2+$$

$$2g\,\frac{\mp X\sqrt{b}-Y\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}+2f\,\frac{X\sqrt{a}\,Y\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}+c=0,$$

ovvero, riducendo il quadrato,

$$(a+b)^{\frac{3}{2}}Y^2+2(\mp g\sqrt{b}+f\sqrt{a})X+2(-g\sqrt{a}\mp f\sqrt{b})Y+c\sqrt{a+b}=0,$$

che indicheremo più brevemente con

$$b_1Y^2+2g_1X+2f_1Y+c_1=0.$$

(*) Uno di essi potrà anche esser nullo, ma non tutti e due; altrimenti, essendo anche $h=0$, la $f(x,y)$ scenderebbe al 1° grado.

Ora trasportiamo l'origine in un punto indeterminato (X', Y') mercè le sostituzioni

$$X = x + X', \quad Y = y + Y',$$

ed avremo

$$b_1 y^2 + 2g_1 x + 2(b_1 Y' + f_1)y + (b_1 Y'^2 + 2g_1 X' + 2f_1 Y' + c_1) = 0.$$

Determiniamo Y' in modo che annulli il coefficiente di y, cioè prendiamo

$$Y' = -\frac{f_1}{b_1};$$

e poi determiniamo anche X' in modo che svanisca il termine costante, cioè poniamo

$$b_1 Y_1'^2 + 2g_1 X' + 2f_1 Y' + c_1 = 0,$$

onde

$$X' = -\frac{(b_1 Y' + f_1) Y' + f_1 Y' + c_1}{2g_1} = -\frac{f_1 Y' + c_1}{2g_1} = -\frac{b_1 c_1 - f_1^2}{2b_1 g_1}.$$

Dopo tutte queste trasformazioni l'equazione si ridurrà a

$$b_1 y^2 + 2g_1 x = 0,$$

ovvero

[103] $$y^2 = 2Px,$$

posto $-\frac{g_1}{b_1} = P$, ovvero

$$P = \frac{\pm g\sqrt{b} - f\sqrt{a}}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}.$$

La [103] rappresenta la parabola riferita all'asse ed alla tangente nel vertice; poichè: 1° essa è riferita a coordinate ortogonali; 2° per ogni valore di x si hanno due valori eguali ed opposti di y; 3° per $x = 0$ si ha $y = 0$.

Esercizii.

§ 47. Chiuderemo la nostra esposizione con una raccolta di esercizii, che proponiamo al lettore. Parecchi di essi non sono che applicazioni ad esempii numerici delle formole più rilevanti fra quelle date nelle pagine precedenti. In altri sono enunciate delle proprietà scelte in guisa, che la dimostrazione ne riesca facile col solo sussidio delle cose innanzi sviluppate. In alcuni è anche indicata una diversa dimostrazione di proprietà già stabilite nel corso della esposizione.

1. Discutere la curva rappresentata dalla equazione

$$5x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 19 = 0 \quad (\text{posto } \omega = 90^\circ).$$

Si ha (cfr. § 3)

$$a = 5, \quad h = 2, \quad b = 1, \quad g = -\tfrac{5}{2}, \quad f = -1, \quad c = -19,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -1 & -19 \end{vmatrix},$$

$$G = -2 + \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}, \quad F = -5 + 5 = 0, \quad C = 5 - 4 = 1,$$

e sviluppando Δ secondo la 3ª linea

$$\Delta = -\tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{1}{2} - 1 \cdot 0 - 19 \cdot 1 = -\tfrac{5}{4} - 19 = -\tfrac{81}{4}.$$

Poichè $C > 0$ e $\Delta a < 0$, la curva è un'ellisse reale (§ 5).
I diametri coniugati agli assi coordinati sono (§ 27 o 29)

$$10x + 4y - 5 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0.$$

Il centro (§ 27 o 29) ha per coordinate $\frac{1}{2}$ e 0, e però è sull'asse delle x.
Attualmente (§§ 10 e 28)

$$I = 5 + 1 = 6, \quad K = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

L'equazione complessiva degli assi è (§ 28, eq. [42])

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 - 2(x - \tfrac{1}{2})y - y^2 = 0:$$

le equazioni separate degli assi medesimi sono

$$2x - 2(1+\sqrt{2})y - 1 = 0, \quad 2x - 2(1-\sqrt{2})y - 1 = 0.$$

Le lunghezze dei semiassi son date dalle formole (§ 41 o 42)

$$a_0^2 = \tfrac{81}{4}(3+2\sqrt{2}), \quad b_0^2 = \tfrac{81}{4}(3-2\sqrt{2})\,;$$

e l'equazione della curva riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{\frac{81}{4}(3+2\sqrt{2})} + \frac{y^2}{\frac{81}{4}(3-2\sqrt{2})} = 1.$$

2. $\qquad 3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + 21 = 0 \ (\omega = 90°).$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 21 \end{vmatrix},$$

$$G = -\tfrac{1}{2}, \quad F = 0, \quad C = -1, \quad \Delta = \tfrac{3}{4} - 21 = -\tfrac{81}{4}.$$

La curva è un'iperbole.
I diametri coniugati agli assi coordinati sono

$$6x + 4y - 3 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0.$$

Il centro è $(\frac{1}{2}, 0)$.
L'equazione complessiva degli asintoti è (§ 27-8°)

$$3x^2 + 4xy + y^2 - 3x - 2y + \tfrac{3}{4} = 0,$$

o anche (§ 28-5°)

$$3(x-\tfrac{1}{2})^2 + 4(x-\tfrac{1}{2})y + y^2 = 0\,;$$

e le equazioni separate sono

$$6x + 2y - 3 = 0, \quad 2x + 2y - 1 = 0.$$

Si ha poi

$$I = 4, \quad K = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}.$$

L'equazione complessiva degli assi è

$$(x-\tfrac{1}{2})^2 - (x-\tfrac{1}{2})y - y^2 = 0,$$

e le loro equazioni separate sono

$$2x - y\left(1 \pm \sqrt{5}\right) - 1 = 0.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{\frac{81}{4}\left(\sqrt{5}+2\right)} - \frac{y^2}{\frac{81}{4}\left(\sqrt{5}-2\right)} = 1,$$

ed agli asintoti (§ 43)

$$xy = \frac{81\sqrt{5}}{8}.$$

3. $\quad 4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 2y - 10 = 0 \quad (\omega = 90°).$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -1 & -10 \end{vmatrix},$$

$$G = \tfrac{1}{2}, \quad F = -1, \quad C = 0, \quad \Delta = -\tfrac{5}{4} + 1 = -\tfrac{1}{4},$$

$$A = -11, \quad B = -\tfrac{185}{4}, \quad I = 5.$$

La curva è una parabola.
L'asse è (§ 28-9°)

$$10x + 5y - 6 = 0.$$

Il vertice (§ 28-9°) ha per coordinate (— 10,96 e 23,12).
Il parametro principale (§ 45 o 46) è $\frac{\sqrt{5}}{25}$.
L'equazione riferita all'asse e al vertice è

$$y^2 = \frac{\sqrt{5}}{25}\, x.$$

4. $\quad 5x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 5 = 0 \quad (\omega = 90°).$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix},$$

$$G = 1, \quad F = -2, \quad C = 1, \quad \Delta = -1 + 5 = 4,$$

$$I = 6, \quad K = 4\sqrt{2}.$$

L'equazione rappresenta un'ellisse immaginaria.
I diametri coniugati agli assi coordinati sono

$$5x + 2y - 1 = 0, \quad 2x + y = 0.$$

Il centro è $(1, -2)$.
L'equazione complessiva degli assi è

$$(x-1)^2 - 2(x-1)(y+2) - (y+2)^2 = 0,$$

e le equazioni separate sono

$$x - (1 \pm \sqrt{2})\, y = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{4(3+2\sqrt{2})} + \frac{y^2}{4(3-2\sqrt{2})} = -1.$$

5. $$3x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 2y = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$G = -\tfrac{1}{2}, \quad F = -\tfrac{3}{4}, \quad C = -\tfrac{1}{4}, \quad \Delta = -\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} = 0.$$

L'equazione rappresenta due rette iperboliche, cioè reali e secantisi nel punto $(2, 3)$.
Le equazioni delle due rette sono (§ 8)

$$3x - 2y = 0, \quad x - y + 1 = 0.$$

6. $$2x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$G = -1, \quad F = -1, \quad C = 1, \quad \Delta = -1 + 1 = 0.$$

L'equazione rappresenta due rette ellittiche, cioè immaginari secantisi nel punto reale $(-1, -1)$. Le loro equazioni sono

$$(1 \pm \sqrt{-1})\, x - y \pm \sqrt{-1} = 0.$$

7. $$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -8 \end{vmatrix},$$

$$G = 0, \quad F = 0, \quad C = 0, \quad \Delta = 0.$$

L'equazione rappresenta due rette paraboliche, cioè parallele e re perchè $A = -9 < 0$.

Le loro equazioni sono (§ 7)

$$x - y - 4 = 0, \quad x - y + 2 = 0.$$

8. $$14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60 \quad (\omega = 90^\circ).$$

$$C = 14 \,.\, 11 - 2^2 = 150, \quad \Delta = cC = -60 \,.\, 150 = -900.$$

La curva è un'ellisse, che ha per centro l'origine.

I diametri coniugati agli assi delle coordinate sono

$$7x - y = 0 \quad \text{e} \quad 2x - 11y = 0.$$

Poichè

$$I = 25, \quad K = 5,$$

l'equazione complessiva degli assi è

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0,$$

e le equazioni separate sono

$$x + 2y = 0, \quad 2x - y = 0.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

9. $$11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156 \quad (\omega = 90°).$$

$$C = -2028, \quad \Delta = 2028 \,.\, 156, \quad I = -13, \quad K = 91.$$

La curva è un'iperbole, che ha per centro l'origine.

L'equazione complessiva degli asintoti si ottiene ponendo zero invece del termine noto 156, e le equazioni degli asintoti sono

$$11x + 2\left(21 \pm 13\sqrt{3}\right)y = 0.$$

L'equazione complessiva degli assi è

$$6x^2 - 5xy - 6y^2 = 0,$$

e le equazioni separate ne sono

$$2x - 3y = 0, \quad 3x + 2y = 0.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1,$$

ed agli asintoti

$$xy = \frac{7}{4}.$$

10. $$(x + y)^2 + 2x = 7 \quad (\omega = 90°).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix},$$

$$G = -1, \quad F = 1, \quad C = 0, \quad \Delta = -1.$$

$$A = -7, \quad B = -8, \quad I = 2.$$

La curva è una parabola.

L'asse è $2x + 2y + 1 = 0$ e il vertice (3,725 e —3,875).

L'equazione riferita all'asse e al vertice è

$$y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

11. $$x^2 + 3xy = 2x$$

rappresenta le due rette reali

$$x = 0, \qquad x + 3y = 2.$$

12. $$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0 \quad (\omega = 90°).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix},$$

$$G = -2, \quad F = \tfrac{1}{2}, \quad C = 2, \quad \Delta = -7 - \tfrac{5}{4} - 6 = -\tfrac{57}{4},$$

$$I = 5, \qquad K = \sqrt{17}.$$

La curva è una ellisse, che ha per centro $(-1, \frac{1}{4})$.

Il punto (1, 1) è sulla curva, e la tangente in esso ha per equazione (§ 13)

$$9x - 5y - 4 = 0.$$

Le equazioni degli assi sono

$$16x + 4(1 \pm \sqrt{17})\,y + (15 \mp \sqrt{17}) = 0.$$

L'equazione riferita al centro è

$$\frac{x^2}{\frac{57}{32}(5 + \sqrt{17})} + \frac{y^2}{\frac{57}{32}(5 - \sqrt{17})} = 1.$$

13. $$xy + 2x - 5y = 0 \quad (\omega = 90°).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$G = -\tfrac{5}{4}, \quad F = \tfrac{1}{2}, \quad C = = \tfrac{1}{4}, \quad \Delta = -\tfrac{5}{4} - \tfrac{5}{4} = -\tfrac{5}{2},$$

$$I = 0, \qquad K = 1.$$

La curva è un'iperbole *equilatera*, che passa per l'origine ed ha per centro il punto $(5, -2)$.

Gli asintoti ne sono

$$x = 5, \qquad y = -2,$$

e gli assi

$$x + y = 3, \qquad x - y = 7.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$x^2 - y^2 = 20,$$

ed agli asintoti

$$xy = 10.$$

14. $\quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0 \quad (\omega = 90^\circ).$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -18 \\ -6 & 9 & 0 \\ -18 & 0 & 100 \end{vmatrix},$$

$$G = 162, \quad F = 108, \quad C = 0, \quad \Delta = -18 \,.\, 162,$$

$$A = 900, \quad B = 76, \quad I = 13.$$

La curva è una parabola, che ha per asse $2x - 3y - \frac{16}{13} = 0$ e per vertice $\left(\frac{4549}{1521}, \frac{4886}{5563}\right)$.

L'equazione riferita all'asse e al vertice è

$$y^2 = \frac{108\sqrt{13}}{169}\, x.$$

15. $\quad 2y^2 + 7xy + 3x^2 - 3y + x = 2 \quad (\omega = 90^\circ).$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix},$$

$$G = -\tfrac{25}{4}, \quad F = \tfrac{25}{4}, \quad C = -\tfrac{25}{4}, \quad \Delta = -\tfrac{25}{8} - \tfrac{75}{8} + \tfrac{25}{2} = 0.$$

L'equazione rappresenta due rette reali e convergenti nel punto

(1, — 1), e le loro equazioni separate sono

$$3x + y - 2 = 0, \qquad x + 2y + 1 = 0.$$

16. $$10x^2 + 6xy + 5y^2 = 10 \quad (\omega = \text{arc}\cos\tfrac{3}{5}).$$

$$C = 50 - 9 = 41, \qquad \Delta = -41 \,.\, 10,$$

$$I = 10 + 5 - 6 \,.\, \tfrac{3}{5} = \tfrac{57}{5}, \quad K = \sqrt{(\tfrac{57}{5})^2 - 4 \,.\, 41 \,.\, (\tfrac{4}{5})^2} = 5.$$

La curva è una ellisse, che ha per centro l'origine.
L'equazione complessiva degli assi è

$$3x^2 - 5xy = 0,$$

e le equazioni separate sono

$$x = 0, \qquad 3x - 5y = 0.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{32}{41}} = 1.$$

17. $$x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0 \quad (\omega = 60^\circ).$$

$$C = 1 - \tfrac{9}{4} = -\tfrac{5}{4}, \qquad \Delta = -\tfrac{5}{4},$$

$$I = 1 + 1 + 3\cos 60^\circ = \tfrac{7}{2}, \quad K = \sqrt{\tfrac{49}{4} + 4 \,.\, \tfrac{5}{4} \,.\, \tfrac{3}{4}} = 4.$$

La curva è un'iperbole, che ha per centro l'origine.
Gli asintoti ne sono

$$2x - (3 \pm \sqrt{5})\, y = 0,$$

e gli assi

$$x \mp y = 0.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1,$$

ed agli asintoti

$$xy = \tfrac{4}{5}.$$

18. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = 0 \quad (\omega = 90°)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 11 \\ 12 & 16 & 23 \\ 11 & 23 & 9 \end{vmatrix},$$

$$G = 100, \quad F = -75, \quad C = 0, \quad \Delta = 11 \,.\, 100 - 23 \,.\, 75 = -625,$$

$$A = -385, \quad B = -40, \quad I = 25.$$

La curva è una parabola, che ha per asse $3x + 4y + 5 = 0$ e per vertice $(-18{,}8$ e $0{,}16)$.

L'equazione riferita all'asse e al vertice è

$$y^2 = \tfrac{2}{5}\, x.$$

19. $$2x^2 - 5xy + 5y^2 = 1 \quad (\omega = 90°).$$

$$C = 10 - \tfrac{25}{4} = \tfrac{15}{4}, \quad \Delta = -\tfrac{15}{4},$$

$$I = 7, \quad K = \sqrt{34}.$$

La curva è un'ellisse, che ha per centro l'origine, e per assi

$$5x - \left(3 \pm \sqrt{34}\right) y = 0.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{\frac{2}{15}\left(7 + \sqrt{34}\right)} + \frac{y^2}{\frac{2}{15}\left(7 - \sqrt{34}\right)} = 1.$$

20. $$2x^2 - 5xy + 5y = 1 \quad (\omega = 90°).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 \end{vmatrix},$$

$$G = -\tfrac{25}{4}, \quad F = -5, \quad C = -\tfrac{25}{4}, \quad \Delta = -\tfrac{25}{2} + \tfrac{25}{4} = -\tfrac{25}{4},$$

$$I = 2, \quad K = \sqrt{29}.$$

La curva è un'iperbole, che ha per centro $(1, \frac{4}{5})$, per asintoti

$$x = 1 \quad \text{e} \quad 2x - 5y + 2 = 0,$$

e per assi

$$25x + 5\left(2 \pm \sqrt{29}\right) y = 33 \pm 4\sqrt{29}.$$

L'equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{\frac{2}{25}\left(\sqrt{29}+2\right)} - \frac{y^2}{\frac{2}{25}\left(\sqrt{29}-2\right)} = 1,$$

ed agli asintoti

$$xy = \frac{\sqrt{29}}{25}.$$

21. $\quad 2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0 \quad (\omega = 90°).$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \end{vmatrix},$$

$$G = \tfrac{15}{4}, \quad F = \tfrac{25}{4}, \quad C = \tfrac{15}{4}, \quad \Delta = \tfrac{15}{8} - \tfrac{35 \cdot 5}{8} + \tfrac{15}{4} = -\tfrac{65}{4},$$

$$I = 5, \quad K = \sqrt{10}.$$

La curva è un'ellisse, che ha per centro $(1, \frac{5}{3})$, e per assi

$$9x - 3\left(1 \pm \sqrt{10}\right) y = 14 \pm 5\sqrt{10}.$$

22. $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{2xy}{ab} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b} + 1 = 0.$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & -\frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{ab} & \frac{1}{b^2} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix},$$

$$G = \frac{2}{ab^2}, \quad F = \frac{2}{a^2 b}, \quad C = 0, \quad \Delta = -\frac{2}{a^2 b^2} - \frac{2}{a^2 b^2} = -\frac{4}{a^2 b^2},$$

$$A = 0, \quad B = 0, \quad I = \frac{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega}{a^2 b^2}.$$

La curva è una parabola, che ha per asse

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega} = 0$$

e per vertice

$$\frac{ab^2(a\cos\omega + b)^2}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^2}, \quad \frac{a^2b(a + b\cos\omega)^2}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^2}$$

e tocca gli assi delle coordinate alle distanze a e b dall'origine.

L'equazione riferita all'asse e al vertice è

$$y^2 = \frac{4a^2b^2\operatorname{sen}^2\omega}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}\, x.$$

23. Esaminare i luoghi rappresentati dalle seguenti equazioni:

$$(x + y - 5)^2 + (2x - 3y - 1)^2 = 3,$$

$$(3x - 2y + 1)^2 + (4x + y - 3)^2 = 0,$$

$$(3y - 2x - 5)\,(2y + 3x + 1) = 2,$$

$$(5y - 2x)^2 = 3x - y,$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

24. Il punto comune a due rette $\lambda x + \mu y + \nu = 0$, $\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0$ è esterno o interno o sulla conica $f(x, y) = 0$, secondochè

$$\Delta \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda & \lambda' & a & h & g \\ \mu & \mu' & h & b & f \\ \nu & \nu' & g & f & c \end{vmatrix} \lesseqgtr 0,$$

25. L'equazione dei due punti comuni alla retta (u', v') ed alla conica $f(x, y) = 0$ è

$$F(u', v') \,.\, F(u, v) - (Au'u + \ldots + C)^2 = 0.$$

26. L'equazione delle tangenti alla conica $f(x, y) = 0$ nei suoi punti d'incontro con la retta (u, v) è

$$F(u, v) \,.\, f(x, y) + \Delta(ux + vy + 1)^2 = 0.$$

Questa è anche l'equazione dei punti di contatto delle tangenti dal punto (x, y).

27. Luogo dei punti medii delle *corde* tirate a una conica da un punto dato (NEWTON, *Principia*, I).

28. Dimostrare (mediante l'equazione polare [47] della curva), che se l'origine è sulla curva, la tangente nell'origine è $gx + fy = 0$, e dedurne (per mezzo di una trasformazione di coordinate) l'equazione della tangente in un punto qualunque (x', y').

29. L'equazione complessiva degli assi della conica $f(x, y) = 0$ può ricevere anche la forma

$$\frac{\left(x - \frac{G}{C}\right) + \left(y - \frac{F}{C}\right)\cos\omega}{ax + hy + g} = \frac{\left(x - \frac{G}{C}\right)\cos\omega + \left(y - \frac{F}{C}\right)}{hx + by + f}.$$

30. Il prodotto dei rapporti, secondo cui i successivi lati di un poligono sono divisi da una conica, è l'unità (CARNOT, *Géom. de position*, 235).

31. Dal § 30-3°-4°, dedurre l'equazione della conica riferita a un diametro e alla tangente nel suo estremo, o a due diametri coniugati.

32. L'equazione dei punti ciclici (in coordinate plückeriane) è

$$u^2 - 2uv\cos\omega + v^2 = 0.$$

33. Gli angoli di una retta reale con le rette che vanno da un punto reale ai punti ciclici hanno per tangente $\pm\sqrt{-1}$.

34. L'angolo di due rette moltiplicato per $2\sqrt{-1}$ è il logaritmo del rapporto anarmonico delle due rette con le due che vanno dal vertice ai punti ciclici (LAGUERRE, *Nouv. Ann.*, 1853).

Questa importante proprietà riduce le relazioni metriche angolari a relazioni proiettive.

35. Le coordinate dei vertici di una ellisse o iperbole (l'origine al centro) si possono calcolare mediante la [42] e la [65] combinate con la $X^2 + 2XY\cos\omega + Y^2 = \frac{\Delta}{2C^2}(-I \pm K)$ che si deduce dalle [79]. Si ha linearmente

$$X^2 = \frac{\Delta}{2C^2}\left(-b \pm \frac{bI - 2C}{K}\right), \qquad Y^2 = \frac{\Delta}{2C^2}\left(-a \pm \frac{aI - 2C}{K}\right),$$

$$XY = \frac{\Delta}{2C^2}\left(h \pm \frac{hI - 2C\cos\omega}{K}\right),$$

e anche

$$X^4 + \frac{\Delta b}{C^2}X^2 + \frac{\Delta^2}{C^3K^2}(b\cos\omega - h)^2 = 0,$$

$$Y^4 + \frac{\Delta a}{C^2}Y^2 + \frac{\Delta^2}{C^3K^2}(a\cos\omega - h)^2 = 0.$$

36. Se l'ellisse o l'iperbole è riferita a due diametri coniugati, le cui lunghezze siano $2a$ e $2b$, sarà la sua equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

e l'equazione della polare o della tangente relativa al punto (x', y')

$$\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1;$$

e la condizione perchè la retta $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ tocchi la curva

$$a^2\lambda^2 \pm b^2\mu^2 = \nu^2,$$

ovvero l'equazione tangenziale della curva

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = 1;$$

e le equazioni delle tangenti parallele alla retta $\lambda x + \mu y = 0$

$$\lambda x + \mu y = \pm\sqrt{a^2\lambda^2 + b^2\mu^2}.$$

37. Se la parabola è riferita a un diametro e alla tangente nella sua estremità, detto $2p$ il parametro corrispondente a quel diametro, l'equazione della curva sarà

$$y^2 = 2px;$$

e l'equazione della polare o della tangente

$$y'y = p(x + x');$$

e la condizione perchè una retta $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ tocchi la curva

$$p\mu^2 = 2\lambda\nu,$$

ovvero l'equazione tangenziale della curva

$$v^2 = \frac{2}{p}\, u;$$

e l'equazione della tangente parallela alla retta $\lambda x + \mu y = 0$

$$\lambda x + \mu y + \frac{p\mu^2}{2\lambda} = 0.$$

38. Ogni parallelogrammo iscritto in una conica a centro ha i lati paralleli a una coppia di diametri coniugati che ne sono le linee mediane, e può avere per diagonali un'altra coppia di diametri coniugati. Un parallelogrammo circoscritto gode della seconda proprietà, ma può non godere della prima.

Ad ogni coppia di diametri coniugati corrispondono infiniti parallelogrammi iscritti coi lati paralleli ad essi, ed un solo circoscritto. Ad ogni coppia di diametri coniugati come diagonali corrisponde un sol parallelogrammo iscritto e infiniti circoscritti.

Fra i parallelogrammi iscritti vi ha infiniti rettangoli (che hanno i lati paralleli agli assi), e fra i circoscritti anche infiniti (tra cui un solo ha i lati paralleli agli assi). Fra gli iscritti vi ha pure infiniti rombi (di cui uno ha per diagonali gli assi), e fra i circoscritti infiniti.

39. Il luogo dei punti tali, che le tangenti da essi condotte alla ellisse o all'iperbole sieno ortogonali, è un circolo concentrico alla curva e di raggio $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ (sicchè nell'iperbole è immaginario quando $a<b$). Nella parabola il luogo è la direttrice (Delahire, *Con.*, VIII).

Poichè nelle coniche a centro le equazioni di due tangenti ortogonali

$$\lambda x + \mu y = \sqrt{a^2\lambda^2 \pm b^2\mu^2}, \quad \mu x - \lambda y = \sqrt{a^2\mu^2 \pm b^2\lambda^2},$$

quadrate e sommate dànno

$$x^2 + y^2 = a^2 \pm b^2;$$

e nella parabola le analoghe

$$\lambda x + \mu y + \frac{p\mu^2}{2\lambda} = 0, \qquad \mu x - \lambda y + \frac{p\lambda^2}{2\mu} = 0,$$

eliminata y, dànno $x = -\frac{p}{2}$.

Si potrebbe invece calcolare l'angolo delle due tangenti da un punto, e poi supporre l'angolo retto (o solo costante).

40. Se

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è l'equazione di una ellisse o iperbole riferita a due diametri coniugati, allora dette (x', y'), (x'', y'') le coordinate degli estremi di due diametri coniugati, si ha

$$\frac{x'^2}{a^2} = \pm \frac{y''^2}{b^2}, \quad \frac{x''^2}{a^2} = \pm \frac{y'^2}{b^2} \quad \text{(Chasles, } Ap.\ hist.\text{)},$$

$$x'^2 + x''^2 = a^2, \quad y'^2 + y''^2 = \pm b^2.$$

Se poi la curva è riferita agli assi, dette $2a_1$, $2b_1$ le lunghezze degli stessi due diametri, e posto

$$c = \sqrt{a^2 \mp b^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}},$$

($a > b$ per l'ellisse); si ha

$$a_1^2 = \pm b^2 + e^2 x'^2, \quad \pm b_1^2 = a^2 - e^2 x'^2,$$

onde: è costante la somma o differenza dei quadrati di due diametri coniugati (Apollonio, *Con.*, VII).

La distanza fra il centro e la tangente nel punto (x', y') è $\frac{ab}{b_1}$, e l'angolo fra i due diametri coniugati ha per seno $\frac{ab}{a_1 b_1}$; onde: è costante l'area del parallelogrammo che ha per due lati due semidiametri coniugati (Apollonio, VII).

41. Nelle stesse ipotesi, la normale nel punto $P'(x', y')$ ha l'equazione

$$\frac{a^2 x}{x'} \mp \frac{b^2 y}{y'} = c^2;$$

essa divide l'ascissa del punto **P'** nel rapporto costante $\pm \frac{c^2}{b^2}$; e detti **N**, **N'** i punti ove seca gli assi, si ha

$$\mathbf{P'N} = \frac{bb_1}{a}, \qquad \mathbf{P'N'} = \frac{ab_1}{b}, \qquad \mathbf{P'N} \,.\, \mathbf{P'N'} = b_1^2,$$

e risulta costante ($=b^2$ o a^2) il prodotto di **P'N** o **P'N'** per la distanza fra il centro e la tangente in **P'** (CHASLES, *Ap. hist.*).

42. L'ellisse è in omologia col circolo descritto sopra un suo asse, rispetto a questo asse e al punto all'infinito sull'altro asse.

Sviluppare le conseguenze di questa omologia (ARCHIMEDE, *Con. et Sph.*, V).

In particolare, a due diametri coniugati dell'ellisse corrispondono due diametri ortogonali del circolo.

Se $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ è l'equazione dell'ellisse riferita agli assi, e φ l'angolo di **ox** col raggio vettore del punto omologo di (x, y), si possono esprimere x e y in funzione della variabile φ (*anomalia eccentrica* di KEPLERO) mediante le relazioni

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \operatorname{sen} \varphi;$$

Per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ si ha

$$x^2 = a \sec \psi, \quad y = b \operatorname{tg} \psi,$$

ψ essendo un angolo variabile.

43. Per la conica $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ riferita ai suoi assi, le equazioni delle due coppie di diametri coniugati formanti l'angolo Ω sono

$$a^2y^2 \mp b^2x^2 \pm xy\sqrt{c^4 \operatorname{tg}^2\Omega \mp 4a^2b^2} = 0,$$

e le equazioni di quelle coppie di diametri che fanno coi rispettivi coniugati l'angolo Ω sono

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 \pm c^2 \operatorname{tg} \Omega \,.\, xy = 0.$$

Quando la conica è riferita a due diametri qualunque, l'ultima equazione diviene

$$\operatorname{sen}\omega(ax^2 + 2hxy + by^2)$$

$$\pm \operatorname{tg} \Omega \left\{ (a\cos\omega - h)x^2 + (a - b)xy - (b\cos\omega - h)y^2 \right\} = 0.$$

L'equazione dei diametri equiconiugati allora è

$$I(ax^2 + 2hxy + by^2) - 2C(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2) = 0.$$

44. Equazione polare della conica riferita al centro.

45. Un diametro dell'ellisse, girando intorno al centro, decresce continuamente dall'asse maggiore al minore. Nell'iperbole cresce dall'asse trasverso a un asintoto, per cui è infinito; e poi diviene immaginario.

46. La differenza fra due diametri coniugati è minore di quella fra gli assi.

47. È costante la somma dei quadrati delle inverse di due diametri ortogonali, e vale $-\frac{IC}{\Delta \operatorname{sen}^2\omega}$ (PLÜCKER, *Entwickelungen*, II).

48. È costante il prodotto dei segmenti che una tangente mobile (o una coppia di diametri coniugati) taglia da due tangenti parallele fisse (APOLLONIO, III).

49. È costante il prodotto dei segmenti che due tangenti parallele (o due diametri coniugati) variabili tagliano da una tangente fissa.

50. Il valore di $f(x, y)$ differisce pel fattore costante $-\frac{\Delta}{C}$ dal rapporto del quadrato di una tangente condotta dal punto (x, y) al quadrato del semidiametro parallelo.

Nella parabola $f(x, y)$ differisce pel fattore $-\sqrt{-\frac{\Delta}{I}}$ dal rapporto del segmento di diametro fra il punto (x, y) e la curva al parametro relativo al diametro.

51. I due segmenti, che una iperbole e i suoi asintoti intercettano su qualunque trasversale, hanno lo stesso punto medio.

In particolare, la parte di una tangente all'iperbole compresa fra gli asintoti è bisecata dal punto di contatto (APOLLONIO, II).

52. Il triangolo formato dagli asintoti con qualunque tangente è di area costante (APOLLONIO, III).

53. Ogni parallelogrammo, che abbia due vertici opposti sull'iperbole e i lati paralleli agli asintoti, ha una diagonale diretta al centro.

54. Le rette che uniscono due punti fissi dell'iperbole a un punto mobile di essa, determinano su un asintoto un segmento costante (BRIANCHON).

55. La parte di un diametro di parabola che è compresa fra le corde ad esso coniugate condotte per due punti qualunque, è eguale alla parte compresa fra le polari dei due punti.

56. Nella parabola la tangente e la normale in un punto fanno con l'asse un triangolo: le proiezioni dei due primi lati sul terzo sono, l'una bisecata dal vertice (APOLLONIO, I), l'altra costantemente eguale al semiparametro.

57. Nella parabola i parametri corrispondenti ai singoli diametri sono in ragione inversa dei quadrati dei seni delle inclinazioni dei diametri alle rispettive corde coniugate.

58. Se $2a$ e $2b$ sono gli assi di una ellisse o di una iperbole, sarà $c = \sqrt{a^2 \mp b^2}$ la distanza di un fuoco dal centro, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}}$ l'eccentricità, $\frac{a^2}{c}$ la distanza tra il centro e una direttrice.

I raggi focali relativi a un punto (x, y) della curva riferita ai propri assi, sono

$$a + ex, \quad a - ex \text{ nell'ellisse,}$$

$$\pm (a + ex), \mp (a - ex) \text{ nell'iperbole}$$

(se $\pm$ è il segno di x); onde è costante la somma o differenza dei raggi focali (APOLLONIO, III), mentre il prodotto dei due raggi focali è il quadrato del semidiametro b_1 coniugato di quello che va al punto (x, y).

59. Le distanze dei fuochi dalla tangente in (x, y) stanno ai raggi focali nel rapporto $b : b_1$; onde segue che il prodotto delle due distanze è costante (KEILL, *Philos. Trans.*, 1709), e che la tangente fa angoli eguali coi raggi focali (APOLLONIO, III).

60. Nella parabola la distanza tra il fuoco e il vertice, e quella

fra il vertice e la direttrice, sono eguali alla quarta parte del parametro principale.

61. Il parametro principale di una qualunque conica misura la corda condotta pel fuoco perpendicolarmente all'asse.

62. La podaria di un fuoco si può ottenere quadrando e sommando l'equazione $\lambda x + \mu y = \pm \sqrt{a^2\lambda^2 + b^2\mu^2}$ di una tangente e quella della perpendicolare tiratale dal fuoco $\mu x - \lambda y = \pm \mu c$, e si trova il circolo $x^2 + y^2 = a^2$ descritto sull'asse focale. Nella parabola si trova la tangente al vertice.

63. Equazione polare della conica riferita al fuoco (Keplero).

64. Sono costanti: la media armonica fra i due segmenti di una corda focale, il rapporto di tutta la corda al quadrato del diametro parallelo, la somma di due corde focali parallele a due diametri coniugati, la somma delle inverse di due corde focali ortogonali.

65. Le due tangenti da un punto qualunque fanno angoli eguali coi raggi focali del punto (Poncelet, *Propr. proj.*, 478).

66. L'angolo dei raggi focali diretti ai termini di una corda è bisecato dalla retta che va al polo della corda (Delahire).

67. È costante l'angolo dei raggi focali diretti ai punti ove una tangente mobile seca due tangenti fisse (Poncelet, 464).

68. Nell'iperbole la distanza tra un fuoco e un asintoto è eguale al semiasse secondario.

69. La distanza di un punto dell'iperbole da un fuoco è eguale alla distanza dalla direttrice, contata parallelamente a un asintoto.

70. Le tangenti a una conica dai suoi fuochi sono dirette ai punti ciclici del suo piano. Quindi i fuochi (reali e immaginarii) di una conica sono quattro vertici del quadrilatero completo formato dalle coppie di tangenti (immaginarie) condotte alla conica dai due punti ciclici del suo piano (Poncelet, 457; Plücker, II), e gli assi sono due diagonali dello stesso quadrilatero.

I due fuochi immaginarii di una parabola sono i punti ciclici del suo piano.

71. Ogni circolo che passi pei fuochi reali determina sulle tangenti nei vertici un rettangolo le cui diagonali toccano la conica (APOLLONIO, III).

72. Il parametro corrispondente a un diametro della parabola è quadruplo della distanza fra il punto estremo del diametro e il fuoco.

73. L'angolo fra due tangenti della parabola è metà dell'angolo fra i raggi focali dei punti di contatto (PONCELET, 465).

74. Il circolo circoscritto al triangolo di tre tangenti della parabola passa pel fuoco (LAMBERT, *Orbitae cometarum*, I).

Le altezze dello stesso triangolo si secano sulla direttrice (STEINER, *Ann. Gerg.*, XIX). L'area del triangolo è metà di quella del triangolo dei punti di contatto (GREGORY, *Cambridge math. Journ.*, II).

75. Luogo dei centri delle coniche che passano per quattro punti dati o toccano quattro rette date (NEWTON, I).

Luogo dei poli di una retta data. Inviluppo delle polari di un punto dato.

76. Un'iperbole equilatera è individuata da quattro punti. Per tre punti dati passa un fascio di iperboli equilatere. Il quarto punto comune è l'incontro delle altezze del triangolo dei tre punti dati (BRIANCHON, PONCELET, *Ann. Gerg.*, XI). Il luogo dei centri è il circolo che passa pei punti medii dei lati del triangolo, pei piedi delle altezze, ecc. (MAGNUS, *Aufgaben*, etc., I).

77. Se $r=0$, $r'=0$, $r''=0$ sono le equazioni dei lati di un triangolo autoconiugato, l'equazione della conica può ridursi alla forma (*canonica*)

$$\alpha r^2 + \alpha' r'^2 + \alpha'' r''^2 = 0,$$

e viceversa.

78. I vertici di due triangoli autoconiugati rispetto a una conica sono su una conica, e i lati toccano una conica (STEINER).

79. Il circolo circoscritto a un triangolo autoconiugato rispetto a un'iperbole equilatera passa pel centro di questa; e una delle parabole iscritte nel detto triangolo ha per fuoco il centro.

80. Vi sono ∞ coniche confocali a una data. Esse sono iscritte in uno stesso quadrilatero (immaginario).

Se la conica data è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sarà $\frac{x^2}{a^2+\rho} + \frac{y^2}{b^2+\rho} = 1$ una delle confocali.

Se la data è $f(u, v) = 0$, sarà $f(u, v) + \rho(u^2 - 2uv\cos\omega + v^2) = 0$ una delle confocali.

Per ogni punto passano due coniche confocali di specie diversa, e si tagliano ortogonalmente.

81. Due coniche a centro sono simili e similmente poste (omotetiche), quando i coefficienti dei termini a 2° grado nelle loro equazioni cartesiane sono proporzionali, ossia quando gli asintoti sono paralleli. E due parabole simili sono eguali (congruenti) (ARCHIMEDE, *Con. et sph.*; APOLLONIO, VI).

Cenni storici.

§ **48**. Noi siamo stati assai parchi di citazioni storiche, salvo che negli esercizi del paragrafo precedente. Stimiamo quindi utile aggiungere alcune sommarie indicazioni, attinte al classico *Aperçu historique* ecc. del compianto CHASLES, alla recentissima *Analytische Geometrie* del BALTZER, e altrove.

In APOLLONIO PERGEO (*Conica*, 247 a. Cr.) si trovano: le denominazioni *ellisse*, *iperbole*, *parabola*, *lato trasverso* (l'asse focale), *lato retto*, *diametro*, *diametro coniugato*, *iperbole equilatera;* le più cospicue proprietà dei diametri coniugati e dei raggi focali; il fondamento della teoria dei poli e polari; gli asintoti come diagonali dei parallelogrammi costruiti su semidiametri coniugati.

PAPPO (*Collect. math.*, VII) reca la proprietà del rapporto costante fra le distanze dei punti della conica dal fuoco e dalla direttrice.

DESARGUES (*Brouillon-projet* etc., 1639) introdusse i nomi *parametro*, *fuoco*, *involuzione;* considerò gli elementi all'infinito; trattò gli asintoti come tangenti; stabilì l'involuzione delle coppie di punti coniugati su una retta; assimilò una coppia di rette a una conica; scoprì il triangolo autoconiugato per tutte le coniche di un fascio o schiera.

Keplero usò la denominazione: *eccentricità*.

Delahire (*Sectiones conicae* etc., II, 1685) introdusse il nome *direttrice;* osservò che gli asintoti sono in armonia con due diametri coniugati; studiò i fuochi dal punto di vista da noi adottato (§ 32).

Carnot (*De la corrélation* etc., 1801) diede la nozione di quadrilatero completo.

Servois (*Annales de Gergonne*, 1811) e Gergonne (*Ann.*, 1813) usarono rispettivamente i nomi *polo* e *polare*. Il secondo formulò la legge di dualità (*Ann.* XVI), e il concetto di *classe* (XVIII).

Poncelet (*Traité des propriétés projectives* etc., 232) stabilì il metodo delle polari-reciproche. Egli considerò i due fuochi immaginari (470) e i punti ciclici (94).

Plücker diede una base analitica alla legge di dualità mercè le coordinate della retta (*Entwickelungen* etc., II). Egli provò l'omologia di due triangoli coniugati (*Journ. Crelle*, V).

Hesse (*ib.*, XXII) introdusse la denominazione di *punti coniugati*.

Infine ci corre l'obbligo di avvertire che il teorema del § 30 lo abbiamo denominato da Newton che lo enunciò per le curve di grado qualunque (*Enumeratio* etc., II); ma pel caso delle coniche era già in Apollonio (III).

FINE.

LE PROPRIETÀ FONDAMENTALI

DELLE

SUPERFICIE DI SECOND'ORDINE

LE PROPRIETÀ FONDAMENTALI

DELLE

SUPERFICIE DI SECOND'ORDINE

STUDIATE SULLA EQUAZIONE GENERALE DI SECONDO GRADO

IN COORDINATE CARTESIANE

Lezioni date nella Regia Università di Torino

DAL PROFESSORE

ENRICO D'OVIDIO

TORINO

ERMANNO LOESCHER

1883

Roma e Firenze presso la stessa Casa.

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Tip. V. BONA, via Ospedale, 3.

PREFAZIONE

Quando pubblicai l'opuscolo « *Le proprietà fondamentali delle curve di 2° ordine studiate sulla equazione generale di 2° grado in coordinate cartesiane* » (*), mi venne da molti espresso il desiderio, che io ponessi mano ad un'analoga pubblicazione sulla teoria delle superficie di 2° ordine. Mi si faceva riflettere, ed io stesso riconosceva, come fosse questo un argomento più ampio e più difficile, e tuttavia meno sviluppato nei trattati e nelle lezioni orali; onde più utile ne sarebbe certo riuscita per i giovani studiosi una esposizione elementare, ma pure informata allo spirito dei moderni metodi geometrici ed algebrici, simile a quella di cui avevo dato un saggio per le curve di 2° ordine.

Attratto intanto da altri studii, io non ebbi agio di dedicarmi senza interruzione al paziente lavoro che esige la composizione di un libro didattico; ma recentemente, avendo dovuto curare la 2ª edizione del citato opuscolo (**), risolsi di troncare gl'indugi.

A chi conosce l'opuscolo sulle curve di 2° ordine, io non ho bisogno di spiegare lo scopo del presente, che tanto a quello è affine nella sostanza e nella forma. Ho avuto in mira di esporre la discussione della equazione generale di 2° grado fra tre coordinate cartesiane, e la riduzione della equazione medesima alle forme più semplici ed usitate, assegnando anche le principali proprietà delle singole superficie da quella equazione rappresentate; ma senza estendermi a trattare dei sistemi di due o più superficie, salvo qualche caso particolare.

(*) Torino, Loescher, 1876.

(**) Torino, Loescher, 1883. Talora citerò questa 2ª edizione indicandola brevemente con *Con.* (Coniche).

Questa volta, dirigendomi a un lettore più esperto, ho stimato opportuno di fare uso frequente delle coordinate Plückeriane dei piani, e d'introdurre l'omogeneità nelle formole, indicando le coordinate sia di punti sia di piani mediante i rapporti di tre variabili a una quarta. Ho anche adottato la notazione a doppio indice pei coefficienti dell'equazione di 2° grado, a fine di rendere le formole più simmetriche ed espressive e facili a ricordare (*).

Una raccolta di esercizii (applicazioni numeriche, teoremi da dimostrare, ecc.), ed alcuni cenni storici chiudono la esposizione.

È superfluo avvertire che il mio modesto volumetto non ha la pretensione di sostituire, neanche in parte, i pregevoli trattati del SALMON, dell'HESSE, del BALTZER, ecc. (**); come del resto nessuno di questi potrebbe sostituire gli altri. Sarò anzi pienamente pago dell'opera mia, se la lettura di queste pagine contribuirà a render più facile e più proficuo ai nostri giovani lo studio di quei classici trattati e delle importanti Memorie originali, di cui è ricca la Geometria delle superficie di 2° ordine.

Mi è grato da ultimo esprimere un sincero ringraziamento al signor Dr F. GERBALDI già mio assistente, pel valido aiuto prestatomi durante la preparazione e la stampa del presente lavoro.

Torino, aprile 1883.

(*) I paragrafi segnati con asterisco possono esser tralasciati in una prima lettura.

(**) SALMON, *A Treatise on the analytic Geometry of three dimensions.* — SALMON, *Analytische Geometrie des Raumes bearbeitet* von FIEDLER. — HESSE, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes.* — BALTZER, *Analytische Geometrie.*

INDICE DELLE MATERIE

Prime nozioni sulle quadriche	§§ 1 e 2	*pag.* 1
Formole fondamentali	3 4 *5	8
Invarianti	6	16
Rette e piani secanti o tangenti. Rette della quadrica	7	22
Punti coniugati, poli e piani polari, rette coniugate	8	28
Casi in cui la quadrica è un cono, o un cilindro, o una coppia di piani	9	31
Polo di un piano. La quadrica come inviluppo	10	34
Cenno sulle figure polari-reciproche	11	37
Piani tangenti, piani coniugati	12	39
Ancora delle rette tangenti o secanti	13 *14	42
Ancora delle rette coniugate	15	46
Piani diametrali, centro, sezioni piane	16 17 18 19 20	48
Diametri, cono asintoto	21 22 23	54
Coppie e terne di piani diametrali coniugati o di diametri coniugati	24 25 26	57
Piani principali, assi	27 28	60
Quadriche rotonde	29 30	66
Piani principali ed asse del paraboloide	31	72
Ancora dei piani principali	*32 *33	75
Sezioni piane	34 35 36	80
Sezioni circolari	37 *38	91
Criterio pei punti esterni o interni alla quadrica	39	97
Quadrica riferita al centro, a una terna di diametri coniugati, ai proprii assi	40 41	97
Classificazione e descrizione delle quadriche a centro	42 43 44 45 *46	101
Equazioni ridotte e descrizione dei paraboloidi, cilindri e coppie di piani	47 48 49 *50	112
Alcune proprietà delle quadriche, ricavate dalle equazioni ridotte	51 52 53 54 55 56	120
Quadriche equilatere	57	135
Quadriche ortogonali	58	138
Fuochi e coniche focali	59 60 61 62	140
Quadriche confocali	63	149
Esercizii	64	150
Cenni storici	65	173
Nota sui sistemi di equazioni lineari omogenee		177

ERRATA.

Pag. 56	*dopo verso*	23	*si aggiunga:*	« Ogni piano pel centro seca il cono asintoto in due rette, che sono gli asintoti della conica secondo cui il piano seca la quadrica ».
» 57	*verso*	24	*si sopprima*	(o col cono asintoto)
» 72	»	4	*si aggiunga*	« Ogni quadrica per l'assoluto è una sfera ».
» 74	»	7	*invece di*	$-A$ *si legga* $-AB_{hh}$
» 76	»	11	*si sopprima*	[3].
» 77	»	9	»	[8].
» 77	»	5	*invece di* [7]	*si legga* [8].
» 78	»	11	*da sotto si aggiunga:*	« Nelle $\chi_1(x)$,... vi è il fattore B che può sopprimersi.
» 80	»	7	» *invece di*	x_1, x_2, x_3, λ, *si legga* $x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda$,
» 81	»	6	» »	dei numeratori, *si legga* dei suddeterminanti di a_{41}, a_{42}, a_{43},
» 85	»	13	»	[7] *si legga* [6], le cui radici sono proporzionali ai due valori di R^2,
» 87	»	3	*da sotto* »	$u_3 = 0$, $u_4 = 1$ *si legga* $u_3 = 1$, $u_4 = 0$
» 121	»	3	» »	piani *si legga* piani tangenti

Prime nozioni sulle quadriche.

§ 1. L'equazione generale di 2° grado fra le tre coordinate cartesiane x, y, z di un punto nello spazio a tre dimensioni non può contenere che: termini coi quadrati di x, y, z; termini coi prodotti xy, xz, yz; termini di primo grado in x, y, z; e termini indipendenti da x, y, z. Onde essa può sempre ridursi alla forma

$$[A] \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy + gx + hy + iz + k = 0,$$

indicando con $a, b, \ldots, k$ delle quantità date, alcune delle quali possono essere nulle.

Ad ogni coppia di valori arbitrarii assegnati a due delle coordinate x, y, z corrispondono due valori della terza; onde l'equazione è rappresentata geometricamente da ∞^2 punti. Essi costituiscono un luogo, il quale è una superficie, che dicesi *di 2° grado*. Più brevemente la diremo una *quadrica* (*).

L'equazione ha dieci termini, e quindi dieci coefficienti; ma, potendosi essa dividere per uno di questi (purchè non sia nullo), è chiaro che per scrivere l'equazione è necessario e sufficiente conoscere nove costanti, cioè i rapporti di nove dei coefficienti al rimanente. Quindi segue che *un luogo superficiale di 2° grado è determinato quando è soggetto a condizioni geometriche, che possano venir tradotte in nove equazioni distinte fra i rapporti di nove coefficienti dell'equazione generale di 2° grado al rimanente, ovvero in nove equazioni omogenee fra i dieci coefficienti.* Se queste equazioni sono di 1° grado, il luogo è individuato, cioè determinato ed unico. A meno di nove equazioni distinte corrispondono infiniti luoghi, a più di nove nessuno.

(*) Altri la chiama un *conicoide*, in analogia coi luoghi piani di 2° grado, che si chiamano coniche.

§ **2.** Diamo alcuni esempi di luoghi di 2° grado.

1° Se x, y, z sono le coordinate d'un punto qualunque del luogo, e se questo è soggetto a passare per nove punti dati $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_9, y_9, z_9)$, dovranno coesistere le dieci equazioni

$$\begin{aligned} &ax^2 + \ldots + dyz + \ldots + gx + \ldots + k = 0, \\ &ax_1^2 + \ldots + dy_1z_1 + \ldots + gx_1 + \ldots + k = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &ax_9^2 + \ldots + dy_9z_9 + \ldots + gx_9 + \ldots + k = 0 \end{aligned}$$

lineari ed omogenee in $a, b, \ldots, k$, e dovranno determinare i rapporti di nove delle $a, b, \ldots, k$ alla decima; quindi sarà

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & y_9z_9 & z_9x_9 & x_9y_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque *per nove punti arbitrarii passa uno ed un solo luogo di 2° grado*, di cui questa è l'equazione.

Per otto punti passano ∞ luoghi di 2° grado, per sette ne passano ∞^2, per sei ne passano ∞^3, ecc., per un punto ne passano ∞^8. Così per l'origine passano tutti quelli ∞^8 luoghi, per cui è nullo il termine costante k dell'equazione.

2° Un esempio di luogo di 2° grado è la *sfera*. Definendo questa come luogo d'un punto mobile che abbia da un punto fisso (centro) una distanza costante (raggio), si ottiene l'equazione della sfera di centro (α, β, γ) e di raggio ρ, esprimendo che il quadrato della distanza dei due punti (x, y, z), (α, β, γ) è uguale a ρ^2, ovvero (*)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$
$$+ 2(y-\beta)(z-\gamma)\cos\lambda + 2(z-\gamma)(x-\alpha)\cos\mu + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\nu = \rho^2;$$

(*) Se ox, oy, oz sono le direzioni positive degli assi coordinati, poniamo

$$\lambda = \widehat{yoz}, \qquad \mu = \widehat{zox}, \qquad \nu = \widehat{xoy}.$$

equazione di 2° grado, poichè si sviluppa in

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu$$
$$-2(\alpha + \beta\cos\nu + \gamma\cos\mu)x - 2(\alpha\cos\nu + \beta + \gamma\cos\lambda)y - 2(\alpha\cos\mu + \beta\cos\lambda + \gamma)z$$
$$+ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu - \rho^2) = 0.$$

Questa equazione si deduce dall'equazione generale [A] assumendo per $a, b, \ldots, k$ valori proporzionali od anche eguali ai coefficienti omologhi, cioè ponendo

$$[B] \qquad \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = \frac{d}{2\cos\lambda} = \frac{e}{2\cos\mu} = \frac{f}{2\cos\nu}$$
$$= \frac{g}{-2(\alpha + \beta\cos\nu + \gamma\cos\mu)} = \frac{h}{-2(\alpha\cos\nu + \beta + \gamma\cos\lambda)} = \frac{i}{-2(\alpha\cos\mu + \beta\cos\lambda + \gamma)}$$
$$= \frac{k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu - \rho^2}.$$

Qui si presentano due questioni: 1ª determinare le relazioni che devono sussistere fra i coefficienti della [A] perchè rappresenti una sfera; 2ª quando queste relazioni siano soddisfatte, determinare le coordinate del centro e il raggio della sfera rappresentata allora dalla [A].

Per risolvere la prima questione, basta eliminare dalle nove equazioni [B] le quattro indeterminate α, β, γ, ρ; or questa eliminazione si fa immediatamente, poichè α, β, γ, ρ non entrano nelle prime sei equazioni [B]

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = \frac{d}{2\cos\lambda} = \frac{e}{2\cos\mu} = \frac{f}{2\cos\nu};$$

onde *le condizioni perchè l'equazione generale* [A] *rappresenti una sfera sono le cinque seguenti:*

$$a = b = c, \quad d = 2a\cos\lambda, \quad e = 2a\cos\mu, \quad f = 2a\cos\nu.$$

In altri termini, *l'equazione generale d'una sfera è*

$$a(x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu) + gx + hy + iz + k = 0.$$

Per risolvere la seconda questione, si eguagli la prima delle frazioni [B] separatamente alla settima e seguenti, e si avranno le se-

guenti quattro equazioni fra le quattro incognite α, β, γ, ρ:

$$\alpha + \beta\cos\mu + \gamma\cos\nu = -\frac{g}{2a},$$

$$\alpha\cos\nu + \beta + \gamma\cos\lambda = -\frac{h}{2a},$$

$$\alpha\cos\mu + \beta\cos\lambda + \gamma = -\frac{i}{2a},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu - \rho^2 = \frac{k}{a}.$$

Dalle prime tre equazioni (*) si ricavano α, β, γ: posto

$$\operatorname{sen}^2\omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} \quad (**),$$

(*) Mediante queste equazioni si dimostra facilmente che, prendendo sui tre assi tre segmenti eguali a $-\frac{g}{2a}$, $-\frac{h}{2a}$, $-\frac{i}{2a}$, e conducendo per le estremità i piani perpendicolari ai rispettivi assi, questi piani individuano il centro colla loro intersezione.

(**) Dalla trigonometria è noto che, se λ, μ, ν indicano le facce di un triedro (o i lati di un triangolo sferico) e λ', μ', ν' le facce del triedro (o i lati del triangolo) cosiddetto *supplementare* o *polare* del primo, si ha

$$\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\nu' = \operatorname{sen}\mu \operatorname{sen}\nu \operatorname{sen}\lambda' = \operatorname{sen}\nu \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\mu'$$
$$= \sqrt{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}};$$

questa quantità è dunque compresa fra 0 e 1, e fu da *Staudt* (1842) chiamata *seno del triedro*. Detto ω un angolo di cui essa sia il seno, il determinante viene espresso da $\operatorname{sen}^2\omega$.

Staudt diede anche la seguente relazione più generale per due triedri con lo stesso vertice $oxyz$, $oXYZ$:

$$\operatorname{sen} oxyz \,.\, \operatorname{sen} oXYZ = \begin{vmatrix} \cos xoX & \cos xoY & \cos xoZ \\ \cos yoX & \cos yoY & \cos yoZ \\ \cos zoX & \cos zoY & \cos zoZ \end{vmatrix}.$$

si ha

$$\alpha = \frac{-\begin{vmatrix} g & \cos\nu & \cos\mu \\ h & 1 & \cos\lambda \\ i\cos\lambda & & 1 \end{vmatrix}}{2a\,\mathrm{sen}^2\omega}, \quad \beta = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & g & \cos\mu \\ \cos\nu & h & \cos\lambda \\ \cos\mu & i & 1 \end{vmatrix}}{2a\,\mathrm{sen}^2\omega}, \quad \gamma = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & g \\ \cos\nu & 1 & h \\ \cos\mu & \cos\lambda & i \end{vmatrix}}{2a\,\mathrm{sen}^2\omega}.$$

Indi dall'ultima equazione si ricava

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\gamma\alpha\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu - \frac{k}{a}$$

$$= \alpha(\alpha + \beta\cos\nu + \gamma\cos\mu) + \beta(\alpha\cos\nu + \beta + \gamma\cos\lambda) + \gamma(\alpha\cos\mu + \beta\cos\lambda + \gamma) - \frac{k}{a}$$

$$= \frac{1}{4a^2\mathrm{sen}^2\omega}\left\{ \begin{vmatrix} g & \cos\nu & \cos\mu \\ h & 1 & \cos\lambda \\ i\cos\lambda & & 1 \end{vmatrix} g + \begin{vmatrix} 1 & g & \cos\mu \\ \cos\nu & h & \cos\lambda \\ \cos\mu & i & 1 \end{vmatrix} h + \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & g \\ \cos\nu & 1 & h \\ \cos\mu & \cos\lambda & i \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} 4ak \right\}$$

$$= \frac{-1}{4a^2\mathrm{sen}^2\omega} \begin{vmatrix} 4ak & g & h & i \\ g & 1 & \cos\mu & \cos\nu \\ h & \cos\mu & 1 & \cos\lambda \\ i & \cos\nu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

La sfera si riduce a un punto quando ρ è nullo, ed è immaginaria quando ρ^2 è negativo.

Se gli assi sono ortogonali, le precedenti equazioni si semplificano e divengono

$$a = b = c, \qquad d = e = f = 0,$$

$$\alpha = -\frac{g}{2a}, \qquad \beta = -\frac{h}{2a}, \qquad \gamma = -\frac{i}{2a},$$

$$\rho^2 = \frac{g^2 + h^2 + i^2 - 4ak}{4a^2}.$$

Siccome nell'equazione generale d'una sfera compaiono solo cinque coefficienti a, g, h, i, k; così per individuare una sfera bastano quattro suoi punti. Procedendo come nell'esempio 1°, si ottiene come *equazione della sfera che passa per quattro punti dati* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), la seguente

$$\begin{vmatrix} x^2 + \ldots + 2yz\cos\lambda + \ldots & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + \ldots + 2y_1z_1\cos\lambda + \ldots & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4^2 + \ldots + 2y_4z_4\cos\lambda + \ldots & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Data in un piano una ellisse, si prendano i due assi di questa per assi delle x e delle y, e si prenda per asse delle z la retta ad essi perpendicolare; se a_0 e b_0 sono le lunghezze dei semiassi della ellisse, ogni suo punto soddisfarà all'equazione

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1.$$

Se ora si fa rotare l'ellisse intorno all'asse delle x, essa descriverà una superficie di rivoluzione; e ogni punto nel rotare conserverà la stessa x, ma la sua distanza dall'asse di rotazione non sarà più espressa da y bensì da $\sqrt{y^2 + z^2}$; sicchè si avrà per equazione della superficie

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2 + z^2}{b_0^2} = 1.$$

La superficie è dunque un luogo di 2° grado, e dicesi *ellissoide di rivoluzione* o *rotondo*; è *allungato* se $a_0 > b_0$, *schiacciato* se $a_0 < b_0$; è una sfera se $a_0 = b_0$.

Analogamente: un'iperbole rotando attorno ad uno dei suoi assi genera un luogo superficiale di 2° grado, che dicesi *iperboloide rotondo*, e che avrà due falde o una falda sola, secondochè asse di rotazione è l'asse trasverso dell'iperbole o l'altro suo asse. L'equazione ne è rispettivamente

$$\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2 + z^2}{b_0^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2 + z^2}{b_0^2} = 1.$$

Data una parabola, e preso per asse delle x il suo asse, per asse delle y la tangente al vertice, e per asse delle z la perpendicolare ai due primi, ogni punto di essa soddisfa all'equazione

$$y^2 = 2px,$$

se $2p$ è il parametro. Rotando la parabola intorno al proprio asse,

genererà una superficie, che dicesi *paraboloide rotondo*, e di cui l'equazione sarà

$$y^2 + z^2 = 2px.$$

4° Se

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

sono le equazioni di due piani, l'equazione-prodotto

$$(Ax + By + Cz + D)(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

è del 2° grado, ed è soddisfatta dai punti di ciascuno dei due piani e solo da essi; dunque rappresenta *il sistema dei due piani*, il quale perciò va annoverato fra i luoghi di 2° grado.

5° Sia un'equazione di 2° grado *omogenea in* x, y, z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy = 0.$$

Essa presenta questa particolarità: che, se un punto di coordinate x, y, z la verifica, ogni altro punto di coordinate proporzionali a quelle la verifica del pari; vale a dire che i punti del luogo sono distribuiti su ∞ rette per l'origine, onde il luogo è un cono avente per vertice l'origine.

Questo ragionamento si può invertire; e però, *affinchè un'equazione di 2° grado rappresenti un cono, è necessario e sufficiente che essa sia omogenea in* x, y, z *se il vertice è l'origine, ed omogenea in* $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ *se l'origine è il punto* (x', y', z').

Ne segue che *cinque punti col vertice individuano un cono di 2° grado*, ed è facile formarne l'equazione.

6° Sia un'equazione di 2° grado *priva di una delle coordinate*, p. es. z:

$$ax^2 + by^2 + fxy + gx + hy + k = 0.$$

È chiaro che il luogo rappresentato da questa equazione è un cilindro, avente le generatrici parallele all'asse delle z e per direttrice la conica che la stessa equazione rappresenta nel piano delle x e y.

7° Sia l'equazione *priva di due coordinate*, p. es. y e z:

$$ax^2 + gx + k = 0.$$

È chiaro che essa rappresenta due piani paralleli al piano delle y e z.

Osservazione. Per ben discutere le varie specie di luoghi di 2° grado, e per assegnare le forme dei luoghi di ciascuna specie, occorrerebbe premettere molti sviluppi algebrici; e d'altronde riesce utile dimostrare prima parecchie proprietà comuni ai luoghi medesimi. Intanto il lettore è avvertito che, per comprendere meglio tali proprietà, potrà raffigurarsele applicandole agli ellissoidi, iperboloidi o paraboloidi di rivoluzione, che sono facilissimi ad immaginare, e che d'altronde non divergono gran fatto dalle forme più generali.

Ed ora, dopo aver arrecato esempi di particolari luoghi di 2° grado chiusi ed aperti, procediamo alla teoria generale dei luoghi medesimi, ed anzitutto stabiliamo alcune

Formole fondamentali.

§ **3.** L'equazione generale di 2° grado non è omogenea; poichè, oltre ai termini di 2° grado nelle variabili x, y, z, contiene termini a primo grado in x, y, z e un termine costante. Ma si può renderla omogenea mercè la seguente osservazione.

Le coordinate cartesiane d'un punto sono i numeri che misurano tre segmenti tagliati sugli assi e riferiti ad una unità lineare, arbitraria sì, ma la stessa per i tre segmenti e per tutti i punti. Ora, invece di riferire immediatamente i tre segmenti all'unità prescelta, potremmo prima riferirli ad una certa retta finita arbitraria che può anche variare da punto a punto (p. es. al raggio vettore del punto), e poi riferire a questa anche l'unità lineare; allora, se per un punto sono x, y, z e t i numeri che misurano i tre segmenti degli assi e la retta finita suddetta, le coordinate cartesiane del punto saranno evidentemente espresse da $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$; e potremo dire che x, y, z, t sono le *coordinate cartesiane omogenee* del punto, purchè non perdiamo di vista il significato di ciascuno dei quattro numeri, e ricordiamo che è lecito moltiplicarli per una stessa quantità arbitraria. Del resto basterà porre $t = 1$ per fare che x, y, z tornino a significare le coordinate cartesiane.

Ciò posto, se in una funzione qualunque delle coordinate cartesiane d'un punto denotiamo queste con $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, avremo una funzione

di quattro variabili x, y, z, t, la quale rimarrà inalterata se noi moltiplichiamo le quattro variabili per una stessa quantità arbitraria, e quindi sarà una funzione omogenea di quelle quattro variabili. E se si tratta d'una equazione algebrica, razionale, intera di grado n fra le coordinate d'un punto, denotando queste con $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ e moltiplicando ambo i membri per t^n, ogni termine diverrà del grado n nelle quattro variabili x, y, z, t, e l'equazione diverrà omogenea.

Così l'equazione generale di 2° grado [A] potremo scriverla

$$a\left(\frac{x}{t}\right)^2 + b\left(\frac{y}{t}\right)^2 + c\left(\frac{z}{t}\right)^2 + d\frac{y}{t}\cdot\frac{z}{t} + e\frac{z}{t}\cdot\frac{x}{t} + f\frac{x}{t}\cdot\frac{y}{t}$$
$$+ g\frac{x}{t} + h\frac{y}{t} + i\frac{z}{t} + k = 0,$$

e moltiplicando per t^2

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy + gxt + hyt + izt + kt^2 = 0;$$

ove basta porre $t = 1$ per tornare alla [A].

Oltre a rendere omogenea l'equazione, possiamo darle una forma più atta ad ottenere simmetria e chiarezza nei calcoli e nelle formole. Perciò: 1° scriveremo x_1, x_2, x_3, x_4 rispettivamente invece di x, y, z, t; anzi chiameremo brevemente punto x il punto che ha per coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4; 2° denoteremo i coefficienti dei singoli termini dell'equazione con una stessa lettera a, alla quale affiggeremo due indici per ciascun termine; 3° regoleremo la scelta degli indici sullo sviluppo del quadrato di una funzione lineare omogenea di x_1, x_2, x_3, x_4, p. es.

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4,$$

il quale quadrato è

$$p_1p_1x_1^2 + p_2p_2x_2^2 + p_3p_3x_3^2 + p_4p_4x_4^2$$
$$+2p_1p_2x_1x_2 + 2p_1p_3x_1x_3 + 2p_2p_3x_2x_3 + 2p_1p_4x_1x_4 + 2p_2p_4x_2x_4 + 2p_3p_4x_3x_4;$$

noi scriveremo rispettivamente a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} al posto di p_1p_1, p_2p_2, p_3p_3, p_4p_4, ed a_{12} o a_{21}, a_{13} o a_{31}, a_{23} o a_{32}, ecc. al posto di p_1p_2, p_1p_3, p_2p_3, ecc. Così all'equazione [A] sostituiremo la seguente

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0,$$

e questa potremo assumere come tipo delle equazioni dei luoghi di 2° grado.

Siccome avremo a ogni passo occasione di trascrivere questa equazione, sarà bene d'indicarne brevemente il primo membro colla notazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{o anche} \quad f(x).$$

Questa funzione è una *forma quadratica quaternaria* (*); e potrebbe anche scriversi così:

$$\sum_{hp} a_{hp} x_h x_p ,$$

supponendo che h e p possan ricevere tutti i valori 1, 2, 3, 4 sia identici sia diversi.

Quando vogliasi usare le coordinate cartesiane sotto la forma ordinaria, basta porre $x_4 = 1$, ossia ragionare sulla equazione

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$
$$+ 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0,$$

ovvero

$$f(x_1, x_2, x_3, 1) = 0.$$

Le semiderivate parziali della $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ rispetto ad x_1, x_2, x_3, x_4 le indicheremo con

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

o anche

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \quad f_4(x),$$

cioè porremo

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 ,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 ,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 ,$$
$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 ;$$

ed è facile verificare l'identità (teorema d'Eulero)

$$[1] \qquad f(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + x_4 f_4(x).$$

(*) Una funzione intera omogenea di grado n ad m variabili è ciò che suol chiamarsi *forma algebrica*. Nel caso presente $n = 2$, $m = 4$.

In particolare si ha

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, 1) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}\,, \\
f_2(x_1, x_2, x_3, 1) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}\,, \\
f_3(x_1, x_2, x_3, 1) &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}\,, \\
f_4(x_1, x_2, x_3, 1) &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}\,;
\end{aligned}$$

sicchè $f_1(x_1, x_2, x_3, 1)$, $f_2(x_1, x_2, x_3, 1)$, $f_3(x_1, x_2, x_3, 1)$ sono le semiderivate parziali della $f(x_1, x_2, x_3, 1)$ rispetto a x_1, x_2, x_3. Ed è pure

[2] $$f(x_1, x_2, x_3, 1) =$$
$$x_1 f_1(x_1, x_2, x_3, 1) + x_2 f_2(x_1, x_2, x_3, 1) + x_3 f_3(x_1, x_2, x_3, 1) + f_4(x_1, x_2, x_3, 1).$$

Inoltre, l'equazione di un piano, resa omogenea, sia

[3] $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0\,;$$

allora i rapporti $\frac{u_1}{u_4}$, $\frac{u_2}{u_4}$, $\frac{u_3}{u_4}$ esprimono i valori inversi e opposti dei segmenti che il piano taglia sugli assi, e si chiamano le *coordinate Plückeriane* del piano. Noi indicheremo con u il piano, e chiameremo le u_1, u_2, u_3, u_4 *coordinate Plückeriane omogenee* del piano stesso, tenendo sempre presente che è lecito moltiplicarle per un medesimo numero arbitrario.

La [3] è l'equazione del piano u quando le $u_1, \ldots$ son date e le $x_1, \ldots$ variabili; ed è l'equazione del punto x quando le $x_1, \ldots$ son date e le $u_1, \ldots$ variabili.

§ **4**. Coi coefficienti di x_1, x_2, x_3, x_4 nelle semiderivate di $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ si può formare il determinante simmetrico

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

il quale è il risultante delle semiderivate, vale a dire che il suo annullarsi è la condizione affinchè esista un punto le cui coordinate annullino tutte quattro le semiderivate, e però dicesi il *discriminante* della $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Denotiamo con A_{11}, A_{12}, ... i suddeterminati di 3° ordine ricavati dal discriminante A e rispettivamente complementari o aggiunti o reciproci di a_{11}, a_{12}, ...; ossia poniamo

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \ldots, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \ldots;$$

eguaglianze che sono tutte compendiate nella

$$A_{hp} = \pm \begin{vmatrix} a_{iq} & a_{ir} & a_{is} \\ a_{kq} & a_{kr} & a_{ks} \\ a_{lq} & a_{lr} & a_{ls} \end{vmatrix},$$

indicando con $hikl$ e $pqrs$ permutazioni (distinte o identiche) degli indici 1, 2, 3, 4, e prendendo il + o il — secondochè esse sono della stessa classe o diversa. Gli indici h, p di A sono permutabili anche se disuguali, ossia

$$A_{hp} = A_{ph}.$$

Sviluppando A secondo gli elementi delle singole orizzontali, si hanno quattro identità, che si possono compendiare nella

$$[1] \quad a_{h1}A_{h1} + a_{h2}A_{h2} + a_{h3}A_{h3} + a_{h4}A_{h4} = A \quad (h = 1, 2, 3, 4).$$

Moltiplicando invece gli elementi d'una orizzontale per i suddeterminanti complementari degli omologhi elementi d'una linea parallela, si hanno altre dodici identità, che possiamo compendiare nella

$$[2] \qquad a_{h1}A_{i1} + a_{h2}A_{i2} + a_{h3}A_{i3} + a_{h4}A_{i4} = 0,$$

indicando con hi una disposizione binaria degli indici 1, 2, 3, 4.

Le sedici identità ottenute operando sulle verticali di A anzichè sulle orizzontali, non differiscono dalle precedenti, grazie alla simmetria del determinante A.

Inoltre, per le note proprietà dei determinanti ad elementi aggiunti, abbiamo l'identità

$$[3] \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A^3,$$

e le sedici che possiamo compendiare nella

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} A_{iq} & A_{ir} & A_{is} \\ A_{kq} & A_{kr} & A_{ks} \\ A_{lq} & A_{lr} & A_{ls} \end{vmatrix} = \pm A^2 a_{hp}.$$

Da ultimo consideriamo nel discriminante A i suddeterminanti di 2° ordine, che sono a due a due complementari. Saranno

$$\begin{vmatrix} a_{hp} & a_{hq} \\ a_{ip} & a_{iq} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \pm \begin{vmatrix} a_{kr} & a_{ks} \\ a_{lr} & a_{ls} \end{vmatrix}$$

due siffatti suddeterminanti; e se poniamo

$$A_{hi,pq} = \pm \begin{vmatrix} a_{kr} & a_{ks} \\ a_{lr} & a_{ls} \end{vmatrix},$$

avremo subito

$$A_{hi,pq} = - A_{ih,pq} = - A_{hi,qp} = A_{ih,qp},$$

$$A_{kl,rs} = \pm \begin{vmatrix} a_{hp} & a_{hq} \\ a_{ip} & a_{iq} \end{vmatrix} = - A_{lk,rs} = - A_{kl,sr} = A_{lk,sr}.$$

Le ricordate proprietà dei determinanti ad elementi aggiunti porgeranno molte relazioni, che possono compendiarsi nella

$$[5] \qquad \begin{vmatrix} A_{hp} & A_{hq} \\ A_{ip} & A_{iq} \end{vmatrix} = \pm A \begin{vmatrix} a_{kr} & a_{ks} \\ a_{lr} & a_{ls} \end{vmatrix} = A A_{hi,pq}.$$

Ed è anche da notare che la somma

$$A_{hi,12}A_{pq,34} + A_{hi,13}A_{pq,42} + A_{hi,14}A_{pq,23} + A_{hi,23}A_{pq,14} + A_{hi,24}A_{pq,31} + A_{hi,34}A_{pq,12}$$

equivale a A quando $hipq$ denota una permutazione con un numero pari d'inversioni dei quattro indici 1, 2, 3, 4; mentre è nulla quando due fra h, i, p, q sono eguali.

Fra i determinanti di 3° ordine A_{11}, A_{12}, ... quello che avrà un ufficio più importante è

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

e spesso tornerà comodo indicarlo con una semplice lettera B. I suoi suddeterminanti li denoteremo allora con $B_{11}, \ldots, B_{12}$ o $B_{21}, \ldots$, ossia porremo

$$B_{hp} = A_{h4,p4}.$$

A_{44} o B è il discriminante della *forma quadratica ternaria*

$$f(x_1, x_2, x_3, 0) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3,$$

vale a dire è il determinante dei coefficienti di x_1, x_2, x_3 nelle semiderivate parziali di $f(x_1, x_2, x_3, 0)$, che sono

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3;$$

e si ha

[6] $$a_{h1}B_{h1} + a_{h2}B_{h2} + a_{h3}B_{h3} = B \quad (h = 1, 2, 3),$$

[7] $$a_{h1}B_{i1} + a_{h2}B_{i2} + a_{h3}B_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ e } \gtrless h),$$

[8] $$B_{iq}B_{kr} - B_{ir}B_{kq} = \pm Ba_{hp},$$

ove hik, pqr sono permutazioni di 1, 2, 3 della stessa classe o diversa (*).

Da ultimo, indichino 1, 2, 3 le direzioni positive degli assi delle coordinate, e si ponga

$\omega_{12} = \cos 12$, $\omega_{13} = \cos 13$, $\omega_{23} = \cos 23$, $\omega_{21} = \cos 21$, $\omega_{31} = \cos 31$, $\omega_{32} = \cos 32$,

(*) Analogamente A_{11} è il discriminante di $f(0, x_2, x_3, x_4)$; ecc.

onde

$$\omega_{12} = \omega_{21}\,,\ \omega_{13} = \omega_{31}\,,\ \omega_{23} = \omega_{32}\,;$$

una forma quadratica ternaria che ci occorrerà sovente è la

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{13}x_1x_3 + 2\omega_{23}x_2x_3\,,$$

la quale esprime il quadrato della distanza di un punto dall'origine quando x_1, x_2, x_3 sono le coordinate del punto.

Le sue semiderivate sono

$$x_1 + \omega_{12}x_2 + \omega_{13}x_3\,,\quad \omega_{21}x_1 + x_2 + \omega_{23}x_3\,,\quad \omega_{31}x_1 + \omega_{32}\,x_2 + x_3\,,$$

e il discriminante è

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 1 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 1 \end{vmatrix}\,;$$

Ω esprime il seno quadrato del triedro degli assi, ed è sempre compreso fra 0 e 1.

Indicheremo con $\Omega_{11}, \ldots$ i suddeterminanti complementari degli elementi di Ω, cioè porremo

$$\Omega_{11}=1-\omega_{23}^2=\mathrm{sen}^2 23,\quad \Omega_{22}=1-\omega_{31}^2=\mathrm{sen}^2 31,\quad \Omega_{33}=1-\omega_{12}^2=\mathrm{sen}^2 12,$$

$$\Omega_{12}=\Omega_{21}=\omega_{13}\omega_{23}-\omega_{12},\quad \Omega_{13}=\Omega_{31}=\omega_{12}\omega_{23}-\omega_{13},\quad \Omega_{23}=\Omega_{32}=\omega_{12}\omega_{13}-\omega_{23},$$

e quindi, indicando con I, II, III gli spigoli del triedro supplementare di 123, avremo anche

$$\Omega_{12}=\mathrm{sen}\,13\,\mathrm{sen}\,23\,\cos \mathrm{I,II},\ \Omega_{13}=\mathrm{sen}\,12\,\mathrm{sen}\,23\,\cos \mathrm{I,III},\ \Omega_{23}=\mathrm{sen}\,12\,\mathrm{sen}\,13\,\cos \mathrm{II,III}.$$

* **§ 5**. La funzione $f(x)$, che abbiamo già messo sotto la forma [1] in cui compaiono simmetricamente le sue semiderivate parziali, può ricevere anche altre forme notevoli, in ciascuna delle quali compare una derivata.

È facile verificare che

$$a_{11}f(x) - [f_1(x)]^2$$
$$= A_{31,31}x_2^2 + A_{42,42}x_3^2 + A_{23,23}x_4^2 + 2A_{31,42}x_2x_3 + 2A_{42,23}x_3x_4 + 2A_{23,31}x_4x_2\,,$$

onde, tenendo presenti le [5] e [8] del § 4,

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}}[f_1(x)]^2 + \frac{1}{a_{11}A_{34,34}}(A_{34,34}x_2 + A_{34,42}x_3 + A_{34,23}x_4)^2$$

$$+ \frac{1}{a_{11}}\left(A_{42,42} - \frac{A^2_{34,42}}{A_{34,34}}\right)x_3^2 + \frac{1}{a_{11}}\left(A_{23,23} - \frac{A^2_{34,23}}{A_{34,34}}\right)x_4^2$$

$$+ \frac{2}{a_{11}}\left(A_{42,23} - \frac{A_{34,42}A_{34,23}}{A_{34,34}}\right)x_3x_4$$

$$= \frac{1}{a_{11}}[f_1(x)]^2 + \frac{1}{a_{11}A_{34,34}}(A_{34,34}x_2 + A_{34,42}x_3 + A_{34,23}x_4)^2$$

$$+ \frac{A_{44}x_3^2 + A_{33}x_4^2 - 2A_{34}x_3x_4}{A_{34,34}}$$

$$= \frac{1}{a_{11}}[f_1(x)]^2 + \frac{1}{a_{11}A_{34,34}}(A_{34,34}x_2 + A_{34,42}x_3 + A_{34,23}x_4)^2$$

$$+ \frac{A_{44}}{A_{34,34}}\left(x_3 - \frac{A_{34}}{A_{44}}x_4\right)^2 + \frac{A}{A_{44}}x_4^2.$$

Oltre a questa decomposizione, altre se ne ottengono permutando comunque gli indici 1, 2, 3, 4.

Insomma sappiamo in vari modi decomporre $f(x)$ in quattro quadrati di forme lineari, delle quali la prima contenga tutte e quattro le variabili, la seconda tre, la terza due, la quarta una sola. E su questa decomposizione si potrebbe fondare la classificazione delle quadriche; ma noi preferiamo differire questo argomento, e tenere altra via.

Lasciamo anche da parte i casi nei quali la detta decomposizione non è possibile.

Invarianti.

§ 6. 1° Quando si passa da un sistema di assi cartesiani 1, 2, 3 ad un sistema di assi rispettivamente paralleli ai primitivi, le primitive coordinate d'un punto, che diremo x_1, x_2, x_3, si trasformano nelle nuove, che diremo X_1, X_2, X_3, mediante la sostituzione semplicissima

[1] $$x_1 = X_1 + x'_1, \quad x_2 = X_2 + x'_2, \quad x_3 = X_3 + x'_3,$$

dette x'_1, x'_2, x'_3 le coordinate primitive della nuova origine.

Sostituendo ad x_1, x_2, x_3 queste loro espressioni nella $f(x_1, x_2, x_3, 1)$, essa si trasforma nella seguente

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3$$
$$+2(a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3+a_{14})X_1+2(a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+a_{23}x'_3+a_{24})X_2$$
$$+ 2(a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34})X_3 + f(x'_1, x'_2, x'_3, 1) = 0\,;$$

adunque: « *quando si trasforma la funzione* $f(x_1, x_2, x_3, 1)$ *mediante* « *una traslazione degli assi, i coefficienti dei termini a 2° grado* « *nella trasformata sono gli stessi che nella primitiva, i coefficienti* « *dei termini a 1° grado sono le derivate parziali della primitiva* « *in cui si siano sostituite le coordinate della nuova origine, ed il* « *termine costante è tutta la funzione primitiva in cui si siano* « *sostituite le coordinate della nuova origine* ».

Vediamo ora che cosa avvenga del discriminante. Il discriminante della trasformata è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}x'_1+\ldots+a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}x'_1+\ldots+a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}x'_1+\ldots+a_{34} \\ a_{11}x'_1+\ldots & a_{21}x'_1+\ldots & a_{31}x'_1+\ldots & f(x'_1, x'_2, x'_3, 1) \end{vmatrix};$$

or sottraendo dalla 4ª orizzontale le precedenti moltiplicate per x'_1, x'_2, x'_3, e poi facendo lo stesso sulle verticali, esso per la [2] del § 3 diviene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

cioè si riduce al discriminante A dell'equazione primitiva.

2° Quando invece si tien ferma l'origine e si mutano le direzioni degli assi 1, 2, 3 in altre 1′, 2′, 3′; allora le coordinate primitive x_1, x_2, x_3 di un punto si esprimono nelle nuove X_1, X_2, X_3 mediante la sostituzione

$$[2] \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3\,, \\ x_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3\,, \\ x_3 = \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + \alpha_{33}X_3\,. \end{cases}$$

posto

$$\alpha_{11} = \frac{\cos 11'}{\cos 11}, \quad \alpha_{12} = \frac{\cos 12'}{\cos 11}, \quad \alpha_{13} = \frac{\cos 13'}{\cos 11}, \text{ ecc.};$$

e per effetto di tale sostituzione la $f(x_1, x_2, x_3, 1)$ si trasforma in una funzione di 2° grado in X_1, X_2, X_3:

$$a'_{11}X_1^2 + a'_{22}X_2^2 + a'_{33}X_3^2 + 2a'_{12}X_1X_2 + 2a'_{13}X_1X_3 + 2a'_{23}X_2X_3$$
$$+ 2a'_{14}X_1 + 2a'_{24}X_2 + 2a'_{34}X_3 + a'_{44};$$

anzi, essendo x_1, x_2, x_3 omogenee in X_1, X_2, X_3, è chiaro che i termini di 2° e 1° grado nella $f(x_1, x_2, x_3, 1)$ daranno luogo nella trasformata rispettivamente a termini di 2° e 1° grado; sicchè si avrà identicamente

$$[3] \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \\ = a'_{11}X_1^2 + a'_{22}X_2^2 + a'_{33}X_3^2 + 2a'_{12}X_1X_2 + 2a'_{13}X_1X_3 + 2a'_{23}X_2X_3, \end{cases}$$

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = a'_{14}X_1 + a'_{24}X_2 + a'_{34}X_3,$$

$$a_{44} = a'_{44}.$$

Se inoltre ricordiamo il significato di Ω, $\omega_{12}, \ldots$ e denotiamo con Ω', $\omega'_{12}, \ldots$ le quantità analoghe relative ai nuovi assi, abbiamo pure identicamente

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{13}x_1x_3 + 2\omega_{23}x_2x_3$$
$$= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2\omega'_{12}X_1X_2 + 2\omega'_{13}X_1X_3 + 2\omega'_{23}X_2X_3,$$

poichè ambo i membri esprimono il quadrato della distanza dello stesso punto (x_1, x_2, x_3) o (X_1, X_2, X_3) dall'origine.

Moltiplicando l'ultima eguaglianza per una quantità arbitraria ρ e poi aggiungendola alla [3], si avrà l'identità

$$(a_{11} + \rho)x_1^2 + (a_{22} + \rho)x_2^2 + (a_{33} + \rho)x_3^2$$
$$+ 2(a_{12} + \omega_{12}\rho)x_1x_2 + 2(a_{13} + \omega_{13}\rho)x_1x_3 + 2(a_{23} + \omega_{23}\rho)x_2x_3$$
$$= (a'_{11} + \rho)X_1^2 + (a'_{22} + \rho)X_2^2 + (a'_{33} + \rho)X_3^2$$
$$+ 2(a'_{12} + \omega'_{12}\rho)X_1X_2 + 2(a'_{13} + \omega'_{13}\rho)X_1X_3 + 2(a'_{23} + \omega'_{23}\rho)X_2X_3.$$

Se un valore di ρ è capace di scindere il 1° membro in due fattori di 1° grado in x_1, x_2, x_3, allora ponendo in questi fattori le espressioni di x_1, x_2, x_3 mediante X_1, X_2, X_3, i due fattori restano di 1° grado

in X_1, X_2, X_3, e il 2° membro risulta uguale al prodotto di due fattori di 1° grado in X_1, X_2, X_3 per quel medesimo valore di ρ. Ma i due membri sono due forme ternarie quadratiche, e la condizione perchè una tal forma si scinda in due fattori di 1° grado è che si annulli il suo discriminante (*); dunque gli stessi valori di ρ annullano i discriminanti dei due membri. Ora il discriminante del 1° membro, eguagliato a zero, è

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{12}+\omega_{12}\rho & a_{13}+\omega_{13}\rho \\ a_{21}+\omega_{21}\rho & a_{22}+\rho & a_{23}+\omega_{23}\rho \\ a_{31}+\omega_{31}\rho & a_{32}+\omega_{32}\rho & a_{33}+\rho \end{vmatrix} = 0,$$

equazione di 3° grado in ρ, che si sviluppa nella

$$\Omega\rho^3 + (a_{11}\Omega_{11} + a_{22}\Omega_{22} + a_{33}\Omega_{33} + 2a_{12}\Omega_{12} + 2a_{13}\Omega_{13} + 2a_{23}\Omega_{23})\rho^2$$
$$+ (B_{11} + B_{22} + B_{33} + 2B_{12}\omega_{12} + 2B_{13}\omega_{13} + 2B_{23}\omega_{23})\rho + B = 0\,;$$

e similmente il discriminante del secondo membro, eguagliato a zero, dà l'equazione

$$\Omega'\rho^3 + (a'_{11}\Omega'_{11} + \ldots)\rho^2 + (B'_{11} + \ldots)\rho + B' = 0,$$

ove $\Omega'_{11}, \ldots, B', B'_{11}, \ldots$ hanno i significati analoghi a $\Omega_{11}, \ldots, B, B_{11}, \ldots$ rispetto agli assi nuovi. Dunque i coefficienti dei termini simili nelle due equazioni sono proporzionali, ovvero

$$[5] \quad \begin{cases} \dfrac{a_{11}\Omega_{11}+a_{22}\Omega_{22}+a_{33}\Omega_{33}+2a_{12}\Omega_{12}+2a_{13}\Omega_{13}+2a_{23}\Omega_{23}}{\Omega} = \dfrac{a'_{11}\Omega'_{11}+\ldots+2a'_{12}\Omega'_{12}+\ldots}{\Omega'}, \\[2ex] \dfrac{B_{11}+B_{22}+B_{33}+2B_{12}\omega_{12}+2B_{13}\omega_{13}+2B_{23}\omega_{23}}{\Omega} = \dfrac{B'_{11}+\ldots+2B'_{12}\omega'_{12}+\ldots}{\Omega'}, \\[2ex] \dfrac{B}{\Omega} = \dfrac{B'}{\Omega'}. \end{cases}$$

3° Supponiamo da ultimo che si trasformino le coordinate mutando così l'origine come la direzione degli assi. Possiamo decomporre questa trasformazione in due, prima trasportando gli assi primitivi parallelamente fino a passare per la novella origine, e poi

(*) Questa proprietà è nota per un polinomio di 2° grado non omogeneo a due variabili (cfr. Con. § 5, 6, 7); chiamando $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ le due variabili e moltiplicando per x_3^2, si conclude secondo il testo.

mutando la direzione degli assi intorno a questa. Ora abbiam visto che la prima trasformazione non altera i coefficienti dei termini a 2° grado, nè certo altera gli angoli degli assi; sicchè i primi membri delle [5], che dipendono solo da quelle quantità, risulteranno perfettamente gli stessi, sia che si costruiscano coi coefficienti dell'equazione primitiva sia con quelli della trasformata. Abbiamo poi dimostrato che per effetto della seconda trasformazione sussistono le [5]; dunque *le* [5] *sussisteranno quando si muti così l'origine come la direzione degli assi*, mediante la sostituzione

$$[6] \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + x'_1, \\ x_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3 + x'_2, \\ x_3 = \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + \alpha_{33}X_3 + x'_3, \end{cases}$$

ove $\alpha_{11}, \ldots, x'_1, \ldots$ hanno i significati dianzi spiegati.

Si enuncia questo risultato dicendo che i primi membri delle [5] sono *invarianti assoluti* della funzione $f(x)$ (*).

E si noti che essi dipendono solo dai coefficienti dei termini a 2° grado in $f(x)$.

Quind'innanzi indicheremo brevemente con C e D i polinomii $B_{11} + \ldots$, $a_{11}\Omega_{11} + \ldots$; onde avremo che *le frazioni*

$$\frac{D}{\Omega}, \quad \frac{C}{\Omega}, \quad \frac{B}{\Omega}$$

sono invarianti assoluti. Ciò torna poi a dire che, su qualunque trasformata di $f(x)$ si componga l'equazione [4], essa avrà sempre le stesse radici.

Questa equazione è molto importante, e ne riprenderemo in seguito l'esame. Denoteremo per brevità con $\Delta(\rho)$ il suo 1° membro diviso per Ω.

Abbiam visto che per una traslazione degli assi A, e quindi anche $\frac{A}{\Omega}$, si riproduce inalterato; e dimostreremo in seguito che ciò av-

---

(*) Ci permettiamo di chiamarli così, benchè in verità essi siano invarianti assoluti simultanei della $f(x)$ e della

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{13}x_1x_3 + 2\omega_{23}x_2x_3,$$

e ciò solo in senso ristretto, vale a dire solo per una classe di sostituzioni lineari.

viene anche quando si mutino le direzioni degli assi; sicchè allora potremo dire che eziandio *la frazione*

$$\frac{A}{\Omega}$$

è un invariante assoluto (*).

Poichè $\frac{A}{\Omega}$, $\frac{B}{\Omega}$, $\frac{C}{\Omega}$, $\frac{D}{\Omega}$ sono invarianti assoluti e Ω è positivo, consegue che i segni delle quantità A, B, C, D non si alterano per trasformazione di coordinate.

(*) Intanto notiamo che, se nella $f(x)$ si esegue la sostituzione lineare più generale

$$[7] \qquad x_h = \alpha_{h1}X_1 + \alpha_{h2}X_2 + \alpha_{h3}X_3 + \alpha_{h4}X_4 \quad (h = 1, 2, 3, 4),$$

e poi si calcola la funzione trasformata; allora, chiamando A' il discriminante di questa, si può (mediante i teoremi sulla moltiplicazione dei determinanti, o anche col calcolo ordinario) dimostrare la relazione

$$A' = A \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{14} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{41} \dots \alpha_{44} \end{vmatrix}^2,$$

la quale si enuncia dicendo che A è un *invariante* (non assoluto però) della $f(x)$.

Il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{14} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{41} \dots \alpha_{44} \end{vmatrix}.$$

dicesi *determinante* o *modulo* della sostituzione [7].

In particolare la sostituzione [6] si può dedurre dalla [7] ponendo

$$\alpha_{41}=\alpha_{42}=\alpha_{43}=0, \quad \alpha_{44}=1, \quad x_i=X_i=1, \quad \alpha_{11} = \frac{\cos I1'}{\cos I1}, \dots, \quad \alpha_{14}=x'_1, \ \alpha_{24}=x'_2, \ \alpha_{34}=x'_3,$$

e il modulo può scriversi (essendo $\cos I2 = 0, \dots$)

$$\begin{vmatrix} \cos I1' & \cos I2' & \cos I3' \\ \cos II1' & \cos II2' & \cos II3' \\ \cos III1' & \cos III2' & \cos III3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos I1 & \cos I2 & \cos I3 \\ \cos II1 & \cos II2 & \cos II3 \\ \cos III1 & \cos III2 & \cos III3 \end{vmatrix},$$

ovvero (cfr. nota a pag. 4)

$$\operatorname{sen} I\,II\,III \,.\, \operatorname{sen} 1'2'3' : \operatorname{sen} I\,II\,III \,.\, \operatorname{sen} 1\,2\,3 = \operatorname{sen} 1'\,2'\,3' : \operatorname{sen} 1\,2\,3 = \sqrt{\frac{\Omega'}{\Omega}};$$

onde si deduce la relazione

$$\frac{A'}{\Omega'} = \frac{A}{\Omega}$$

accennata nel testo.

Se gli assi nuovi sono ortogonali si ha

$$\frac{D}{\Omega}=a'_{11}+a'_{22}+a'_{33},\quad \frac{C}{\Omega}=B'_{11}+B'_{22}+B'_{33},\quad \frac{B}{\Omega}=B',\quad \frac{A}{\Omega}=A'.$$

E se anche gli assi primitivi sono ortogonali, si ha

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a'_{11}+a'_{22}+a'_{33},\quad B_{11}+B_{22}+B_{33}=B'_{11}+B'_{22}+B'_{33},$$

$$B=B',\qquad A=A'.$$

Per assi ortogonali l'equazione $\Delta(\rho)=0$ prende la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\rho \end{vmatrix}=0,$$

ovvero

$$\rho^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\rho^2+(B_{11}+B_{22}+B_{33})\rho+B=0.$$

Rette e piani secanti o tangenti. Rette della quadrica.

§ 7. Se $x(x_1, x_2, x_3, 1)$, $y(y_1, y_2, y_3, 1)$ sono due punti qualunque, le coordinate di ciascuno degli ∞ punti della retta da essi individuata si possono scrivere sotto la forma

$$[1]\qquad \frac{mx_1+ny_1}{m+n},\quad \frac{mx_2+ny_2}{m+n},\quad \frac{mx_3+ny_3}{m+n},\quad 1,$$

ovvero

$$\frac{\frac{m}{n}x_1+y_1}{\frac{m}{n}+1},\quad \frac{\frac{m}{n}x_2+y_2}{\frac{m}{n}+1},\quad \frac{\frac{m}{n}x_3+y_3}{\frac{m}{n}+1},\quad 1,$$

indicando con $-\frac{m}{n}$ il rapporto delle distanze di quel punto da y e x. Ad ogni valore di $\frac{m}{n}$ corrisponde un punto, e viceversa; y corrisponde al valore ± 0; x a $\pm\infty$; il punto medio fra x e y a -1; il punto all'infinito della retta a $+1$.

A due valori opposti $\frac{m}{n}$, $-\frac{m}{n}$ corrispondono due punti coniugati

armonicamente rispetto a x e y. Le ∞ coppie di punti coniugati costituiscono una involuzione quadratica, di cui sono x e y i punti doppii (coniugati con se stessi). Il punto medio fra x e y è il punto centrale (corrispondente al punto all'infinito).

Si noti che, se x e y sono reali, a ogni valore reale di $\frac{m}{n}$ corrisponde un punto reale, e viceversa. E si noti che, se anche le coordinate dei punti x e y sono immaginarie, purchè le omologhe siano complesse-coniugate, la retta pei due punti immaginarii sarà reale, e ad ogni punto reale di essa corrisponderà come coniugato nella involuzione un punto reale (*).

Ciò premesso: siano $x(x_1, x_2, x_3, 1)$, $y(y_1, y_2, y_3, 1)$ due punti qualunque, e si domandi quanti e quali punti della retta da essi individuata appartengano anche alla quadrica rappresentata dall'equazione $f(x_1, x_2, x_3, 1) = 0$. Basta vedere per quanti e quali valori di $\frac{m}{n}$ le coordinate [1] soddisfanno alla detta equazione, cioè risolvere rispetto a $\frac{m}{n}$ l'equazione

$$f\left(\frac{mx_1 + ny_1}{m+n}, \quad \frac{mx_2 + ny_2}{m+n}, \quad \frac{mx_3 + ny_3}{m+n}, \quad 1\right) = 0;$$

la quale, se si denota con

$$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

l'espressione

$$a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{33}x_3y_3 + a_{44}x_4y_4 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{13}(x_1y_3 + x_3y_1)$$
$$+ a_{23}(x_2y_3 + x_3y_2) + a_{14}(x_1y_4 + x_4y_1) + a_{24}(x_2y_4 + x_4y_2) + a_{34}(x_3y_4 + x_4y_3),$$

si sviluppa facilmente in

$$[2] \quad f(x_1, x_2, x_3, 1)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2\, f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, & 1 \end{pmatrix}\frac{m}{n} + f(y_1, y_2, y_3, 1) = 0.$$

Importa osservare che:

$$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

(*) Basta assumere per m e n valori complessi-coniugati.

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \end{pmatrix} = x_1 f_1(y) + x_2 f_2(y) + x_3 f_3(y) + x_4 f_4(y)$$
$$= y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x);$$

ed è facile verificare che, se per un cangiamento di assi la funzione

$$a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{44} \quad \text{diviene} \quad a'_{11}X_1^2 + \ldots + a'_{44},$$

allora la

$$a_{11}x_1y_1 + \ldots + a_{44} \quad \text{diviene} \quad a'_{11}X_1Y_1 + \ldots + a'_{44}.$$

Dall'equazione [2] scaturiscono molte ed importanti conseguenze, delle quali passiamo a svolgere le principali:

1° Essendo l'equazione [2] di 2° grado nella incognita $\frac{m}{n}$, fornisce per questa due valori, onde *ogni retta ha comuni due punti con la quadrica* (*); il che si enuncia dicendo che *la quadrica è un luogo di 2° ordine.*

Se si suppone che siano reali i coefficienti di $f(x)$ (**) e i punti x, y, tali saranno ancora i coefficienti della [2]; onde i due valori di $\frac{m}{n}$ potranno essere reali e distinti, reali e coincidenti, complessi-coniugati; e quindi i due punti comuni alla retta ed alla quadrica saranno rispettivamente reali e distinti, reali e coincidenti, immaginarii. Nel 1° caso la retta sarà *secante*, nel 2° sarà *tangente*, e nel 3° le coordinate omologhe dei due punti saranno complesse-coniugate.

Se la [2] ammette più di due radici, diviene una identità; onde una retta, che abbia più di due punti comuni con la quadrica, giace tutta sulla quadrica.

2° Poichè ogni retta ha due punti comuni con la quadrica, segue che ogni piano ha comune con la quadrica ∞ punti costituenti una curva di 2° ordine, vale a dire che *ogni sezione piana d'una quadrica*

(*) Lo stesso si dimostra osservando che l'asse 1 seca la quadrica nei punti per cui $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, i quali son dati dall'equazione di 2° grado

$$f(x_1, 0, 0, 1) = a_{11}x_1^2 + 2a_{14}x_1 + a_{44} = 0;$$

e che lo stesso vale per ogni altra retta, potendo essa assumersi come asse 1 senza alterare il grado dell'equazione.

(**) D'ora in poi supporremo sempre reali i coefficienti della $f(x)$. Valga questa avvertenza una volta per tutte.

è una conica (*). Non ci fermeremo per ora a discutere quando questa conica è una ellisse (reale o immaginaria), una iperbole, una parabola, o qualche loro particolarità.

3° Supponiamo per un momento che il punto y appartenga alla quadrica. Allora uno dei valori di $\frac{m}{n}$ dati dalla [2] sarà nullo, e infatti $f(y_1, y_2, y_3, 1) = 0$; indi la [2] divisa per $\frac{m}{n}$ diverrà

$$f(x_1, x_2, x_3, 1)\frac{m}{n} + 2\,f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, 1 \end{pmatrix} = 0,$$

e darà il valore di $\frac{m}{n}$ corrispondente all'altro punto (oltre y) comune alla retta xy e alla quadrica.

4° Se anche quest'altro punto cade in y, ossia se la retta xy è tangente in y, dovrà esser nullo anche il valore di $\frac{m}{n}$ dato dall'ultima equazione; e però sarà

$$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, 1 \end{pmatrix} = 0,$$

e in coordinate omogenee

$$[3] \qquad f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Ognuno degli ∞^2 punti x, le cui coordinate soddisfanno a questa equazione, si troverà su una retta tangente alla quadrica nel punto y; e siccome l'equazione è di 1° grado in $x_1, \ldots,$ così il luogo dei punti x è un piano.

Dunque per *un punto d'una quadrica si possono tirare* ∞ *rette tangenti ivi alla quadrica; esse giacciono in un medesimo piano* (che diremo *piano tangente* alla quadrica nel detto punto), *e for-*

(*) Lo stesso si dimostra, osservando che il piano $x_3 = 0$ seca la superficie in quei punti che verificano l'equazione di 2° grado

$$f(x_1, x_2, 0, 1) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + a_{44} = 0,$$

la quale nel piano $x_3 = 0$ rappresenta una curva di 2° ordine. Lo stesso vale per ogni altro piano, potendo esso essere scelto per piano $x_3 = 0$ senza alterare il grado dell'equazione.

mano un fascio intorno al punto (che diremo *punto di contatto* di quel piano).

A ogni punto y della quadrica corrisponde, in generale, un piano tangente ivi e di equazione [3]. Si hanno così ∞^2 piani, e la quadrica si definisce come l'*inviluppo* di essi.

Evidentemente ognuna delle rette del fascio dianzi considerato incontra la curva che il piano tangente ha comune con la quadrica in due punti coincidenti in y; il che non può avvenire se non quando questa curva si scinda in due rette incrociate in y. Dunque *ogni piano tangente ha comune con la quadrica una coppia di rette incrociate nel punto di contatto.*

Viceversa, un piano che abbia comuni con la quadrica due rette, è tangente nel loro punto comune. Dunque *per ogni punto della quadrica passano due rette giacenti sulla quadrica.*

5° Il punto e il piano tangente si chiamano *ellittici*, *iperbolici*, *parabolici*, secondo che le due rette sono distinte e immaginarie, distinte e reali, coincidenti e reali. E si può dimostrare che, in generale, *quale è un punto della quadrica, tali sono tutti.*

P. es., se un punto x è iperbolico, ciascuno dei due piani che proiettano da un altro punto y della quadrica le due rette reali e distinte incrociate in x, deve aver comune con la quadrica anche un'altra retta reale; sicchè per y passano due rette reali giacenti sulla quadrica. Esse sono distinte; altrimenti coinciderebbero colla xy, e per x passerebbero tre rette della quadrica, caso che per ora escludiamo. Dunque y è iperbolico anch'esso.

Una delle due rette per y incontra dunque una sola delle due rette per x, e l'altra l'altra; sicchè le quattro rette costituiscono un quadrilatero (non piano) sulla quadrica. Facendo variare prima y e poi x, vediamo dunque che *sopra una quadrica a punti iperbolici esistono due sistemi di* ∞ *rette reali*, tali che: 1° per ciascun punto della quadrica passa una retta dell'un sistema e una dell'altro; 2° tutte le rette di un sistema incontrano ciascuna dell'altro; 3° due rette di un sistema non han punto comune e non stanno in uno stesso piano, e però le chiameremo *sghembe* (l'una rispetto all'altra).

Date tre rette di un sistema, una retta che si muova appoggiandosi ad esse genera la quadrica. La quadrica perciò dicesi *rigata*; e dicesi *sghemba* (*gobba*, *storta*), perchè due posizioni per quanto prossime della retta generatrice sono sghembe. Anzi la quadrica è due volte sghemba.

È facile vedere che le rette di un sistema determinano su due rette fisse dell'altro punteggiate proiettive; e che i piani per le rette di un sistema e rispettivamente per due rette fisse dell'altro formano due fasci proiettivi. Di più quelle punteggiate sono proiettive a questi fasci. La quadrica può considerarsi come generata due volte in ∞^2 modi dalle rette che uniscono i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive sghembe, ovvero dalle rette comuni ai piani corrispondenti di due fasci proiettivi sghembi.

Viceversa: *una retta, che si muova appoggiandosi a tre rette date sghembe, genera una quadrica rigata sghemba;* poichè tre posizioni della retta mobile segnano sulle tre rette date $3 . 3 = 9$ punti, i quali individuano una quadrica (§ 2); e questa, passando per tre punti di ciascuna retta data, contiene queste tre rette. Ancora: *una retta mobile individuata dagli elementi corrispondenti di due punteggiate proiettive sghembe, o di due fasci proiettivi e sghembi di piani, genera una quadrica rigata sghemba*; poichè per tre posizioni della retta mobile passa una quadrica, che contiene le due rette punteggiate o assi di fasci e tutte le altre posizioni della retta mobile.

Se un punto d'una quadrica è ellittico, si dimostra similmente che tali sono tutti; e le cose dette sussistono, con la restrizione che le rette sono immaginarie. La quadrica allora non è rigata.

Se un punto d'una quadrica è parabolico, un altro punto qualunque non potrà essere nè ellittico nè iperbolico, altrimenti tale sarebbe anche il primo; dunque o sarà parabolico, o per esso passeranno più di due rette, caso che tratteremo fra poco.

6° Rimoviamo ora la supposizione che il punto y stia sulla quadrica: allora la retta xy sarà tangente quando la [2] darà per $\frac{m}{n}$ due valori uguali, quando cioè sarà soddisfatta l'equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, 1) . f(y_1, y_2, y_3, 1) - \left\{ f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, 1 \end{pmatrix} \right\}^2 = 0,$$

o sotto forma omogenea

$$[4] \qquad f(x) . f(y) - f^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Dunque *la* [4] *è la condizione perchè la retta xy tocchi la quadrica.*

Se y è dato, la [4] è soddisfatta da ∞^2 posizioni del punto x; e, poichè essa è di 2° grado, tali posizioni costituiscono un luogo di

2° grado. Questo luogo non può essere che un cono di vertice y; poichè è evidente che, se x è un punto del luogo, ogni punto della retta xy appartiene al luogo, e però tutta la retta appartiene al luogo, il quale risulta quindi composto di ∞ rette uscenti dal punto y. Dunque *il luogo delle tangenti condotte per un punto a una quadrica è un cono di 2° ordine*, il quale dicesi *circoscritto* alla quadrica dal punto y, o anche il cono secondo cui la quadrica è *vista* dal punto y. Le generatrici di questo cono sono le coppie di tangenti che pel punto y possono tirarsi alle coniche che la quadrica ha nei piani per y.

Non ci fermiamo ora a discutere le varie specie di coni circoscritti alla quadrica, nè ad esaminare quando essi siano reali e quando immaginarii. Solo accenniamo che il punto dicesi *esterno* o *interno* alla quadrica, secondochè il cono da esso circoscritto è reale o immaginario; e che se il punto è sulla quadrica, il cono si riduce al piano ivi tangente contato due volte.

Punti coniugati, poli e piani polari, rette coniugate.

§ 8. 1° Se i valori di $\frac{m}{n}$ dati dalla [2] del § 7 sono opposti, i due punti in cui la retta xy seca la quadrica sono coniugati armonicamente rispetto a x e y, e quindi anche x e y sono coniugati armonicamente rispetto a quei due punti, e si possono dire semplicemente *coniugati* rispetto alla quadrica. Ora la condizione perchè i due valori di $\frac{m}{n}$ siano opposti è evidentemente

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, & 1 \end{pmatrix} = 0\,,$$

e in coordinate omogenee

$$[1] \qquad \begin{cases} \mathrm{f}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ovvero } \mathrm{f}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \\ x_1\mathrm{f}_1(y) + x_2\mathrm{f}_2(y) + x_3\mathrm{f}_3(y) + x_4\mathrm{f}_4(y) = 0, \\ y_1\mathrm{f}_1(x) + y_2\mathrm{f}_2(x) + y_3\mathrm{f}_3(x) + y_4\mathrm{f}_4(x) = 0. \end{cases}$$

Questa è dunque la relazione che sussiste fra le coordinate di due punti coniugati.

Essa è una forma simmetrica nei due punti e bilineare nelle loro coordinate.

È chiaro che *su ogni retta esistono* ∞ *coppie di punti coniugati, costituenti una involuzione quadratica, che ha per punti doppii quelli in cui la retta incontra la quadrica.* E se la retta è reale, anche quando incontri la quadrica in punti immaginarii, ogni punto reale su essa avrà per coniugato un punto reale.

2° Se il punto y è dato, ogni punto x, le cui coordinate verifichino la [1], sarà coniugato a y; e poichè la [1] è di 1° grado in $x_1, \ldots$, segue che *ogni punto ne ha* ∞^2 *coniugati, il luogo dei quali è un piano.*

Il punto dicesi *polo* del piano, e il piano *polare* del punto (rispetto alla quadrica); o anche si dicono il punto e il piano *coniugati.* E *le coordinate omogenee del piano polare del punto* y *sono*

$$[2] \qquad f_1(y), \quad f_2(y), \quad f_3(y), \quad f_4(y).$$

Se il punto è reale, il piano polare è reale; se il punto è immaginario, il piano polare è immaginario.

In particolare: se il punto cade nell'origine, l'equazione del piano polare è

$$f_4(x) = 0.$$

Il polo non cade nel piano polare, se non quando è un punto della quadrica; nel qual caso l'equazione del piano polare s'identifica con quella del piano tangente in quel punto (*).

Va notato che il piano polare d'un punto y è il luogo delle rette polari di y rispetto alle coniche che la quadrica ha nei piani per y.

3° L'equazione [4] § 7 del cono circoscritto da un punto y alla quadrica, è soddisfatta dagli ∞ punti comuni alla quadrica e al piano polare di y, poichè questi punti annullano $f(x)$ e $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; sicchè essi sono i punti di contatto delle ∞ tangenti condotte da y alla quadrica. In altre parole: *le tangenti condotte da un punto alla quadrica costituiscono un cono di 2° ordine, il quale è circoscritto alla quadrica lungo la conica che questa ha nel piano polare del punto* (**).

(*) Del resto è chiaro che ogni punto su una retta tangente in y ha y per coniugato, onde i punti del piano tangente in y son tutti coniugati a y.

(**) Lo stesso risulta dall'osservare che, se una retta per y tocca la quadrica in x, allora y ha per coniugato x sulla retta, onde x sta sul piano polare di y.

Il cono e la conica sono insieme reali o insieme immaginarii.

E la conica è il *contorno apparente* della quadrica rispetto al punto.

Se x è un punto di questa conica, il piano per la tangente alla conica in x e per la retta xy (tangente alla quadrica in x) tocca in x così la quadrica come il cono, e intanto passa per y; mentre un piano che tocchi la quadrica in un punto fuori la detta conica non passa per y. Adunque: *per un dato punto passano ∞ piani tangenti alla quadrica, e il loro inviluppo è il cono circoscritto dal punto alla quadrica.*

4° Due punti coniugati x, y sono in condizione reciproca l'uno rispetto all'altro. Sia da questo fatto, sia dalla simmetria della [1] nelle coordinate dei due punti, risulta il teorema importante: *se un punto sta nel piano polare d'un altro, viceversa, questo sta nel piano polare di quello.*

Un piano è individuato da tre suoi punti; i piani polari di questi tre punti individuano intersecandosi un punto; e il piano polare di questo punto dovendo (per l'ultimo teorema) contenere i primi tre punti, sarà appunto il piano da essi individuato. Dunque: *in generale, come ogni punto ha il suo piano polare, così ogni piano ha il suo polo.*

Tutti i punti d'un piano hanno i piani polari passanti pel polo del piano; e tutti i piani passanti per un punto hanno i poli nel piano polare del punto.

5° Siano due punti x, y, e i loro piani polari u, v. Ogni piano per la xy ha il polo in u e in v, e quindi sulla retta uv; e ogni piano per la retta uv ha il polo in tutti i piani polari dei punti della uv, e quindi sulla xy. Onde *le due rette son tali, che i piani polari dei punti dell'una fanno fascio intorno all'altra, e viceversa;* l'una è il luogo dei poli dell'altra rispetto alle coniche che la quadrica ha nei piani per quest'altra, e viceversa. Cotali due rette diremo *coniugate* o *polari* l'una dell'altra rispetto alla quadrica.

Ad ogni retta dello spazio corrisponde una coniugata; e la corrispondenza è univoca e reciproca.

Due rette coniugate in generale sono sghembe. Qualora s'incontrino, il punto comune sarà polo del piano comune, ossia il punto starà sulla quadrica e il piano la toccherà; quindi le due rette coniugate toccheranno la quadrica, ed inoltre saranno in armonia con le due rette che la quadrica ha nel piano tangente.

Le rette autoconiugate sono quelle che giacciono sulla quadrica.

6° Consideriamo una retta e la sua coniugata. I piani tangenti nei due punti ove questa seca la quadrica hanno per poli questi due punti, e quindi passano per la prima retta; e niun altro piano tangente gode la stessa proprietà.

Dunque *per una retta data passano due piani tangenti alla quadrica*, ovvero *la quadrica è di 2ª classe.*

I due piani possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, immaginarii, come quei due punti. Nel 2° caso anche la retta data è tangente alla quadrica.

Che se la retta data giace sulla quadrica, allora ogni piano per essa deve aver comune con la quadrica anche un'altra retta, e quindi è tangente alla quadrica.

7° Diremo *coniugati* un punto e una retta, quando il piano polare del punto passa per la retta, e quindi ogni punto della retta ha il piano polare passante pel punto; insomma quando il punto è sulla coniugata della retta.

E diremo *coniugati* un piano e una retta, quando il polo del piano è sulla retta, e quindi ogni piano per la retta ha il polo nel piano; insomma quando il piano passa per la coniugata della retta.

8° Osservammo che *in ogni retta esistono* ∞ *coppie di punti coniugati.*

In ogni piano esistono ∞^3 *terne di punti coniugati* (a due a due), vertici dei triangoli autoconiugati rispetto alla conica che la quadrica ha nel piano.

Nello spazio esistono ∞^5 *coppie di punti coniugati*, ∞^6 *terne di punti coniugati*, *e* ∞^6 *quaderne di punti coniugati*; vertici questi di tetraedri *autoconiugati*, cioè tali che ciascun vertice sia polo della faccia opposta. Ogni punto, con una terna di punti coniugati nel suo piano polare, costituisce una quaderna.

Casi in cui la quadrica è un cono, o un cilindro, o una coppia di piani.

§ 9. La proprietà, che ad ogni punto corrisponde un unico piano polare rispetto alla quadrica (e in particolare ad ogni punto della quadrica corrisponde un unico piano tangente ivi), non regge più in tutta la sua generalità, allora, e solo allora, quando esiste qualche punto y le cui coordinate annullino tutti quattro i coefficienti del-

l'equazione del suo piano polare; poichè questa equazione allora si riduce alla identità $0 = 0$, e quindi non rappresenta più un piano determinato. Ora i coefficienti nell'equazione del piano polare del punto y sono (cfr. [1] § 8) $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(y)$, $f_4(y)$; e la condizione affinchè si annullino queste semiderivate, cioè coesistano le equazioni

$$[1] \qquad f_1(y) = 0, \quad f_2(y) = 0, \quad f_3(y) = 0, \quad f_4(y) = 0,$$

è (§ 4) che sia nullo il discriminante A.

1° Quando A è nullo, ma non son nulli tutti i suddeterminanti complementari degli elementi di ciascuna sua verticale; allora le quattro equazioni [1] equivalgono a tre sole indipendenti (*); esse determinano i mutui rapporti di y_1, y_2, y_3, y_4, e si ha indifferentemente

$$[2] \qquad \begin{aligned} y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &:: A_{11} : A_{12} : A_{13} : A_{14} \\ &:: A_{21} : A_{22} : A_{23} : A_{24} \\ &:: A_{31} : A_{32} : A_{33} : A_{34} \\ &:: A_{41} : A_{42} : A_{43} : A_{44} \\ &:: \sqrt{A_{11}} : \sqrt{A_{22}} : \sqrt{A_{33}} : \sqrt{A_{44}}, \end{aligned}$$

dando ai radicali segni convenienti.

Determinato così il punto y in questione, osserviamo che la identità [1] § 3 applicata ad y dà $f(y) = 0$, onde y sta sulla quadrica. Ogni piano per y è dunque un piano tangente ivi alla quadrica, e quindi ha in comune con la quadrica due rette (reali o immaginarie) incrociate in y. Adunque la quadrica è un cono, ed il punto y ne è il vertice.

Conchiudiamo che *la quadrica rappresentata dall'equazione di 2° grado* $f(x) = 0$ *è un cono, quando è nullo il suo discriminante* A. Allora *le* [2] *danno le coordinate del vertice del cono.*

Vedremo poi quando il cono risulta da ∞ rette reali, e quando queste sono immaginarie, il vertice restando sempre reale. Nel 1° caso il cono sarà *rigato* (in un sol modo), e sarà una superficie *sviluppabile.*

(*) Come guida alla presente discussione ed alle analoghe che faremo in seguito, veggasi in fondo al volume la nota: Sui sistemi di equazioni lineari omogenee.

Intanto è facile scorgere che nel cono hanno luogo le seguenti proprietà speciali:

Ciascun piano dello spazio può considerarsi come polare del vertice, e il piano polare di ciascun altro punto passa pel vertice.

Tutti i punti di una stessa retta pel vertice hanno lo stesso piano polare; e a tutti i punti d'una generatrice corrisponde uno stesso piano tangente, che passa per essa e incontra il cono lungo due rette coincidenti con essa, cioè un piano tangente lungo tutta la generatrice; sicchè ogni punto del cono è parabolico, tranne il vertice che è un punto *singolare* (punto *doppio*).

Di due rette coniugate una passa certo pel vertice. Ai punti d'una stessa retta pel vertice corrisponde una stessa coppia di piani tangenti parabolici, la quale fa anche da cono circoscritto da ciascuno dei punti medesimi. A una retta pel vertice corrisponde come coniugata ciascuna retta nel piano polare di quella, ecc.

I piani che passano rispettivamente per due rette fisse del cono e per una stessa retta mobile del cono, formano due fasci proiettivi.

Viceversa, due fasci proiettivi di piani i cui assi s'incontrino generano un cono di 2° ordine mediante la retta comune a due piani corrispondenti variabili; poichè il punto comune ai due assi preso come vertice, più un altro punto per ciascun asse e per tre posizioni della retta variabile, individuano un cono di 2° ordine (§ 2), il quale dunque contiene tutte le posizioni della retta mobile.

2° Se son nulli A ed uno (e quindi ciascuno) dei suddeterminanti A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}, senza che siano nulli A_{h1}, A_{h2}, A_{h3} $(h=1,2,3)$; allora il vertice va all'infinito, e *il cono diviene un cilindro.*

Lasciamo al lettore l'esame delle modificazioni che subiscono le proprietà del cono nel caso del cilindro e nei seguenti.

3° Possono le equazioni [1] ridursi a due sole indipendenti. Allora sono nulli A e tutti i suoi suddeterminanti di 3° ordine $A_{11}, \ldots$, e perciò basta supporre nulli tre suddeterminanti tali, che uno fra essi abbia l'un indice comune con uno dei rimanenti due suddeterminanti e l'altro con l'altro; ma uno almeno dei suddeterminanti di 2° ordine esiste. Vi sono quindi ∞ punti come y, il cui luogo è la retta rappresentata da quelle due equazioni; e la quadrica è un cono, di cui ciascuno di quei punti è vertice; vale a dire *la quadrica è una coppia di piani* (distinti e reali o immaginari) secantisi lungo quella retta.

4° Possono anche le equazioni [1] ridursi a una sola indipendente. Allora son nulli A e tutti i suoi suddeterminanti di 3° e 2° or-

dine e perciò basta supporre nulli sei fra' suddeterminanti di 2° ordine; ma almeno uno degli elementi di A esiste; e la quadrica è un cono con ∞^2 vertici, il luogo dei quali è il piano rappresentato da quella equazione; onde *la quadrica si riduce a quel piano contato due volte.*

Nel caso presente si ha

$$f(x) = \frac{f_1^2(x)}{a_{11}} = \frac{f_2^2(x)}{a_{22}} = \frac{f_3^2(x)}{a_{33}} = \frac{f_4^2(x)}{a_{44}}.$$

Va notato che *il cono che proietta una data conica da un punto dato fuori del suo piano è di 2° ordine*, poichè il dato punto come vertice e cinque punti della conica individuano un cono di 2° ordine (§ 2-5°), e questo contiene la conica. Il cono è reale o immaginario come la conica, e si scinde in due piani quando la conica degenera in due rette.

Da ultimo si può osservare che, se per una trasformazione di coordinate

$$a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{44} \qquad \text{diviene} \qquad a'_{11}X_1^2 + \ldots + a'_{44},$$

si avrà l'identità

$$a_{11}x_1^2 + \ldots + (a_{44} + \rho) = a'_{11}X_1^2 + \ldots + (a'_{44} + \rho)$$

qualunque sia ρ; or se ρ annulla il discriminante del 1° membro, dovrà annullare anche quello del 2°, e però sarà insieme

$$A + B\rho = 0, \qquad A' + B'\rho = 0,$$

onde

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}, \quad \text{e quindi anche (cfr. § 6)} \quad \frac{A}{\Omega} = \frac{A'}{\Omega'},$$

come già annunziammo.

Polo d'un piano. La quadrica come inviluppo.

§ **10**. Cerchiamo le coordinate del polo del piano $u(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Osserviamo che, dette x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate del polo, quelle del piano polare sono (§ 8-2°) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$; e però dovranno queste esser proporzionali a u_1, u_2, u_3, u_4, ovvero

$$\frac{f_1(x)}{u_1} = \frac{f_2(x)}{u_2} = \frac{f_3(x)}{u_3} = \frac{f_4(x)}{u_4}.$$

Per risolvere queste tre equazioni è utile ricorrere al seguente artifizio, che spesso riesce quando le equazioni consistono di rapporti

uguali: indicando con ρ il comune valore incognito dei quattro rapporti, avremo

$$[1] \quad f_1(x) = \rho u_1\,, \quad f_2(x) = \rho u_2\,, \quad f_3(x) = \rho u_3\,, \quad f_4(x) = \rho u_4\,,$$

e da queste 4 equazioni lineari ricaveremo

$$[2] \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\rho}{A}\,(A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4), \\ x_2 = \frac{\rho}{A}\,(A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 + A_{24}u_4), \\ x_3 = \frac{\rho}{A}\,(A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 + A_{34}u_4), \\ x_4 = \frac{\rho}{A}\,(A_{41}u_1 + A_{42}u_2 + A_{43}u_3 + A_{44}u_4); \end{cases}$$

ove ρ è del tutto arbitrario. *Le* [2] *danno le coordinate del polo del piano u.*

In particolare: il piano u sarà tangente alla quadrica se il polo starà sul piano, cioè se avrà luogo anche l'equazione

$$[3] \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0\,;$$

nella quale ponendo i valori [2] di $x_1, \ldots,$ si trova

$$(A_{11}u_1+A_{12}u_2+A_{13}u_3+A_{14}u_4)u_1+(A_{21}u_1+A_{22}u_2+A_{23}u_3+A_{24}u_4)u_2$$
$$+(A_{31}u_1+A_{32}u_2+A_{33}u_3+A_{34}u_4)u_3+(A_{41}u_1+A_{42}u_2+A_{43}u_3+A_{44}u_4)u_4=0,$$

ovvero

$$[4] \qquad A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + A_{44}u_4^2$$
$$+2A_{12}u_1u_2+2A_{13}u_1u_3+2A_{23}u_2u_3+2A_{14}u_1u_4+2A_{24}u_2u_4+2A_{34}u_3u_4=0.$$

Questa è dunque l'equazione cui soddisfanno le coordinate di ciascun piano che tocchi la quadrica; sicchè essa può dirsi *l'equazione tangenziale della quadrica*, o *l'equazione della quadrica in coordinate di piani*, o l'equazione della quadrica considerata come inviluppo di piani (§ 7-4°).

Indicheremo il primo membro della [4] con

$$F(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4) \quad \text{o anche} \quad F(u).$$

Questa forma quadratica quaternaria si deduce dalla $f(x)$ mutando le variabili $x_1, \ldots$ nelle $u_1, \ldots$ e i coefficienti $a_{11}, a_{12}, \ldots$ nei loro reciproci o aggiunti $A_{11}, A_{12}, \ldots$; per la qual relazione la $F(u)$ riceve il nome di forma *reciproca* o *aggiunta* alla $f(x)$.

Se operiamo sui coefficienti della $F(u)$ come già operammo su quelli della $f(x)$ per ottenere essa $F(u)$, e se poi mutiamo le $u_1, \ldots$ nelle $x_1, \ldots$; allora, a causa delle [4] § 4, ritroviamo la $f(x)$ col fattore A^2.

Indichiamo con

$$F_1(u_1, u_2, u_3, u_4), \quad F_2(u_1, u_2, u_3, u_4), \quad F_3(u_1, u_2, u_3, u_4), \quad F_4(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

o anche con

$$F_1(u), \qquad F_2(u), \qquad F_3(u), \qquad F_4(u)$$

le semiderivate parziali dalla $F(u)$ rispetto a u_1, u_2, u_3, u_4: allora per coordinate del polo x d'un piano u possiamo assumere queste semiderivate, giusta le (2); *e però l'equazione del polo di un piano v* (in coordinate di piani u_1, u_2, u_3, u_4) *è*

$$[5] \qquad u_1F_1(v) + u_2F_2(v) + u_3F_3(v) + u_4F_4(v) = 0;$$

la quale è formata sulla $F(u)$ come l'equazione del piano polare d'un punto y è formata sulla $f(x)$, e però la indicheremo con

$$F\begin{pmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{o anche} \quad F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

La $F(u)$ si potrebbe anche ottenere direttamente sotto forma di determinante, osservando che, quando il piano u è tangente, le equazioni [1] con la [3] costituiscono un sistema di cinque equazioni lineari omogenee in x_1, x_2, x_3, x_4, ρ, soddisfatte da valori non tutti nulli delle variabili; onde sarà nullo il loro determinante, ovvero

$$[6] \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questo determinante non può differire che per un fattor numerico dalla $F(u)$, ed infatti è facile vedere che esso vale $-F(u)$ (*).

(*) Analogamente si ha, tenendo presenti le [2] e [3],

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = -A^2 f(x).$$

Si noti che, se x è il polo di u,

$$\begin{aligned} F(u) &= u_1F_1(u) + u_2F_2(u) + u_3F_3(u) + u_4F_4(u) \\ &= \frac{A}{\rho}(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4) \quad \text{per le [2]}, \\ &= \frac{A}{\rho^2}[f_1(x)x_1 + f_2(x)x_2 + f_3(x)x_3 + f_4(x)x_4] \quad \text{per le [1]}, \\ &= \frac{1}{\rho^2}Af(x); \end{aligned}$$

il che prova che, come A e $f(x)$, così anche $F(u)$ *conserva il proprio segno dopo ogni trasformazione di coordinate.*

In particolare, prendendo $\rho = 1$ si ottiene l'identità

$$[7] \qquad F\{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)\} = Af(x).$$

Quando la quadrica è un cono ($A = 0$), la sua equazione in coordinate di piani deve ridursi all'equazione del vertice contato due volte: infatti allora si ha (cfr. le [2] § 9)

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{A_{hh}}(A_{h1}u_1 + A_{h2}u_2 + A_{h3}u_3 + A_{h4}u_4)^2 \quad (h=1, 2, 3, 4) \\ &= (\sqrt{A_{11}}u_1 + \sqrt{A_{22}}u_2 + \sqrt{A_{33}}u_3 + \sqrt{A_{44}}u_4)^2 \end{aligned}$$

Cenno sulle figure polari-reciproche.

§ **11.** L'analogia fra le equazioni $f(x) = 0$, $F(u) = 0$ e quella fra i loro significati geometrici, non che l'analogia fra la equazione del piano polare di un punto e quella del punto polo di un piano, si collegano alla corrispondenza che mediante la quadrica si può stabilire fra gli elementi punto e piano dello spazio, e quindi fra le forme geometriche da essi rispettivamente generate.

Infatti, a ognuno degli ∞^3 punti dello spazio corrisponde un piano, cioè il suo polare rispetto alla quadrica; e ad ognuno degli ∞^3 piani corrisponde un punto, cioè il suo polo. Agli ∞^2 punti d'un piano (piano punteggiato) corrispondono gli ∞^2 piani per un punto (stella di piani), e viceversa. Agli ∞ punti d'una retta (retta punteggiata) corrispondono gli ∞ piani per la retta coniugata (fascio di piani), e viceversa; e il rapporto anarmonico di 4 di quei punti eguaglia

quello dei 4 piani corrispondenti (*). Alle ∞^2 rette per un punto (stella di rette) corrispondono le ∞^2 rette nel suo piano polare (piano rigato), e viceversa. Alle ∞ rette per un punto in un piano (fascio di rette) corrispondono le ∞ rette nel piano polare del punto e pel polo del piano (altro fascio di rette), e viceversa.

A un sistema di punti, piani e rette corrisponde un sistema di altrettanti piani, punti e rette. Per es. ai vertici, alle facce, agli spigoli d'un tetraedro corrispondono le facce, i vertici, gli spigoli di un altro tetraedro; e i vertici di ciascuno dei due tetraedri sono poli delle facce dell'altro (tetraedri *coniugati*). I due tetraedri possono coincidere in uno (*autoconiugato*), come al § 9-7°.

Agli ∞^2 punti d'una superficie corrispondono ∞^2 piani inviluppanti un'altra superficie, che dicesi *polare-reciproca* o *coniugata* alla prima; e a questa come luogo corrisponde quella come inviluppo; l'ordine dell'una è uguale alla classe dell'altra. P. es., ad una quadrica (2° ordine e 2ª classe) corrisponde come polare-reciproca un'altra quadrica (2ª classe e 2° ordine); ed è chiaro che ad un punto ed al suo piano polare rispetto alla prima corrispondono un piano ed il suo polo rispetto alla seconda; a due punti coniugati rispetto alla prima corrispondono due piani coniugati rispetto alla seconda, e viceversa: a due rette coniugate rispetto alla prima corrispondono due rette coniugate rispetto alla seconda, ecc.

In particolare: agli ∞^2 punti della quadrica $f(x) = 0$ corrispondono i rispettivi ∞^2 piani tangenti alla medesima in quei punti (piani *della* quadrica), e viceversa; onde la quadrica è polare-reciproca di sè stessa; ai due punti (distinti o coincidenti) comuni ad una retta e alla quadrica corrispondono i due piani (distinti o coincidenti) condotti per la retta coniugata a toccar la quadrica, e viceversa; agli ∞ punti della conica comune a un piano ed alla quadrica corrispondono gli ∞ piani condotti pel polo del piano a toccar la quadrica e inviluppanti un cono di 2° grado; agli ∞ punti d'una curva non piana sulla quadrica corrispondono gli ∞ piani tangenti ivi alla quadrica e costituenti una superficie sviluppabile circoscritta alla quadrica; ecc.

Agli ∞ punti d'una curva in un piano corrispondono ∞ piani inviluppanti un cono, che ha per vertice il polo di quel piano; le generatrici del cono corrispondono alle tangenti della curva, e al cono come luogo corrisponde la curva come inviluppo dei piani per le sue tangenti.

(*) Per la dimostrazione cfr. Con. § 24.

Agli ∞ punti d'una curva non piana corrispondono ∞ piani che determinano una superficie sviluppabile; le generatrici della sviluppabile corrispondono alle tangenti della curva, ed alla sviluppabile come luogo corrisponde la curva come inviluppo dei piani per le sue tangenti; ai punti della curva cuspidale della sviluppabile corrispondono i piani osculatori alla curva data; onde alla curva cuspidale corrisponde la sviluppabile osculatrice della curva data.

Questa corrispondenza dicesi *reciprocità polare*, ed è un caso speciale della *legge di dualità*.

Per es. alle cose dette nei §§ 7 e 10 corrisponde quanto segue:

Un inviluppo, la cui equazione (in coordinate di piani) sia $f(u) = 0$, è una superficie di 2ª classe; essa è anche di 2° ordine, ossia è una quadrica; e la sua equazione come luogo (in coordinate di punti) è $F(x) = 0$.

Quando $A = 0$ (cfr. § 9), l'inviluppo riducesi a una conica, considerata come inviluppo dei piani che fanno fascio intorno alle sue tangenti (quadrica *limite* o *piana*). Essa giace nel piano

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 :: A_{h1} : A_{h2} : A_{h3} : A_{h4} \quad (h = 1, 2, 3, 4)$$
$$:: \sqrt{A_{11}} : \sqrt{A_{22}} : \sqrt{A_{33}} : \sqrt{A_{44}},$$

e la $F(x) = 0$ riducesi all'equazione del piano contato due volte. La conica può scindersi in due punti distinti reali o immaginarii, o in un punto doppio reale.

Lasciamo al lettore l'esame delle modificazioni che subiscono le proprietà dei poli e piani polari, ecc. nel caso di una quadrica piana. Esse corrispondono per dualità a quelle del cono.

Ancora (cfr. § 2): *una quadrica è individuata quando ne sono dati nove piani tangenti*, ed è facile formarne l'equazione come inviluppo.

Piani tangenti, piani coniugati.

§ **12**. Accenniamo ciò che corrisponde per dualità alle considerazioni svolte nei §§ 7, 8.

Dati due piani u, v, un piano qualunque del fascio da essi determinato ha per equazione

$$[1] \quad m(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4) + n(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4) = 0,$$

e per coordinate

$$mu_1 + nv_1, \quad mu_2 + nv_2, \quad mu_3 + nv_3, \quad mu_4 + nv_4,$$

indicando con $\frac{m}{n}$ un rapporto variabile da piano a piano (*). Per $\frac{m}{n} = 0$ si ha il piano v; per $\frac{m}{n} = \infty$ si ha u; per due valori opposti di $\frac{m}{n}$ si hanno due piani armonicamente coniugati rispetto a u e v.

Le ∞ coppie di tali piani armonici costituiscono una involuzione quadratica, della quale sono u, v i piani doppi. E si noti che, se le coordinate omologhe di u, v sono complesse-coniugate, la retta asse del fascio sarà reale, e ad ogni piano reale per essa corrisponderà come coniugato nella involuzione un piano reale.

Ciò posto: quei piani per la retta uv che toccano la quadrica soddisfanno all'equazione

$$F(mu_1 + nv_1, \quad mu_2 + nv_2, \quad mu_3 + nv_3, \quad mu_4 + nv_4) = 0,$$

che si sviluppa in

$$[2] \qquad F(u)\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\frac{m}{n} + F(v) = 0.$$

1° Questa equazione di 2° grado in $\frac{m}{n}$ conferma che per una retta si possono condurre due piani tangenti alla quadrica, cioè che *la quadrica è di 2ª classe.*

E dalle [1] e [2] eliminando $\frac{m}{n}$, si ottiene *l'equazione complessiva dei due piani tangenti per la retta uv*:

$$[3] \quad F(u).(v_1x_1+\ldots)^2 - 2F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.(v_1x_1+\ldots)(u_1x_1+\ldots) + F(v).(u_1x_1+\ldots)^2 = 0.$$

Per dualità, *l'equazione complessiva dei due punti d'incontro della quadrica con la retta xy è* (cfr. § 7)

$$[4] \; f(x).(y_1u_1+\ldots)^2 - 2f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.(y_1u_1+\ldots)(x_1u_1+\ldots) + f(y).(x_1u+\ldots)^2 = 0 \; (**).$$

(*) È il rapporto dei seni degli angoli che il piano fa coi due v, u, moltiplicato forse per un fattor numerico costante.

(**) Queste equazioni si sviluppano nelle

$$F(0, \; u_1v_2 - u_2v_1, \; u_1v_3 - u_3v_1, \; u_1v_4 - u_4v_1).x_1^2 + \ldots$$
$$+ 2F\begin{pmatrix} 0, & u_1v_2 - u_2v_1, & u_1v_3 - u_3v_1, & u_1v_4 - u_4v_1 \\ u_2v_1 - u_1v_2, & 0, & u_2v_3 - u_3v_2, & u_2v_4 - u_4v_2 \end{pmatrix}.x_1x_2 + \ldots = 0,$$

$$f(0, \; x_1y_2 - x_2y_1, \; x_1y_3 - x_3y_1, \; x_1y_4 - x_4y_1).u_1^2 + \ldots$$
$$+ 2f\begin{pmatrix} 0, & x_1y_2 - x_2y_1, & x_1y_3 - x_3y_1, & x_1y_4 - x_4y_1 \\ x_2y_1 - x_1y_2, & 0, & x_2y_3 - x_3y_2, & x_2y_4 - x_4y_2 \end{pmatrix}.u_1u_2 + \ldots = 0.$$

2° La [2] ha le due radici eguali quando

$$[5] \qquad F(u).F(v) - F^2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0\,;$$

questa è dunque la condizione affinchè la retta uv tocchi la quadrica. Quando v è dato, *la* [5] *è l'equazione* (tangenziale o in coordinate di piani) *della conica sezione del piano v con la quadrica.*

3° Quando la [2] dà per $\frac{m}{n}$ due valori opposti, i due piani tangenti per la retta uv sono armonicamente coniugati rispetto a u e v, ovvero u e v sono *coniugati* rispetto alla quadrica.

Dunque *la condizione perchè due piani siano coniugati è, sotto varie forme,*

$$[6] \qquad \left\{ \begin{array}{l} F\begin{pmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ossia} \quad F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \\ u_1F_1(v) + u_2F_2(v) + u_3F_3(v) + u_4F_4(v) = 0, \\ v_1F_1(u) + v_2F_2(u) + v_3F_3(u) + v_4F_4(u) = 0, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ (*). \end{array} \right.$$

È chiaro che due piani coniugati u, v secano la retta coniugata di uv ciascuno nel polo dell'altro; sicchè *due piani sono coniugati se il piano dell'uno cade nell'altro* (e quindi viceversa).

Quando v è dato, *la* [6] *è l'equazione del punto comune a tutti i*

(*) Il determinante vale $-F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (cfr. § 10), e si può dedurre dalle [2] § 10 con la $v_1x_1 + \ldots = 0$. Dualmente, si ha

$$\begin{vmatrix} A_{11} \ldots x_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_1 \ldots\ldots 0 \end{vmatrix} = -A^2 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si ha pure

$$f\begin{Bmatrix} f_1(x), & f_2(x), & f_3(x), & f_4(x) \\ f_1(y), & f_2(y), & f_3(y), & f_4(y) \end{Bmatrix} = A\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

piani coniugati a v, che è il polo di v. In particolare, se il piano v è tangente alla quadrica, la [6] è l'equazione del punto di contatto.

Inoltre si scorge che due piani coniugati rispetto alla quadrica sono coniugati anche rispetto a ciascuno dei coni circoscritti alla quadrica dai punti della retta loro comune.

4° *Per ciascuna retta passano ∞ coppie di piani coniugati, costituenti una involuzione quadratica, i piani doppii della quale sono quei due che toccano la quadrica.* Se la retta è reale, ad ogni piano reale per essa corrisponde un piano coniugato reale, anche se i piani doppii sono immaginari.

5° *Per ogni retta passa una coppia, sempre reale e in generale unica, di piani coniugati ortogonali.* Infatti, presa la retta per asse 3 e supposti gli assi ortogonali, due piani ortogonali per la retta sono $u_1x_1 + u_2x_2 = 0$, $u_2x_1 - u_1x_2 = 0$; e questi sono coniugati, se

$$A_{11}u_1u_2 - A_{22}u_2u_1 + 2A_{12}(u_1^2 - u_2^2) = 0 \quad \text{ossia} \quad \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^2 + \frac{A_{11} - A_{22}}{2A_{12}} \cdot \frac{u_1}{u_2} - 1 = 0,$$

equazione che fornisce per $\frac{u_1}{u_2}$ due valori reali e di prodotto -1, ai quali però corrisponde una stessa coppia di piani.

6° *Per ogni punto passano ∞^3 terne di piani coniugati*, e quindi tali che il polo di ciascuno stia sulla retta comune agli altri due. Queste terne godono la stessa proprietà rispetto al cono circoscritto dal punto dato alla quadrica.

Vedremo poi (§ 27) che fra queste terne ve ne ha in generale una, sempre reale, di piani mutuamente ortogonali; e indagheremo per quali punti passino ∞ di simili terne.

Nello spazio vi ha ∞^5 coppie di piani coniugati, ∞^6 terne di piani coniugati, ∞^6 quaderne di piani coniugati. Ogni quaderna costituisce un tetraedro autoconiugato.

Ancora delle rette tangenti o secanti.

§ 13. 1° Sia una retta data come *asse* in due piani u, v; *la condizione affinchè la retta uv tocchi la quadrica* fu già trovata (§ 12-2°) sotto la forma

$$[1] \qquad F(u).F(v) - F^2\left(\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right) = 0\,;$$

la quale può svilupparsi nella

$$\begin{aligned}&(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\,(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + \dots\\ &+ 2\,(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21})\,(u_1v_2 - u_2v_1)\,(u_1v_3 - u_3v_1) + \dots\\ &+ 2\,(A_{13}A_{21} - A_{14}A_{23})\,(u_1v_2 - u_2v_1)\,(u_3v_4 - u_4v_3) + \dots = 0;\end{aligned}$$

e questa, mercè la [5] § 4, e dopo la soppressione del fattore A, si riduce alla seguente:

$$\begin{aligned}A_{12,12}(u_1v_2-u_2v_1)^2+\dots+2A_{12,13}(u_1v_2-u_2v_1)(u_1v_3-u_3v_1)+\dots\\ +2A_{12,34}(u_1v_2-u_2v_1)(u_3v_4-u_4v_3)+\dots=0.\end{aligned}$$

Indicheremo con $\Phi(u, v)$ il 1° membro di questa equazione.

La condizione in discorso può ancora scriversi, sotto forma di determinante:

$$\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & v_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Per dimostrare direttamente quest'ultima, osserviamo che, se la retta uv tocca la quadrica in un punto x, allora il piano tangente in x passa per la uv, e quindi ha coordinate della forma

$$mu_1 + nv_1,\quad mu_2 + nv_2,\quad mu_3 + nv_3,\quad mu_4 + nv_4;$$

sicchè dovranno coesistere le seguenti equazioni, analoghe alle [1] e [3] del § 10:

$$f_1(x)=mu_1+nv_1,\quad f_2(x)=mu_2+nv_2,\quad f_3(x)=mu_3+nv_3,\quad f_4(x)=mu_4+nv_4,$$

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,\quad v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0;$$

e quindi sarà nullo il loro determinante, che è appunto quello scritto pocanzi.

Da queste equazioni si ricava che per coordinate del punto di contatto x si possono assumere i suddeterminanti complementari dei primi quattro elementi d'una linea qualunque nel detto determinante.

La retta è tangente in un punto all'infinito quando, oltre al de-

terminante, è nullo uno dei suddeterminanti complementari degli elementi della quarta linea, nel qual caso sono nulli tutti.

E la retta giace per intero sulla quadrica, quando è indeterminato il suo punto di contatto; il che avviene quando son nulli tutti i suddeterminanti relativi agli elementi d'una linea qualsiasi del determinante considerato; e perciò basta che siano nulli tre suddeterminanti complementari di elementi tali, che il 1° abbia l'indice dell'orizzontale comune col 2° e l'altro col 3°.

Siccome il primo membro della [1] è il discriminante della [2] § 12; così, quando la retta non è tangente alla quadrica, i due piani tangenti per essa saranno distinti, e reali o immaginarii secondochè

$$F(u).F(v) - F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^2 \lesseqgtr 0,$$

ovvero

$$A\Phi(u, v) \gtreqless 0.$$

2° Dualmente: sia una retta data come *raggio* per due punti x, y. *La condizione perchè la retta xy tocchi la quadrica è* (§ 7-4°)

$$[2] \qquad \varphi(x, y) = f(x).f(y) - f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^2 = 0,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = {} & (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + \ldots \\ & + 2(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(x_1y_2 - x_2y_1)(x_1y_3 - x_3y_1) + \ldots \\ & + 2(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})(x_1y_2 - x_2y_1)(x_3y_4 - x_4y_3) + \ldots = 0, \end{aligned}$$

$$A\varphi(x, y) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 & y_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 & y_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 & y_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

Si possono determinare le coordinate del piano tangente condotto per la retta, come dianzi quelle del punto di contatto.

La retta giace sulla superficie quando il piano tangente per essa è indeterminato, quando cioè son nulli tutti i suddeterminanti complementari degli elementi di una linea qualsiasi del determinante soprascritto; e perciò basta che siano nulli tre suddeterminanti complementari di elementi tali, che il 1° abbia l'un indice comune col 2° e l'altro col 3°.

Quando la retta non è tangente alla quadrica, ha comuni con questa due punti distinti, reali o immaginarii secondochè

$$\varphi(x, y) \lesseqgtr 0.$$

*§ **14**. Supponiamo noto al lettore che, per determinare una retta mediante due piani u e v, basta dare i rapporti dei binomii

$$u_1v_2 - u_2v_1 = \rho_{12}\,, \quad u_2v_3 - u_3v_2 = \rho_{23}\,, \quad u_3v_1 - u_1v_3 = \rho_{31}\,,$$
$$u_1v_4 - u_4v_1 = \rho_{14}\,, \quad u_2v_4 - u_4v_2 = \rho_{24}\,, \quad u_3v_4 - u_4v_3 = \rho_{34}\,,$$

che sono i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix};$$

e sono legati dalla relazione

$$\rho_{12}\rho_{34} + \rho_{23}\rho_{14} + \rho_{31}\rho_{24} = 0,$$

e diconsi *coordinate-assi omogenee* della retta ρ.

Dualmente: per determinare la retta mediante due punti x e y, basta dare i rapporti dei binomii

$$x_1y_2 - x_2y_1 = r_{12}\,, \quad x_2y_3 - x_3y_2 = r_{23}\,, \quad x_3y_1 - x_3y_1 = r_{31}\,,$$
$$x_1y_4 - x_4y_1 = r_{14}\,, \quad x_2y_4 - x_4y_2 = r_{24}\,, \quad x_3y_4 - x_4y_3 = r_{34}\,,$$

che sono i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

e sono legati dalla relazione

$$r_{12}r_{34} + r_{23}r_{14} + r_{31}r_{24} = 0,$$

e diconsi *coordinate-raggi omogenee* della retta r (*).

Fra i due gruppi di coordinate d'una stessa retta sussistono le relazioni

$$r_{12}\rho_{12} + r_{23}\rho_{23} + r_{31}\rho_{31} + r_{14}\rho_{14} + r_{24}\rho_{24} + r_{34}\rho_{34} = 0,$$
$$r_{12} : r_{23} : r_{31} : r_{14} : r_{24} : r_{34} :: \rho_{34} : \rho_{14} : \rho_{24} : \rho_{23} : \rho_{31} : \rho_{12}\,.$$

(*) Adottando queste notazioni, le equazioni date nella nota a pag. 40 divengono meno complicate.

Ciò posto, la condizione [1] o [2] affinchè una retta sia tangente alla quadrica può scriversi

$$\sum_{hi,pq} A_{hi,pq}\rho_{hi}\rho_{pq} = 0,$$

o

$$\sum_{hi,pq} \begin{vmatrix} a_{hp} & a_{hq} \\ a_{ip} & a_{iq} \end{vmatrix} r_{hi}\, r_{pq} = 0,$$

ove hi,pq sono due qualunque (identici o distinti) fra i gruppi

12, 23, 31, 14, 24, 34.

Poichè queste equazioni sono soddisfatte dalle coordinate di tutte e sole le rette che toccano la quadrica, ciascuna di esse può chiamarsi *la equazione della quadrica in coordinate di rette* (*). Indicheremo il primo membro della prima con

$$\Phi(\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}, \rho_{14}, \rho_{24}, \rho_{34}) \quad \text{o} \quad \Phi(\rho),$$

e le sue semiderivate parziali con $\Phi_{12}, \ldots$; e così pure indicheremo con

$$\varphi(r_{12}, r_{23}, r_{31}, r_{14}, r_{24}, r_{34}) \quad \text{o} \quad \varphi(r)$$

il primo membro della seconda, e con $\varphi_{12}, \ldots$ e le sue semiderivate parziali.

Ancora delle rette coniugate.

*§ **15**. Siano date due rette-assi uv, $u'v'$; e ne siano rispettivamente $\rho_{12}, \ldots$ e $\rho'_{12}, \ldots$ le coordinate. Le condizioni affinchè le due rette siano coniugate sono quattro, cioè

$$F\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} u \\ v' \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} u' \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad F\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = 0.$$

(*) Ovvero l'equazione della quadrica considerata come *complesso di rette*, secondo Plücker.

La quadrica non è che uno speciale complesso di 2° grado, poichè i 21 coefficienti della equazione in discorso dipendono da sole 9 quantità $a_{11} : a_{44}$, ecc.

Come una delle condizioni perchè le due rette siano coniugate può anche assumersi la seguente, che scriveremo in varie maniere:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & v_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & v_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 & 0 & 0 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sum_{hi,pq} \begin{vmatrix} a_{hp} & a_{hq} \\ a_{ip} & a_{iq} \end{vmatrix} r_{hi}\, r_{pq} = 0, \qquad \sum_{hi,pq} A_{hi,pq}\, \rho_{hi} \rho'_{pq} = 0.$$

La prima, per es., si può dimostrare con procedimento analogo a quello tenuto per la condizione di contatto; cioè: scrivere le equazioni che determinano le coordinate del polo di un piano per la prima retta $(mu_1 + nv_1, \ldots)$, e le equazioni che esprimono che questo polo giace in ciascuno dei piani u', v'; e poi tra queste sei equazioni eliminare m, n e le coordinate del polo.

Data una retta r come raggio per due punti x, y, la sua coniugata sarà determinata come asse dai piani polari di quei due punti,

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x) \quad \text{e} \quad f_1(y),\ f_2(y),\ f_3(y),\ f_4(y)\,;$$

e però si potranno assumere per coordinate-assi di tale retta i binomii come $f_h(x) . f_i(y) - f_i(x) . f_h(y)$. Ora

$$f_h(x) . f_i(y) - f_i(x) . f_h(y) = \begin{vmatrix} f_h(x) & f_i(x) \\ f_h(y) & f_i(y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & a_{h4} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{pq} \begin{vmatrix} a_{hp} & a_{hq} \\ a_{ir} & a_{iq} \end{vmatrix} r_{pq} = \varphi_{hi}\,;$$

dunque *le coordinate-assi della retta coniugata della r sono*

$$\varphi_{12},\ \varphi_{23},\ \varphi_{31},\ \varphi_{14},\ \varphi_{24},\ \varphi_{34}\,;$$

e per dualità: *le coordinate-raggi della coniugata della* ρ *sono*

$$\Phi_{12},\ \Phi_{23},\ \Phi_{31},\ \Phi_{14},\ \Phi_{24},\ \Phi_{34}.$$

Pertanto, se la r' o ρ' è coniugata alla ρ, si ha

$$r'_{pq} = \Phi_{pq} = \sum_{hi} A_{hi,pq} \rho_{hi};$$

e sostituendo nella nota relazione $\sum_{pq} r'_{pq} \rho'_{pq} = 0$ che lega le coordinate d'una retta, si ottiene

$$\sum_{hi,pq} A_{hi,pq} \rho_{hi} \rho'_{pq} = 0,$$

come avevamo enunciato.

Piani diametrali, centro, sezioni piane.

§ **16**. Esistono nello spazio ∞^2 punti all'infinito e ∞^2 rette all'infinito; e il luogo di quelli e di queste è un piano: il piano all'infinito.

A ciascun punto all'infinito corrisponde una *direzione*, cioè un sistema (stella) di rette parallele che hanno in comune quel punto. E viceversa.

A ciascuna retta all'infinito corrisponde una *giacitura*, cioè un sistema (fascio) di piani paralleli che hanno in comune quella retta. E viceversa.

Perchè un punto sia all'infinito, è necessario e sufficiente che divenga infinita una almeno delle sue coordinate Cartesiane; ossia, indicando queste con $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$, è necessario e sufficiente che sia $x_4 = 0$. In altre parole

$$x_4 = 0$$

è l'equazione del piano all'infinito; vale a dire che l'equazione generale d'un piano

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

viene a rappresentare il piano all'infinito, quando u_1, u_2, u_3 divengono nulli senza che u_4 si annulli; o ancora, per coordinate omogenee del piano all'infinito si possono assumere 0, 0, 0 e una quantità arbitraria diversa da 0.

Se

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{x_3}{\alpha_3}$$

sono le equazioni di una retta per l'origine, è chiaro che, per individuare la direzione di questa retta e delle sue parallele, bisogna e basta conoscere due dei mutui rapporti fra $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; onde le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ possono chiamarsi *coordinate omogenee della direzione* che si considera (*). E si possono assumere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0$ come coordinate cartesiane omogenee del punto all'infinito in quella direzione, poichè soddisfanno alle equazioni della retta per l'origine.

Per tutti i piani paralleli a un piano dato i mutui rapporti dei coefficienti u_1, u_2, u_3 sono dati e costanti; perciò potremo chiamare le u_1, u_2, u_3 *coordinate omogenee della giacitura* comune di quei piani.

§ **17**. L'equazione del piano polare d'un punto all'infinito $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0)$ rispetto alla quadrica $f(x) = 0$ è, sotto varie forme (§ 8-2°),

$$[1]\quad \left\{\begin{array}{c} f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0, \\ x_1 f_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0) + x_2 f_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0) + x_3 f_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0) + x_4 f_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0) = 0, \\ (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3)x_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3)x_2 \\ + (a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3)x_3 + (a_{41}\alpha_1 + a_{42}\alpha_2 + a_{43}\alpha_3)x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Questo piano biseca tutte le corde dirette a quel punto; e però *il luogo dei punti medii di un sistema di corde parallele è un piano.* Esso dicesi *piano diametrale;* e precisamente (§ 8-7°) è *coniugato* a ciascuna di quelle corde, o anche alla loro direzione.

È manifesto che la conica, secondo cui il piano seca la quadrica,

---

(*) È noto che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono proporzionali a tre funzioni lineari omogenee dei coseni degli angoli che la direzione stessa fa con gli assi coordinati. Queste funzioni si ottengono dal determinante Ω del § 4 ponendo i detti coseni invece degli elementi della 1ª o 2ª o 3ª linea; e per assi ortogonali si riducono ai coseni medesimi.

Per una retta all'infinito, se si considera come raggio pei punti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0)$, si possono assumere come coordinate-raggi

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad 0, \quad 0, \quad 0;$$

e se si considera come asse nei piani (u_1, u_2, u_3, u_4), $(0, 0, 0, 1)$, si possono assumere per coordinate-assi

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3.$$

è la curva di contatto della quadrica col cilindro circoscritto che ha le generatrici nella data direzione, cioè (§ 7-6°)

$$f(\alpha).f(x) - f^2\binom{x}{\alpha} = 0.$$

A ciascuna direzione corrisponde come coniugato un piano diametrale. In particolare, al punto $(\alpha_1, 0, 0, 0)$ corrisponde il piano $f_1(x)=0$, e così via; sicchè *le equazioni*

$$[2] \qquad f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0$$

rappresentano i piani diametrali coniugati agli assi delle coordinate.

La 2ª equazione [1] mostra che *gli* ∞^2 *piani diametrali, in generale, passano per un medesimo punto*, determinato dal sistema delle equazioni [2]. Del resto è chiaro che tutti i piani diametrali, avendo i poli nel piano all'infinito, passano pel polo del piano all'infinito.

§ 18. Il punto comune a tutti i piani diametrali evidentemente biseca tutte le corde che passano per esso; onde è un centro di simmetria, e può dirsi *centro* della quadrica.

Abbiam visto che esso è determinato dalle tre equazioni

$$[1] \qquad f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0\,;$$

risolvendo le quali si trovano *per coordinate omogenee del centro:*

$$[2] \qquad A_{14}, \quad A_{24}, \quad A_{34}, \quad A_{44} \quad \text{o} \quad B \ (^*).$$

Del resto il centro è il polo del piano all'infinito; sicchè le sue coordinate si possono ottenere ponendo $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ nelle espressioni (§ 10) delle coordinate del polo di un piano qualunque u, e si trovano appunto le [2].

L'equazione del centro è adunque

$$[3] \qquad A_{14}u_1 + A_{24}u_2 + A_{34}u_3 + A_{44}u_4 = 0,$$

(*) Le coordinate ordinarie del centro $\frac{A_{14}}{A_{44}}, \frac{A_{24}}{A_{44}}, \frac{A_{34}}{A_{44}}$, annullando le derivate della funzione $f(x_1, x_2, x_3, 1)$, rendono questa massima o minima, secondochè la funzione $\Delta(\rho)$ nella successione dei suoi coefficienti offre tutte variazioni di segno o tutte permanenze.

ovvero

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & u_4 \end{vmatrix} = 0.$$

E qui è opportuno notare le seguenti identità:

[4] $$f_h(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = 0, \quad (h = 1, 2, 3),$$

[5] $$f_4(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = a_{14}A_{14} + \ldots = A,$$

e quindi

[6] $$f(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) = A_{14}f_1(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) + \ldots = AA_{44} = AB,$$

[7] $$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ A_{14}, & A_{24}, & A_{34}, & A_{44} \end{pmatrix} = x_1 f_1(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) + \ldots = Ax_4.$$

Discutiamo ora il sistema delle equazioni [1] che determinano il centro.

1° Se A_{44} o $B \gtrless 0$: le tre equazioni [1] sono indipendenti; *il centro è unico e a distanza finita.*

2° Se A_{44} o $B = 0$, senza che tali siano A_{14}, A_{24}, A_{34}: *il centro è ancora unico, ma a distanza infinita* nella direzione (A_{14}, A_{24}, A_{34}). I piani diametrali si secano a vicenda lungo rette tutte nella suddetta direzione.

3° Se A_{44} o $B = 0$, ed anche uno dei tre A_{14}, A_{24}, A_{34} è nullo: allora sono nulli tutti quattro i determinanti $A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}$ della matrice

[8] $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix},$$

nonchè A; sicchè, se non si suppongono nulli anche tutti i determinanti di 2° ordine di questa matrice, le tre equazioni [1] si riducono a due distinte; onde tutti i piani diametrali passano per la retta rappresentata da due di quelle tre equazioni; e però *vi saranno*

∞ *centri*, allogati sulla retta medesima. Ogni piano per questa retta secherà dunque la quadrica in una coppia di rette parallele, e *la quadrica si ridurrà a un cilindro* (cfr. § 9); e quella retta ne sarà l'asse, cioè sarà il luogo dei centri di tutte le sezioni piane del cilindro.

4° Se poi son nulli cinque, e quindi tutti i suddeterminanti di 2° ordine della matrice [8], senza che siano nulli tutti i suoi elementi: allora le tre equazioni [1] si riducono ad una sola, e *vi saranno* ∞^2 *centri*, allogati sul piano che quell'equazione rappresenta. Ond'è chiaro che *la quadrica si scinderà in due piani paralleli* ed equidistanti rispetto al piano dei centri.

5° Se da ultimo son nulli tutti gli elementi della matrice [8]: le tre equazioni [1] divengono indeterminate, e ogni punto dello spazio fa da centro. Ciò è d'accordo col fatto, che allora l'equazione della quadrica diviene $a_{44}x_4^2 = 0$ ovvero $x_4^2 = 0$, e rappresenta il piano all'infinito preso due volte; ora su una retta ogni punto può essere considerato come medio fra i due punti (coincidenti) all'infinito della retta stessa.

§ **19.** 1° Nel caso A_{44} o $B \gtrless 0$, l'identità [6] § 18 prova che *il centro non cade sulla quadrica*; salvo quando $A = 0$, nel qual caso la quadrica è un cono, e il centro ne è il vertice. Del resto, il centro essendo ora a distanza finita, e quindi non cadendo nel suo piano polare che è il piano all'infinito, consegue che il centro non cade sulla quadrica, e che *il piano all'infinito seca la quadrica secondo una conica.*

E siccome pei punti all'infinito è $x_4 = 0$; così

$$[1] \qquad f(x_1, x_2, x_3, 0) = 0,$$

ossia

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

è l'equazione del cono che proietta dall'origine la conica all'infinito della quadrica. Ogni retta di questo cono seca in generale la quadrica in un punto a distanza finita e in uno a distanza infinita.

Questa conica può esser reale o immaginaria; ma, nel caso presente, non degenera in due rette. Se la conica all'infinito è immaginaria, allora la quadrica non ha punti reali all'infinito, ovvero è una superficie chiusa, e dicesi *ellissoide*; vedremo che essa può esser reale, o tutta immaginaria, o tutta immaginaria eccetto un punto reale.

Se la conica all'infinito è reale, allora la quadrica è certo reale, e si estende doppiamente all'infinito, e dicesi *iperboloide* (*).

In particolare: la sfera va fra gli ellissoidi, il cono reale fra gli iperboloidi, il cono immaginario col solo vertice reale fra gli ellissoidi.

Il centro nell'ellissoide è interno, nell'iperboloide esterno.

2° Nel caso A_{44} o $B=0$, il centro è sulla quadrica, *il piano all'infinito è tangente alla quadrica nel centro*, onde la seca secondo due rette che s'incontrano appunto nel centro sempre reale; e la quadrica è reale, e dicesi *paraboloide*. Se le due rette all'infinito sono immaginarie, il paraboloide dicesi *ellittico;* se reali, *iperbolico*.

Per un paraboloide, il cono [1] riducesi alla coppia di piani che proiettano dall'origine le due rette all'infinito del paraboloide. E infatti allora, essendo nullo B discriminante della $f(x_1, x_2, x_3, 0)$, questa si scinde in due fattori lineari ed omogenei in x_1, x_2, x_3, i quali eguagliati a zero danno le equazioni di quei due piani.

La circostanza: che *nell'equazione d'un paraboloide i termini a 2° grado in x_1, x_2, x_3 formano il prodotto di due fattori lineari*, è caratteristica pel paraboloide.

3° Un cilindro reale poi può essere *ellittico*, o *iperbolico*, o *parabolico*, secondochè il piano all'infinito lo incontra lungo due rette parallele reali e distinte, o immaginarie, o coincidenti; e quindi secondochè una sezione fatta nel cilindro con un piano non parallelo alle generatrici è una ellisse, o una iperbole, o una parabola. Esso può scindersi in due piani, sia reali, sia immaginarii ma aventi in comune una retta reale.

Nell'equazione d'un cilindro parabolico i termini a 2° grado in x_1, x_2, x_3 formano un quadrato.

4° Nel caso di due piani paralleli, questi possono essere reali e distinti, o coincidenti, o immaginarii.

Può uno dei due piani dileguare all'infinito, e allora la $f(x)$ riducesi a

$$2(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3)x_4 + a_{44}x_4^2.$$

Vanno entrambi all'infinito quando $f(x)$ riducesi a $a_{44}x_4^2$ (§ 18-5°).

(*) Trattandosi di coniche all'infinito, non è il caso di distinguerle in ellissi, iperboli e parabole; ma solo in reali e immaginarie.

Avvertiamo che è uso chiamare quadriche *a centro* gli ellissoidi, iperboloidi e coni, che hanno un centro unico a distanza finita, e quadriche *senza centro* i paraboloidi.

§ **20**. 1° Sull'ellissoide, anche se reale, non può giacere alcuna retta reale, poichè una retta si estende all'infinito; e però *ogni punto dell'ellissoide è ellittico* (§ 7-5°). Le sezioni piane son tutte ellissi, inclusa la coppia ellittica di rette (nei piani tangenti).

2° Di iperboloidi vedremo poi che ve n'è di due sorta:

L'uno iperboloide ha i punti iperbolici, ed è doppiamente rigato e sghembo (§ 7-5°). Esso ammette per sezioni piane ellissi, iperboli, parabole, anche degeneranti in due rette, ma sempre reali, ciascuna retta della superficie secando un piano qualsiasi in un punto reale. Cosicchè rispetto a questo iperboloide ogni punto che non gli appartenga è esterno.

L'altro iperboloide ha i punti ellittici; onde non contiene rette reali, ed ha per sezioni ellissi reali o immaginarie, iperboli, parabole.

3° *Il paraboloide ellittico ha tutti i punti ellittici*, essendo ellittico il punto di contatto col piano all'infinito. Non contiene rette reali, ed ha per sezioni ellissi reali o immaginarie e parabole, ma non iperboli.

Il paraboloide iperbolico ha tutti i punti iperbolici, ed è doppiamente rigato e sghembo. Esso ammette per sezioni iperboli e parabole, anche ridotte a due rette, ma non ellissi.

Presenta poi la particolarità: che *tutte le rette di un sistema sul paraboloide iperbolico sono parallele a un medesimo piano;* poichè i piani per ciascuna di queste rette e per quella retta all'infinito (dell'altro sistema) cui si appoggiano, sono paralleli. Quindi segue ancora che *le rette di un sistema dividono quelle dell'altro in parti proporzionali.*

Diametri, cono asintoto.

§ **21**. Consideriamo la retta all'infinito in un piano qualunque e suoi paralleli, ossia in una data *giacitura*. La coniugata di quella retta sarà il luogo dei poli di essa rispetto alle coniche, secondo le quali i detti piani secano la quadrica; val dire che *il luogo dei centri di un sistema di sezioni piane parallele fatte in una quadrica è*

una retta; la quale si chiama il *diametro coniugato* con ciascuno dei piani di quelle sezioni, o anche con la data giacitura.

È chiaro che, fra i detti piani, quello che passa pel centro ha il polo all'infinito sul diametro, ond'è il piano diametrale coniugato con la direzione del diametro. È chiaro inoltre che i piani tangenti nei due punti comuni al diametro e alla quadrica, sono piani coniugati al diametro e fra loro paralleli.

A ognuna delle ∞^2 possibili giaciture corrisponde un diametro, e tutti *gli* ∞^2 *diametri passano pel centro della quadrica.*

Considerando la retta all'infinito in un piano diametrale (o nei suoi paralleli) e il punto all'infinito del diametro coniugato (o delle corde bisecate da quel piano), scorgiamo facilmente che quella retta è polare di questo punto rispetto alla conica all'infinito della quadrica.

Nel cono nulla di ciò che ora esponemmo soffre alterazione.

Nel paraboloide tutti i diametri sono paralleli, e ciascuno seca la quadrica in un punto a distanza finita ed in uno stesso punto all'infinito (il centro). Il piano all'infinito fa da piano diametrale coniugato col sistema dei diametri del paraboloide; e i piani paralleli ai diametri hanno i loro diametri coniugati nel piano all'infinito.

Per ottenere *le equazioni del diametro coniugato con una data giacitura* (u_1, u_2, u_3), si osservi che, se x è un punto del diametro, il piano polare di x ha appunto la data giacitura, onde i coefficienti delle coordinate variabili nella sua equazione sono proporzionali a u_1, u_2, u_3; e però

$$\frac{f_1(x)}{u_1} = \frac{f_2(x)}{u_2} = \frac{f_3(x)}{u_3}$$

sono le equazioni cercate (*).

§ 22. Apparisce da quanto precede che *ogni piano pel centro è*

(*) Per ottenere *le coordinate del diametro coniugato alla giacitura* (u_1, u_2, u_3), basta ricordare che la retta all'infinito in questa giacitura ha per coordinate-assi

$$0,\ 0,\ 0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \quad \text{(pag. 49 nota)},$$

e però la sua coniugata, che è il diametro richiesto, avrà per coordinate-raggi (§ 15)

$$r_{hi} = A_{hi,14}u_1 + A_{hi,24}u_2 + A_{hi,34}u_3 = \begin{vmatrix} a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

denotando con *hikl* una permutazione pari di 1234.

un piano diametrale, vale a dire che ad esso corrisponde un sistema di corde parallele che esso biseca; e *ogni retta pel centro è un diametro*, vale a dire che ad essa corrisponde un sistema di piani paralleli secanti la quadrica in coniche di cui quella retta contiene i centri.

Lasciamo al lettore la cura di determinare la direzione coniugata a un dato piano pel centro, e la giacitura coniugata a una data retta pel centro.

Si vede anche che ciascun punto, diverso dal centro, è centro d'un fascio di corde bisecate ivi, ossia *ciascun punto è centro di una sezione piana della quadrica*; basta condurre il diametro per quel punto, e il piano coniugato a questo diametro.

§ **23**. Dal centro si possono tirare ∞ rette tangenti alla quadrica. Su ciascuna il punto di contatto è all'infinito; onde ciascuna è un *asintoto* della quadrica. Tutti questi asintoti costituiscono un cono, circoscritto alla quadrica secondo la conica all'infinito di essa: il *cono asintoto* della quadrica.

Il cono asintoto è reale o immaginario (ma col vertice reale), come la conica all'infinito. Evidentemente esso nei paraboloidi si riduce al piano all'infinito contato due volte.

Il cono asintoto è anche l'inviluppo dei piani tangenti alla quadrica condotti pel centro, e quindi tangenti nei punti all'infinito della quadrica: *piani asintoti*.

L'equazione del cono asintoto deriva da quella del cono circoscritto da un punto, supponendo che questo punto sia il centro, ossia ponendo $A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}$ invece di y_1, y_2, y_3, y_4 nella [4] § 7. Essa è dunque

$$\mathrm{f}(A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}) . \mathrm{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) - \mathrm{f}^2\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ A_{14}, & A_{24}, & A_{34}, & A_{44} \end{pmatrix} = 0\,;$$

che per le [6] e [7] § 18 si riduce a

$$[1] \qquad B\mathrm{f}(x) - Ax_4^2 = 0,$$

o anche

$$[2] \qquad \mathrm{f}(x) - \frac{A}{B}\, x_4^2 = 0 \quad (^*):$$

(*) Se la quadrica è un paraboloide ($B = 0$), l'equazione del cono asintoto riducesi a $x_4^2 = 0$, che rappresenta il piano all'infinito contato due volte.

Se la quadrica è un cono ($A = 0$), il suo cono asintoto ha per equazione $\mathrm{f}(x) = 0$, ovvero è il cono stesso.

equazione semplicissima, poichè si deduce dalla $f(x)=0$ mutando solo a_{44} in $a_{44}-\frac{A}{B}$.

Un piano o una retta diametrale della quadrica è tale anche pel cono asintoto, ed ha la stessa retta o piano cone coniugato rispetto alla quadrica e al cono asintoto. Anzi un piano diametrale è polare, rispetto al cono asintoto, di ciascun punto del diametro coniugato.

Coppie e terne di piani diametrali coniugati o di diametri coniugati.

§ **24**. Due piani diametrali sono *coniugati* quando il polo dell'uno sta sull'altro, e quindi viceversa (§ 12-3°); cioè quando il diametro coniugato all'uno giace nell'altro, e viceversa; ovvero quando l'uno biseca un sistema di corde parallele all'altro, e viceversa. Ciascun piano diametrale ne ha infiniti coniugati, formanti fascio intorno al suo diametro coniugato. Due piani diametrali coniugati rispetto alla quadrica son tali anche rispetto al cono asintoto.

Per ciascun diametro passano ∞ coppie di piani diametrali coniugati; esse costituiscono una involuzione quadratica, i cui piani doppii sono quei due piani tangenti alla quadrica (e al cono asintoto) che passano pel diametro; sicchè i piani d'una qualunque coppia sono armonici rispetto a questi due piani asintoti della quadrica.

È facile vedere che il piano diametrale coniugato con un diametro è secato dalle singole coppie di piani diametrali coniugati passanti per quel diametro secondo le ∞ coppie di diametri coniugati della conica che quel piano ha comune con la quadrica (o col cono asintoto); ed è secato dai due piani asintoti passanti pel diametro stesso secondo gli asintoti della conica suddetta. Lo stesso vale per ogni piano non diametrale, ma coniugato con quel diametro.

Laonde tutte le sezioni fatte da piani paralleli, sia nella quadrica sia nel suo cono asintoto, hanno gli asintoti nelle stesse direzioni; il che basta per concludere (*) che *le sezioni fatte, sia nella quadrica sia nel cono asintoto, da una serie di piani paralleli, sono tutte simili e similmente poste, ossia a due a due omotetiche.*

La condizione analitica affinchè due piani diametrali siano coniu-

(*) Supponiamo noto che due coniche sono simili quando l'angolo degli asintoti (anche immaginarii) è lo stesso per ambedue.

gati, si può ottenere facilmente dalla condizione affinchè due piani qualunque siano coniugati, introducendo l'ipotesi che essi passino pel centro. Ma si può giungervi più presto, osservando che, se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sono le direzioni coniugate ai due piani diametrali, cioè se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$ e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0)$ sono le coordinate dei poli dei due piani, il secondo piano ha per equazione

$$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

e deve contenere il polo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0)$ del primo; onde la condizione cercata sarà, sotto varie forme:

$$[1] \quad \begin{cases} f\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3)\beta_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3)\beta_2 \\ \qquad + (a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3)\beta_3 = 0, \\ (a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3)\alpha_1 + (a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\beta_3)\alpha_2 \\ \qquad + (a_{31}\beta_1 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\beta_3)\alpha_3 = 0, \\ a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{22}\alpha_2\beta_2 + a_{33}\alpha_3\beta_3 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{13}(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) \\ \qquad + a_{23}(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) = 0. \end{cases}$$

Esistono ∞^2 terne di piani diametrali coniugati, tali cioè che ciascuno bisechi le corde parallele al diametro intersezione degli altri due, e quindi ciascuno (e suoi paralleli) sia secato dagli altri due secondo una coppia di diametri coniugati della conica che ha comune colla quadrica. Due piani diametrali coniugati passanti per un diametro qualunque, e il piano diametrale coniugato con questo, formano una terna di piani diametrali coniugati.

Due diametri li diremo *coniugati* quando l'uno giace nel piano diametrale coniugato all'altro, e quindi viceversa; sicchè ogni diametro ne ha ∞ coniugati formanti un fascio.

Tre piani diametrali coniugati determinano intersecandosi una terna di diametri coniugati. Due qualunque di questi sono diametri coniugati nella conica secondo cui il loro piano seca la quadrica, ed anche nel cono asintoto (*).

(*) Si è in questo senso che va intesa la denominazione di coniugati; poichè nella quadrica la retta coniugata di un diametro è all'infinito.

§ **25**. Ciascun piano diametrale, passando pel centro che è polo del piano all'infinito, è coniugato col piano all'infinito. In conseguenza, il piano all'infinito è secato da una coppia di piani diametrali coniugati in una coppia di rette coniugate rispetto alla conica all'infinito; è secato da una coppia di diametri coniugati in una coppia di punti coniugati rispetto alla conica all'infinito; è secato da una terna di piani diametrali coniugati in un trilatero autoconiugato rispetto alla conica all'infinito; ed è secato da una terna di diametri coniugati in un triangolo autoconiugato rispetto alla conica all'infinito. Lo stesso vale per ciascuna conica sezione piana del cono asintoto.

Ciascun piano asintoto conta se stesso fra i suoi piani coniugati. E ciascun diametro asintoto della quadrica conta se stesso fra i suoi diametri coniugati, ovvero è contenuto nel suo piano diametrale coniugato, che è un piano asintoto.

Per ogni piano asintoto sussiste dunque la relazione ottenuta supponendo β_1, β_2, β_3 uguali ad α_1, α_2, α_3 nella [1] § 24, cioè

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,0)=a_{11}\alpha_1^2+a_{22}\alpha_2^2+a_{33}\alpha_3^2+2a_{12}\alpha_1\alpha_2+2a_{13}\alpha_1\alpha_3+2a_{23}\alpha_2\alpha_3=0.$$

Or siccome la corda coniugata a tal piano e condotta per l'origine, cioè

$$\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\frac{x_3}{\alpha_3},$$

è parallela al piano; così sarà

$$f(x_1,x_2,x_3,0)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0,$$

l'equazione del cono avente il vertice nell'origine e le generatrici parallele a quelle del cono asintoto; come del resto sapevasi dal § 19. E quindi sarà

$$f(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ x_3-y_3,\ 0)=0$$

l'equazione dell'analogo cono avente per vertice il punto y; e da ultimo sarà

$$f\left(x_1-\frac{A_{11}}{A_{44}},\ x_2-\frac{A_{21}}{A_{44}},\ x_3-\frac{A_{34}}{A_{44}},\ 0\right)=0$$

l'equazione del cono asintoto sotto altra forma.

§ **26**. Le proprietà dei diametri potrebbero anche ricercarsi, partendo dall'equazione che determina i raggi vettori dei punti in cui

una retta per l'origine seca la quadrica (*). Possiamo assumere le coordinate α_1, α_2, α_3 della direzione della retta in guisa che, se x_1, x_2, x_3 sono le coordinate e ρ il raggio vettore di un punto della retta, si abbia

$$x_1 = \alpha_1\rho, \quad x_2 = \alpha_2\rho, \quad x_3 = \alpha_3\rho\,;$$

allora il punto starà sulla quadrica se $f(\alpha_1\rho,\ \alpha_2\rho,\ \alpha_3\rho,\ 1) = 0$, ossia

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0).\rho^2 + 2(a_{14}\alpha_1 + a_{24}\alpha_2 + a_{34}\alpha_3)\rho + a_{44} = 0.$$

Se si riflette che l'origine è arbitraria, questa equazione prova: che la quadrica è di 2° ordine; che ogni punto è centro di un fascio di corde ivi bisecate, e quindi centro di una conica posta sulla quadrica; che il luogo dei punti medii di un sistema di corde parallele è un piano; che questo passa per un punto fisso; che da ogni punto escono ∞ rette secanti in un punto almeno a distanza infinita; ecc.

Dalla stessa equazione si deduce che, *se da due punti fissi emanano due stelle di raggi, i prodotti dei segmenti, che la quadrica determina su due raggi paralleli di esse, sono in rapporto costante.* È notevole il caso che uno dei due punti sia il centro.

Piani principali, assi.

§ **27**. Dato un piano diametrale, nel fascio dei piani diametrali suoi coniugati esiste in generale un piano perpendicolare al dato, ed è quello che proietta ortogonalmente sul dato piano il diametro coniugato con questo.

Ancora: fra le infinite coppie di piani diametrali coniugati che passano per un diametro, e che costituiscono una involuzione, esiste una coppia sempre reale di piani diametrali coniugati perpendicolari fra loro (§ 12-5°).

Ora cerchiamo se esiste qualche piano diametrale, che sia perpendicolare alle corde sue coniugate, e quindi perpendicolare a tutti i piani diametrali suoi coniugati.

Per semplificare il procedimento senza ledere la generalità delle conclusioni, supponiamo per poco gli assi ortogonali: allora le coordinate di una direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sono proporzionali ai coseni degli

(*) Cfr. Con. §§ 29 e 30.

angoli che la direzione fa cogli assi; e poichè nell'equazione del piano diametrale coniugato con quella direzione

$$[1] \qquad \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0,$$

i coefficienti di x_1, x_2, x_3 sono proporzionali ai coseni degli angoli che la perpendicolare al piano dall'origine fa cogli assi; ne segue che il piano diametrale sarà perpendicolare alle corde coniugate, quando i detti coefficienti saranno proporzionali ad α_1, α_2, α_3, ossia quando

$$\frac{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3}{\alpha_3}.$$

Si hanno così due equazioni omogenee fra le tre incognite α_1, α_2, α_3, per determinare i loro mutui rapporti, e quindi la direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e il suo piano diametrale coniugato.

Come nel § 10, denotando con uno stesso simbolo $-\rho$ il valore comune e incognito dei tre rapporti uguali costituenti queste equazioni, avremo immediatamente

$$[2] \qquad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = -\rho\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = -\rho\alpha_2, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 = -\rho\alpha_3, \end{cases}$$

ovvero

$$[3] \qquad \begin{cases} (a_{11} + \rho)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} + \rho)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33} + \rho)\alpha_3 = 0; \end{cases}$$

or queste tre equazioni lineari e omogenee in α_1, α_2, α_3 devono dare valori determinati pei rapporti delle incognite; dunque dovrà esser nullo il loro determinante, cioè

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} a_{11} + \rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione di 3° grado in ρ è quella stessa che indicammo con $\Delta(\rho) = 0$ nel § 6, e che si sviluppa nella

$$\rho^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\rho^2 + (B_{11} + B_{22} + B_{33})\rho + B = 0.$$

L'equazione $\Delta(\rho)=0$ dà per ρ tre valori: sostituendone uno qualunque nelle tre equazioni [3], esse si riducono a due distinte, dalle quali si trae indifferentemente, indicando con sud $a_{11}, \ldots$ i suddeterminanti complementari di $a_{11}, \ldots$ nel determinante [4]:

$$[5] \qquad \begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 &:: \operatorname{sud}(a_{11}+\rho) : \operatorname{sud} a_{12} : \operatorname{sud} a_{13} \\ &:: \operatorname{sud} a_{21} : \operatorname{sud}(a_{22}+\rho) : \operatorname{sud} a_{13} \\ &:: \operatorname{sud} a_{31} : \operatorname{sud} a_{32} : \operatorname{sud}(a_{33}+\rho) \\ &:: \sqrt{\operatorname{sud}(a_{11}+\rho)} : \sqrt{\operatorname{sud}(a_{22}+\rho)} : \sqrt{\operatorname{sud}(a_{33}+\rho)}, \end{aligned}$$

dando ai radicali segni convenienti.

Quindi resta individuata una direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e il piano diametrale [1] suo coniugato.

E siccome dimostreremo *che le tre radici della equazione* $\Delta(\rho)=0$ *son sempre reali, ed in generale distinte;* così concludiamo che, *in generale, esistono per una quadrica tre piani diametrali perpendicolari alle corde rispettivamente coniugate.*

Ciascuno di questi piani è evidentemente un piano di simmetria per la quadrica, e dicesi *piano principale.*

I tre piani principali costituiscono una terna di piani diametrali coniugati. Poichè, se un piano diametrale è perpendicolare alle corde coniugate, esso, insieme coi due piani diametrali mutuamente coniugati e perpendicolari che passano pel suo diametro coniugato (§ 12-5°), costituisce una terna di piani diametrali coniugati, di cui ciascuno è perpendicolare agli altri due; onde questi tre piani sono appunto i tre piani principali testè trovati (*). O altrimenti: poichè, se ρ_1, ρ_2 son due radici diseguali della $\Delta(\rho)=0$, e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ le direzioni corrispondenti, si ha dalle [2]

$$-\rho_1(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3) = (a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+a_{13}\alpha_3)\beta_1+\ldots$$

$$=(a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+a_{13}\beta_3)\alpha_1+\ldots=-\rho_2(\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3),$$

onde

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0, \quad \text{e} \quad (a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+a_{13}\alpha_3)\beta_1+\ldots=0,$$

(*) Uno dei valori di ρ è certo reale, e dà un piano principale reale; gli altri due piani sono reali, come coniugati e ortogonali intorno al diametro perpendicolare a quello. Ciò basterebbe per provare che i tre piani principali sono reali.

che sono: la condizione di ortogonalità per le due direzioni, e la condizione di coniugio pei due piani diametrali corrispondenti.

Ed è chiaro che *i tre piani principali formano, in generale, la sola terna di piani diametrali mutuamente coniugati e perpendicolari* (*).

I tre diametri, secondo cui i tre piani principali si secano, formano una terna di diametri coniugati e perpendicolari, e in generale l'unica. Essi sono gli assi di simmetria per la quadrica, e però *una quadrica ha, in generale, tre assi o diametri principali.* Le direzioni degli assi sono appunto determinate dalle [5].

Le coniche, secondo cui i piani principali secano la quadrica, si dicono *sezioni principali*; ciascuna ha per proprii assi due assi della quadrica.

I punti in cui gli assi secano la quadrica si dicono *vertici.*

Si noti che, se ρ è una radice della $\Delta(\rho)=0$, e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ la corrispondente direzione fornita dalle [5], l'equazione [1] del piano principale può anche scriversi, per le [2],

$$[6] \qquad \alpha_1(\rho x_1 - a_{14}x_4) + \alpha_2(\rho x_2 - a_{24}x_4) + \alpha_3(\rho x_3 - a_{34}x_4) = 0.$$

§ 28. Bisogna ora dimostrare che *l'equazione* $\Delta(\rho)=0$ *ha tutte le radici reali e, in generale, distinte.*

A tal uopo ricordiamo che, se

$$p_0\rho^3 + p_1\rho^2 + p_2\rho + p_3 = 0$$

è un'equazione di 3° grado a coefficienti reali, il suo discriminante (cioè quella funzione dei coefficienti, il cui annullarsi è la condizione perchè due radici dell'equazione divengano eguali) si può porre, fra le altre, sotto la forma:

$$\begin{vmatrix} 2(p_1^2 - 3p_0p_2) & 9p_0p_3 - p_1p_2 \\ 9p_0p_3 - p_1p_2 & 2(p_2^2 - 3p_1p_3) \end{vmatrix};$$

e le tre radici saranno: reali e distinte, se questo discriminante è positivo; reali, ma due eguali, se è nullo; una reale e due immaginarie coniugate, se è negativo.

Ora nella $\Delta(\rho)=0$ si ha

$$p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad p_2 = B_{11} + B_{22} + B_{33}, \quad p_4 = B;$$

(*) Queste proprietà sussistono anche pel cono, e ciò giustifica l'asserto del § 12-6°.

e però

$$
\begin{aligned}
p_1^2-3p_0p_2 &= (a_{11}+a_{22}+a_{33})^2-3(B_{11}+B_{22}+B_{33}) \\
&= a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+2a_{11}a_{22}+2a_{11}a_{33}+2a_{22}a_{33} \\
&\quad -3(a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}^2-a_{31}^2-a_{12}^2) \\
&= a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2-a_{22}a_{33}-a_{33}a_{11}-a_{11}a_{22}+3a_{23}^2+3a_{31}^2+3a_{12}^2 \\
&= 3a_{23}^2+3a_{31}^2+3a_{12}^2+\tfrac{1}{2}(a_{22}-a_{33})^2+\tfrac{1}{2}(a_{33}-a_{11})^2+\tfrac{1}{2}(a_{11}-a_{22})^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2^2-3p_1p_3 &= (B_{11}+B_{22}+B_{33})^2-3(a_{11}+a_{22}+a_{33})B \\
&= (B_{11}+B_{22}+B_{33})^2-3(B_{22}B_{33}+B_{33}B_{11}+B_{11}B_{22}-B_{23}^2-B_{31}^2-B_{12}^2) \ (^*) \\
&= 3B_{23}^2+3B_{31}^2+3B_{12}^2+\tfrac{1}{2}(B_{22}-B_{33})^2+\tfrac{1}{2}(B_{33}-B_{11})^2+\tfrac{1}{2}(B_{11}-B_{22})^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9p_0p_3-p_1p_2 &= 9B-(a_{11}+a_{22}+a_{33})(B_{11}+B_{22}+B_{33}) \\
&= 3(a_{11}B_{11}+a_{22}B_{22}+a_{33}B_{33}+2a_{23}B_{23}+2a_{31}B_{31}+2a_{12}B_{12}) \quad (^{**}) \\
&\quad -(a_{11}+a_{22}+a_{33})(B_{11}+B_{22}+B_{33}) \\
&= (2a_{11}-a_{22}-a_{33})B_{11}+(2a_{22}-a_{33}-a_{11})B_{22} \\
&\quad +(2a_{33}-a_{11}-a_{22})B_{11}+6a_{23}B_{23}+6a_{31}B_{31}+6a_{12}B_{12} \\
&= 6a_{23}B_{23}+6a_{31}B_{31}+6a_{12}B_{12}+(a_{22}-a_{33})(B_{22}-B_{33}) \\
&\quad +(a_{33}-a_{11})(B_{33}-B_{11})+(a_{11}-a_{22})(B_{11}-B_{22});
\end{aligned}
$$

sicchè il discriminante diviene

$$
\begin{vmatrix}
6a_{23}^2+\ldots+(a_{22}-a_{33})^2+\ldots & 6a_{23}B_{23}+\ldots+(a_{22}-a_{33})(B_{22}-B_{33})+\ldots \\
6a_{23}B_{23}+\ldots+(a_{22}-a_{33})(B_{22}-B_{33})+\ldots & 6B_{23}^2+\ldots+(B_{22}-B_{33})^2+\ldots
\end{vmatrix},
$$

che è evidentemente quel che chiamasi il quadrato della matrice

$$
\begin{vmatrix}
a_{23}\sqrt{6} & a_{31}\sqrt{6} & a_{12}\sqrt{6} & a_{22}-a_{33} & a_{33}-a_{11} & a_{11}-a_{22} \\
B_{23}\sqrt{6} & B_{31}\sqrt{6} & B_{12}\sqrt{6} & B_{22}-B_{33} & B_{33}-B_{11} & B_{11}-B_{22}
\end{vmatrix}
$$

eseguito per orizzontali, e quindi è uguale alla somma dei quadrati dei 15 determinanti di 2° ordine originati da essa matrice, cioè

(*) Per la [8] § 4.
(**) Per la [6] § 4.

$$[1] \qquad 36\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} \\ B_{23} & B_{31} \end{vmatrix}^2 + 36\begin{vmatrix} a_{23} & a_{12} \\ B_{23} & B_{12} \end{vmatrix}^2 + 36\begin{vmatrix} a_{31} & a_{12} \\ B_{31} & B_{12} \end{vmatrix}^2$$

$$+ 6\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22}-a_{33} \\ B_{23} & B_{22}-B_{33} \end{vmatrix}^2 + 6\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33}-a_{11} \\ B_{31} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix}^2 + 6\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}-a_{22} \\ B_{12} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix}^2$$

$$+ 6\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33}-a_{11} \\ B_{23} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix}^2 + 6\begin{vmatrix} a_{23} & a_{11}-a_{22} \\ B_{23} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix}^2 + 6\begin{vmatrix} a_{31} & a_{22}-a_{33} \\ B_{31} & B_{22}-B_{33} \end{vmatrix}^2$$

$$+ 6\begin{vmatrix} a_{31} & a_{11}-a_{22} \\ B_{31} & B_{11}-B_{33} \end{vmatrix}^2 + 6\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}-a_{33} \\ B_{12} & B_{22}-B_{33} \end{vmatrix}^2 + 6\begin{vmatrix} a_{12} & a_{33}-a_{11} \\ B_{12} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix}^2$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{22}-a_{33} & a_{33}-a_{11} \\ B_{22}-B_{33} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{22}-a_{33} & a_{11}-a_{22} \\ B_{22}-B_{33} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{33}-a_{11} & a_{11}-a_{22} \\ B_{33}-B_{11} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix}^2.$$

L'essere il discriminante una somma di quadrati di quantità reali, di cui in generale nessuna è nulla, prova ad esuberanza che esso è positivo, e quindi che la $\Delta(\rho) = 0$ ha in generale le sue tre radici reali e distinte.

Vogliamo intanto mostrare come il numero di questi quadrati si possa abbassare successivamente a 13, 10, 7. In primo luogo i tre ultimi determinanti sono eguali, perchè ciascuno eguaglia la somma

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{33} \\ B_{22} & B_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{11} \\ B_{33} & B_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ B_{11} & B_{22} \end{vmatrix};$$

e ciò riduce a uno i tre ultimi quadrati, ed a 13 la totalità dei quadrati. In secondo luogo si ha

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22}-a_{33} \\ B_{23} & B_{22}-B_{33} \end{vmatrix} = -(a_{23}B_{33} + a_{22}B_{23}) + (a_{23}B_{22} + a_{33}B_{23})$$

$$= a_{12}B_{31} - a_{31}B_{12} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{12} \\ B_{31} & B_{12} \end{vmatrix},$$

e similmente

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33}-a_{11} \\ B_{31} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ B_{12} & B_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}-a_{22} \\ B_{12} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} \\ B_{23} & B_{31} \end{vmatrix};$$

le quali relazioni riducono ai primi tre il 4°, 5° e 6° quadrato, e quindi a 10 il numero totale dei quadrati. In terzo luogo si ha

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33}-a_{11} \\ B_{23} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{11}-a_{22} \\ B_{23} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22}-a_{33} \\ B_{23} & B_{22}-B_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{12} \\ B_{31} & B_{12} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33}-a_{11} \\ B_{23} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{23} & a_{11}-a_{22} \\ B_{23} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22}+a_{33}-2a_{11} \\ B_{23} & B_{22}+B_{33}-2B_{11} \end{vmatrix},$$

e quadrando e sommando queste due identità,

$$2\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33}-a_{11} \\ B_{23} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix}^2 + 2\begin{vmatrix} a_{23} & a_{11}-a_{22} \\ B_{33} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{12} \\ B_{31} & B_{12} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22}+a_{33}-2a_{11} \\ B_{23} & B_{22}+B_{23}-2B_{11} \end{vmatrix}^2;$$

similmente si ha

$$2\begin{vmatrix} a_{31} & a_{11}-a_{22} \\ B_{31} & B_{11}-B_{22} \end{vmatrix}^2 + 2\begin{vmatrix} a_{31} & a_{22}-a_{33} \\ B_{31} & B_{22}-B_{33} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ B_{12} & B_{23} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33}+a_{11}-2a_{22} \\ B_{31} & B_{33}+B_{11}-2B_{22} \end{vmatrix}^2,$$

$$2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}-a_{33} \\ B_{12} & B_{22}-B_{23} \end{vmatrix}^2 + 2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{33}-a_{11} \\ B_{12} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} \\ B_{23} & B_{31} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{22}-2a_{33} \\ B_{12} & B_{11}+B_{22}-2B_{33} \end{vmatrix}^2;$$

ciascuna delle quali relazioni introduce un sol nuovo quadrato al posto di due, e quindi riduce a 7 il numero totale dei quadrati. L'espressione ridotta del discriminante è dunque allora (dividendo per 3)

$$[2]\ 15\left\{\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} \\ B_{23} & B_{31} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{12} \\ B_{31} & B_{12} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ B_{12} & B_{23} \end{vmatrix}^2\right\} + \left\{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{33} \\ B_{22} & B_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{11} \\ B_{33} & B_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ B_{11} & B_{22} \end{vmatrix}\right\}^2$$

$$+\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22}+a_{33}-2a_{11} \\ B_{23} & B_{22}+B_{33}-2B_{11} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33}+a_{11}-2a_{22} \\ B_{31} & B_{33}+B_{11}-2B_{22} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{22}-2a_{33} \\ B_{12} & B_{11}+B_{22}-2B_{33} \end{vmatrix}^2.$$

Quadriche rotonde.

§ 29. Ora esamineremo il caso che due radici dell'equazione $\Delta(\rho)=0$ divengano eguali. Per questo è condizione necessaria e sufficiente che il discriminante sia nullo, e quindi che siano nulli tutti i deter-

minanti i cui quadrati lo compongono. Annullando i due primi si hanno le due condizioni indipendenti

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} \\ B_{23} & B_{31} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{12} \\ B_{31} & B_{12} \end{vmatrix} = 0;$$

o più in breve

$$[1] \qquad \frac{B_{23}}{a_{23}} = \frac{B_{31}}{a_{31}} = \frac{B_{12}}{a_{12}}.$$

Ora mostreremo che queste due condizioni necessarie sono anche sufficienti, vale a dire che l'annullarsi dei due primi determinanti porta per conseguenza l'annullamento di tutti gli altri; e ciò faremo sulla espressione [1] § 28 del discriminante.

A tal fine ricordiamo che, se in una matrice a due orizzontali e tre verticali son nulli due dei tre determinanti, in generale è nullo anche il terzo; e però, essendo

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} \\ B_{23} & B_{31} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{12} \\ B_{31} & B_{12} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{è anche} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ B_{12} & B_{23} \end{vmatrix} = 0;$$

e sono poi nulli, come opposti a questi tre, i seguenti

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} - a_{22} \\ B_{12} & B_{11} - B_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} - a_{33} \\ B_{23} & B_{22} - B_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} - a_{11} \\ B_{31} & B_{33} - B_{11} \end{vmatrix}.$$

Inoltre, essendo

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} \\ B_{23} & B_{31} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} - a_{33} \\ B_{23} & B_{22} - B_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{è pure} \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{22} - a_{33} \\ B_{31} & B_{22} - B_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

e similmente

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} - a_{33} \\ B_{12} & B_{22} - B_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

ed analogamente

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{33} - a_{11} \\ B_{12} & B_{33} - B_{11} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} - a_{11} \\ B_{23} & B_{33} - B_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{11} - a_{22} \\ B_{23} & B_{11} - B_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} - a_{22} \\ B_{31} & B_{11} - B_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Infine, essendo

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22}-a_{33} \\ B_{23} & B_{22}-B_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{23} & a_{33}-a_{11} \\ B_{23} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

è anche

$$\begin{vmatrix} a_{22}-a_{33} & a_{33}-a_{11} \\ B_{22}-B_{33} & B_{33}-B_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

e così pure gli ultimi due.

Ciò posto, possiamo conchiudere che, *quando l'equazione* $\Delta(\rho)=0$ *ha due radici eguali, hanno luogo le relazioni*

$$[2] \qquad \frac{B_{23}}{a_{23}} = \frac{B_{31}}{a_{31}} = \frac{B_{12}}{a_{12}} = \frac{B_{22}-B_{33}}{a_{22}-a_{33}} = \frac{B_{33}-B_{11}}{a_{33}-a_{11}} = \frac{B_{11}-B_{22}}{a_{11}-a_{22}},$$

delle quali tuttavia due sole sono indipendenti.

Ora siccome, quando un'equazione

$$p_0\rho^3 + p_1\rho^2 + p_2\rho + p_3 = 0$$

ha una radice doppia, il valore di questa è

$$\frac{9p_0p_3 - p_1p_2}{2(p_1^2 - 3p_0p_2)} \quad \text{o} \quad \frac{2(p_2^2 - 3p_1p_3)}{9p_0p_3 - p_1p_2};$$

così nella $\Delta(\rho)=0$ la radice doppia ρ_2 sarà

$$\frac{6a_{23}B_{23}+6a_{31}B_{31}+6a_{12}B_{12}+(a_{22}-a_{33})(B_{22}-B_{33})+(a_{33}-a_{11})(B_{33}-B_{11})+(a_{11}-a_{22})(B_{11}-B_{22})}{6a_{23}^2+6a_{31}^2+6a_{12}^2+(a_{22}-a_{33})^2+(a_{33}-a_{11})^2+(a_{11}-a_{22})^2},$$

e stante le condizioni soprascritte, avremo

$$[3] \quad \rho_2 = \frac{B_{23}}{a_{23}} = \frac{B_{31}}{a_{31}} = \frac{B_{12}}{a_{12}} = \frac{B_{22}-B_{33}}{a_{22}-a_{33}} = \frac{B_{33}-B_{11}}{a_{33}-a_{11}} = \frac{B_{11}-B_{12}}{a_{11}-a_{22}}.$$

Or sostituendo a ρ_2 la sua espressione $\frac{B_{23}}{a_{23}}$ nella prima delle equazioni [2] § 27, questa diviene

$$\left(a_{11} + \frac{B_{23}}{a_{23}}\right)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0,$$

ovvero

$$a_{31}a_{12}\alpha_1 + a_{12}a_{23}\alpha_2 + a_{23}a_{31}\alpha_3 = 0,$$

oppure

[4] $$\frac{\alpha_1}{a_{23}} + \frac{\alpha_2}{a_{31}} + \frac{\alpha_3}{a_{12}} = 0\,;$$

ed è manifesto, per analogia, che a questa si riducono anche le altre due equazioni; adunque per $\rho = \rho_2$ le tre equazioni si riducono ad una sola. Ed è questo l'unico caso in cui ciò avvenga; poichè, per identificare due qualunque delle dette tre equazioni, bisogna annullare i suddeterminanti di 2° ordine nel determinante $\Delta(\rho)$, e ciò facendo si perviene ad equazioni lineari in ρ, che dànno

$$\rho = \frac{B_{23}}{a_{23}}\,, \quad \rho = \frac{B_{31}}{a_{31}}\,, \quad \rho = \frac{B_{12}}{a_{12}}\,,$$

onde le [1].

In corrispondenza della radice doppia ρ_2, troviamo dunque ∞ direzioni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ caratterizzate dalla [4], e ciascuna delle quali è perpendicolare al suo piano diametrale coniugato

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0\,;$$

e però tutti questi piani passano per una retta, i cui punti x rendono questa equazione identica alla [4], ossia verificano le equazioni

$$f_1(x) : \frac{1}{a_{23}} = f_2(x) : \frac{1}{a_{31}} = f_3(x) : \frac{1}{a_{12}}\,,$$

ovvero

[5] $$a_{23} f_1(x) = a_{31} f_2(x) = a_{12} f_3(x).$$

In conseguenza, *i piani per la retta* [5] *son tutti principali;* e ogni piano perpendicolare ad essa seca la quadrica lungo una conica a infiniti assi, ossia un circolo. Adunque *la quadrica è di rotazione o rotonda, e la retta* [5] *è l'asse di rotazione* (*).

I due punti in cui l'asse seca la quadrica sono i *poli* di questa.

Se si assume l'equazione del piano principale sotto la forma [6] § 27, le equazioni dell'asse diventano

[6] $$a_{23}(\rho_2 x_1 - a_{14} x_4) = a_{31}(\rho_2 x_2 - a_{24} x_4) = a_{12}(\rho_2 x_3 - a_{34} x_4).$$

Alla radice semplice ρ_1 corrisponde un altro piano principale; il

---

(*) Le coordinate-raggi dell'asse sono

$r_{12} = A_{12,34} B_{12}$, $r_{23} = A_{23,14} B_{23}$, $r_{31} = A_{31,24} B_{31}$, $r_{14} = B_{12} B_{13}$, $r_{24} = B_{23} B_{21}$, $r_{34} = B_{31} B_{32}$.

quale si determina facilmente, osservando che esso è coniugato alla direzione dell'asse, che per le [6] è $\left(\frac{1}{a_{23}}, \frac{1}{a_{31}}, \frac{1}{a_{12}}\right)$; quindi questo piano ha l'equazione

$$[7] \qquad \frac{f_1(x)}{a_{23}} + \frac{f_2(x)}{a_{31}} + \frac{f_3(x)}{a_{12}} = 0,$$

oppure

$$[8] \qquad \frac{\rho_1 x_1 - a_{14}x_4}{a_{23}} + \frac{\rho_1 x_2 - a_{14}x_4}{a_{31}} + \frac{\rho_1 x_3 - a_{34}x_4}{a_{12}} = 0.$$

Osserviamo che

$$-\rho_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2\rho_2 = a_{11} + \frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}} + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}} = \ldots$$

§ **30.** Quando infine l'equazione $\Delta(\rho) = 0$ ha tutte tre le radici eguali, allora (visto che per l'equazione

$$p_0\rho^3 + p_1\rho^2 + p_2\rho + p_3 = 0,$$

le condizioni necessarie e sufficienti per l'eguaglianza delle tre radici sono

$$p_1^2 - 3p_0p_2 = 0, \quad p_2^2 - 3p_1p_3 = 0, \quad 9p_0p_3 - p_1p_2 = 0)$$

dovrà essere

$$3a_{23}^2 + 3a_{31}^2 + 3a_{12}^2 + \tfrac{1}{2}(a_{22} - a_{33})^2 + \tfrac{1}{2}(a_{33} - a_{11})^2 + \tfrac{1}{2}(a_{11} - a_{22})^2 = 0,$$

$$3B_{23}^2 + 3B_{31}^2 + 3B_{12}^2 + \tfrac{1}{2}(B_{22} - B_{33})^2 + \tfrac{1}{2}(B_{33} - B_{11})^2 + \tfrac{1}{2}(B_{11} - B_{22})^2 = 0,$$

$$6a_{23}B_{23} + 6a_{31}B_{31} + 6a_{12}B_{12}$$
$$+ (a_{22} - a_{33})(B_{22} - B_{33}) + (a_{33} - a_{11})(B_{33} - a_{11}) + (a_{11} - a_{22})(B_{11} - B_{22}) = 0.$$

Ora la prima condizione si scinde nelle

$$a_{23} = 0, \; a_{31} = 0, \; a_{12} = 0, \; a_{22} - a_{33} = 0, \; a_{33} - a_{11} = 0, \; a_{11} - a_{22} = 0,$$

che equivalgono alle 5 seguenti

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{12} = 0;$$

e, verificate queste, risulta chiaramente

$$B_{23} = 0, \; B_{31} = 0, \; B_{12} = 0, \; B_{22} - B_{33} = 0, \; B_{33} - B_{11} = 0, \; B_{11} - B_{22} = 0,$$

sicchè restano verificate anche le altre due condizioni. Adunque *le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'equazione* $\Delta(\rho) = 0$ *abbia*

le tre radici eguali sono

$$[1] \qquad a_{11}=a_{22}=a_{33}\,, \quad a_{23}=0, \quad a_{31}=0, \quad a_{12}=0.$$

Nel caso presente la radice dell'equazione in ρ è $-a_{11}$ o $-a_{22}$ o $-a_{33}$, e però le equazioni [3] § 27 si riducono a $0=0$. Ed è il solo caso in cui ciò avvenga, dovendo allora annullarsi tutti gli elementi del determinante in ρ, onde

$$a_{11}+\rho=0, \quad a_{22}+\rho=0, \quad a_{33}+\rho=0, \quad a_{23}=0, \quad a_{31}=0, \quad a_{12}=0.$$

Nel caso presente ad ogni direzione corrisponde un piano diametrale perpendicolare come coniugato; onde *ogni piano pel centro della quadrica è principale, ed ogni diametro è un'asse di rotazione.* Insomma: *la quadrica è una sfera.*

E infatti si ritrova l'equazione tipo di una sfera in assi ortogonali:

$$[2] \quad a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3)x_4+a_{44}x_4^2=0.$$

La teoria dei poli e piani polari, delle rette coniugate, dei piani diametrali e dei diametri, non soffre modificazione nella sfera; solo che: *ciascun piano è perpendicolare al diametro che va al suo polo*, due rette coniugate sono ortogonali, ciascun piano diametrale è perpendicolare al diametro coniugato, ecc.

Ne segue che: *due piani perpendicolari si possono definire come due piani diametrali coniugati, rispetto a qualunque sfera che abbia il centro nella loro retta comune; un piano e una retta perpendicolari si possono definire come un piano diametrale e il diametro ad esso coniugato, rispetto a qualunque sfera che abbia il centro nel loro punto comune*; ecc.

Pei punti all'infinito della sfera [2] si ha $x_4=0$, e quindi anche

$$[3] \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0;$$

cioè due equazioni indipendenti dai coefficienti della [2]. Dunque *tutte le sfere dello spazio hanno in comune un circolo immaginario all'infinito.* Esso è il luogo dei *punti ciclici* (*) di tutti i piani dello spazio, dicesi *assoluto* o *limite* dello spazio.

Due rette (o piani) ortogonali hanno i punti (o le rette) all'infinito coniugati rispetto all'assoluto; e viceversa. Per una retta e un piano

(*) Cfr. Con. § 31-2°.

perpendicolari, il punto e la retta all'infinito sono polo e polare rispetto all'assoluto, e viceversa.

L'equazione [3] rappresenta il cono immaginario circoscritto dall'origine all'assoluto.

Piani principali ed asse del paraboloide.

§ 31. 1° Quando la quadrica è un paraboloide (B o $A_{44}=0$), l'equazione $\Delta(\rho)=0$ perde il termine noto; onde un valore di ρ è zero, e gli altri due son dati dall'equazione quadratica

$$\rho^2+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\rho+(B_{11}+B_{22}+B_{33})=0.$$

Ora per $\rho=0$ le tre equazioni [3] § 27 divengono

$$[1]\qquad \begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+a_{13}\alpha_3=0, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{23}\alpha_3=0, \\ a_{31}\alpha_1+a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3=0; \end{cases}$$

ed essendo nullo il loro determinante B, se non son nulli tutti i suddeterminanti complementari degli elementi di ciascuna linea di B, queste equazioni determinano una direzione

$$[2]\qquad \begin{aligned} \alpha_1:\alpha_2:\alpha_3 &:: B_{11}:B_{12}:B_{13} \\ &:: B_{21}:B_{22}:B_{23} \\ &:: B_{31}:B_{32}:B_{33} \\ &:: \sqrt{B_{11}}:\sqrt{B_{22}}:\sqrt{B_{33}}\,, \end{aligned}$$

dando ai radicali segni convenienti.

A questa direzione corrisponde un piano principale, la cui equazione riducesi a

$$(a_{14}\alpha_1+a_{24}\alpha_2+a_{34}\alpha_3)x_4=0 \quad \text{ovvero} \quad x_4=0,$$

che è il piano all'infinito. Non tenendo conto di questo, *restano dunque nel paraboloide due piani principali* (reali e a distanza finita) *e un diametro principale o asse* (a distanza finita). La direzione di questo asse e di tutti i diametri del paraboloide è appunto fornita dalle [2].

Siccome, quando $B=0$ e $\rho \gtrless 0$, le [3] § 27 moltiplicate per B_{1h}, B_{2h}, B_{3h} $(h=1,2,3)$ e sommate dànno

$$B_{1h}\alpha_1 + B_{2h}\alpha_2 + B_{3h}\alpha_3 = 0,$$

ovvero per le [2]

$$[3] \qquad \alpha_1\sqrt{B_{11}} + \alpha_2\sqrt{B_{22}} + \alpha_3\sqrt{B_{33}} = 0\,;$$

così l'equazione di uno dei due piani principali (a distanza finita) è

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \sqrt{B_{11}} & \sqrt{B_{22}} & \sqrt{B_{33}} \\ a_{11}+\rho & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0,$$

ove si può mutare l'ultima orizzontale in un'altra del determinante [3] § 27.

Quindi apparisce che *le equazioni dell'asse del paraboloide sono*

$$[4] \qquad \frac{f_1(x)}{\sqrt{B_{11}}} = \frac{f_2(x)}{\sqrt{B_{22}}} = \frac{f_3(x)}{\sqrt{B_{33}}}\,.$$

Il paraboloide ha un sol vertice (a distanza finita), che è il punto in cui l'asse seca la quadrica. Le coordinate del vertice verificano le equazioni [4] dell'asse e l'equazione della quadrica. Ora le [4], introducendo una nuova incognita λ, diventano

$$[5] \qquad f_1(x) = \lambda\sqrt{B_{11}}\,, \quad f_2(x) = \lambda\sqrt{B_{22}}\,, \quad f_3(x) = \lambda\sqrt{B_{33}}\,;$$

e allora la $f(x)=0$, essendo $F\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\} = Af(x)$ e $A_{44}=0$, diviene

$$\lambda^2 F(\sqrt{B_{11}},\ \sqrt{B_{22}},\ \sqrt{B_{33}},\ 0) + 2\lambda(A_{14}\sqrt{B_{11}} + A_{24}\sqrt{B_{22}} + A_{34}\sqrt{B_{33}})f_4(x) = 0,$$

onde

$$[6] \qquad f_4(x) = -\lambda\,\frac{F(\sqrt{B_{11}},\ \sqrt{B_{22}},\ \sqrt{B_{33}},\ 0)}{2(A_{14}\sqrt{B_{11}} + A_{24}\sqrt{B_{22}} + A_{34}\sqrt{B_{33}})}\,.$$

Dunque *le equazioni* [5] e [6] *individuano il vertice.*

Insomma, basta nelle [2] § 10 sostituire a u_1, u_2, u_3, u_4 rispettivamente

$$\sqrt{B_{11}}\,,\ \sqrt{B_{22}}\,,\ \sqrt{B_{33}}\,,\ -\frac{F(\sqrt{B_{11}},\ \sqrt{B_{22}},\ \sqrt{B_{33}},\ 0)}{2(A_{14}\sqrt{B_{11}} + A_{24}\sqrt{B_{22}} + A_{34}\sqrt{B_{33}})}\,;$$

e si può osservare che l'ultimo denominatore vale

$$2(B_{11}+B_{22}+B_{33})(a_{14}\sqrt{B_{11}}+a_{24}\sqrt{B_{22}}+a_{34}\sqrt{B_{33}}).$$

Si osservi anche che si ha in generale

$$-A=a^2_{14}B_{11}+a^2_{24}B_{22}+a^2_{34}B_{33}+2a_{14}a_{24}B_{12}+2a_{14}a_{34}B_{13}+2a_{24}a_{34}B_{23}\,;$$

e però quando $B=0$ le [8] § 4 porgono

$$-A=\frac{1}{B_{hh}}(a_{14}B_{1h}+a_{24}B_{2h}+a_{34}B_{3h})^2=(a_{14}\sqrt{B_{11}}+a_{24}\sqrt{B_{22}}+a_{34}\sqrt{B_{33}})^2,$$

vale a dire $-A$ è un quadrato.

2° Quando, oltre ad essere zero una delle radici di $\Delta(\rho)=0$, le altre due sono fra loro eguali: il paraboloide è di rotazione intorno al suo asse (a distanza finita). Allora si verificano le condizioni [3] § 29, e le equazioni dell'asse sono le [5] o [6] § 29 (*).

3° Quando poi l'equazione $\Delta(\rho)=0$ ha due radici nulle: allora è $B=0$, $B_{11}+B_{22}+B_{33}=0$; e le [3] § 29, essendo $\rho_2=0$, dànno $B_{23}=B_{31}=B_{12}=B_{22}-B_{33}=B_{33}-B_{11}=B_{11}-B_{22}=0$, onde anche $B_{11}=B_{22}=B_{33}=0$. Insomma è nullo B con tutti i suoi suddeterminanti di 2° ordine; e perciò basta che siano nulli tre suddeterminanti tali, che il 1° abbia l'un indice comune col 2° e l'altro col 3°.

Quindi segue

$$f(x)=(x_1\sqrt{a_{11}}+x_2\sqrt{a_{22}}+x_3\sqrt{a_{33}})^2+2(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3)x_4+a_{44}x_4^2,$$

e però la quadrica è un cilindro parabolico (§ 19-3°).

In questo caso le [1] si riducono ad una sola.

4° Da ultimo, se tutte tre le radici della equazione $\Delta(\rho)=0$ sono nulle: allora è anche $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$, e le [1] § 30 dànno $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$ (sei condizioni indipendenti), e quindi si ha

$$f(x)=2(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3)x_4+a_{44}x_4^2,$$

e la quadrica si scinde in un piano col piano all'infinito (§ 19-4°).

(*) Per coordinate-raggi dell'asse si possono assumere

$$\frac{A_{12,34}}{\sqrt{B_{33}}},\ \frac{A_{23,14}}{\sqrt{B_{22}}},\ \frac{A_{31,24}}{\sqrt{B_{11}}},\ \sqrt{B_{11}},\ \sqrt{B_{22}},\ \sqrt{B_{33}}.$$

Ancora dei piani principali.

*§ **32**. L'equazione $\Delta(\rho)=0$, che risolve la questione dei piani principali, è qui applicata al caso di coordinate ortogonali; ma noi sappiamo che le sue radici non variano per trasformazione di coordinate.

Nè la ricerca dei piani principali, quando le coordinate sono oblique, è guari più complicata; poichè è facile vedere che le condizioni di perpendicolarità fra una direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e il piano diametrale coniugato sono in generale

$$\frac{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3}{\alpha_1 + \omega_{12}\alpha_2 + \omega_{13}\alpha_3} = \frac{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3}{\omega_{21}\alpha_1 + \alpha_2 + \omega_{23}\alpha_3} = \frac{a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3}{\omega_{31}\alpha_1 + \omega_{32}\alpha_2 + \alpha_3},$$

e chiamando $-\rho$ ciascun rapporto,

$$[1] \quad \begin{cases} (a_{11} + \rho)\alpha_1 + (a_{12} + \omega_{12}\rho)\alpha_2 + (a_{13} + \omega_{13}\rho)\alpha_3 = 0, \\ (a_{21} + \omega_{21}\rho)\alpha_1 + (a_{22} + \rho)\alpha_2 + (a_{23} + \omega_{23}\rho)\alpha_3 = 0, \\ (a_{31} + \omega_{31}\rho)\alpha_1 + (a_{32} + \omega_{32}\rho)\alpha_2 + (a_{33} + \rho)\alpha_3 = 0; \end{cases}$$

onde l'equazione in ρ

$$[2] \quad \begin{vmatrix} a_{11} + \rho & a_{12} + \omega_{12}\rho & a_{13} + \omega_{13}\rho \\ a_{21} + \omega_{21}\rho & a_{22} + \rho & a_{23} + \omega_{23}\rho \\ a_{31} + \omega_{31}\rho & a_{32} + \omega_{32}\rho & a_{33} + \rho \end{vmatrix} = 0,$$

che è appunto la $\Delta(\rho)=0$, col fattore Ω.

Per ogni radice di questa equazione si ha

$$[3] \quad \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 :: \operatorname{sud}(a_{h1}+\omega_{h1}\rho) : \operatorname{sud}(a_{h2}+\omega_{h2}\rho) : \operatorname{sud}(a_{h3}+\omega_{h3}\rho) \quad (h=1,2,3)$$

$$:: \sqrt{\operatorname{sud}(a_{11} + \rho)} : \sqrt{\operatorname{sud}(a_{22} + \rho)} : \sqrt{\operatorname{sud}(a_{33} + \rho)},$$

ritenendo $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 1$, ed apponendo ai radicali segni convenienti.

Le radici della $\Delta(\rho)=0$ sono sempre reali, e in generale distinte; onde, in generale, il discriminante della [2] deve essere positivo (*).

(*) Sarebbe interessante investigare di quale decomposizione, analoga a quella in quadrati fatta dianzi per assi ortogonali, sia suscettibile il discriminante della [2].

Quando il discriminante è zero, cioè quando l'equazione ha una radice reale doppia e una semplice, la doppia ρ_2 dovrà far ridurre ad una sola le tre equazioni [1]; identificando p. es. la 2ª e la 3ª, avremo

$$\frac{a_{21}+\omega_{21}\rho_2}{a_{31}+\omega_{31}\rho_2}=\frac{a_{22}+\rho_2}{a_{32}+\omega_{32}\rho_2}=\frac{a_{23}+\omega_{23}\rho_2}{a_{33}+\rho_2}=-\sigma \text{ (ipotesi)},$$

dalle quali equazioni, rese lineari in ρ_2, $\rho_2\sigma$ e σ, ricaviamo

$$\rho_2=\frac{B_{11}\omega_{31}+B_{12}\omega_{32}+B_{13}}{\Omega_{11}a_{31}+\Omega_{12}a_{32}+\Omega_{13}a_{33}}.$$

Tenuto conto dei varii modi analoghi per ottenere ρ_2, troveremo che *le cinque condizioni, equivalenti a due indipendenti, affinchè la quadrica sia rotonda, consistono nella eguaglianza dei rapporti come*

$$[3] \qquad \frac{B_{h1}\omega_{i1}+B_{h2}\omega_{i2}+B_{h3}\omega_{i3}}{\Omega_{h1}a_{i1}+\Omega_{h2}a_{i2}+\Omega_{h3}a_{i3}},$$

indicando con *hi* una disposizione binaria degli indici 1, 2, 3.

Si noti che ciascuno di questi rapporti è il valore della radice doppia ρ_2; e che allo stesso si poteva manifestamente pervenire annullando i suddeterminanti del determinante [2].

Attualmente le [1] si riducono alla

$$[4] \qquad \alpha_1\sqrt{a_{11}+\rho_2}+\alpha_2\sqrt{a_{22}+\rho_2}+\alpha_3\sqrt{a_{33}+\rho_2}=0;$$

e però l'asse di rotazione ha le equazioni

$$[5] \qquad \frac{f_1(x)}{\sqrt{a_{11}+\rho_2}}=\frac{f_2(x)}{\sqrt{a_{22}+\rho_2}}=\frac{f_3(x)}{\sqrt{a_{33}+\rho_2}},$$

e il rimanente piano principale è coniugato e perpendicolare all'asse.

La quadrica è una sfera quando la equazione [2] ha una radice tripla, ossia quando le [1] divengono indeterminate; allora la radice suddetta è

$$\rho=-a_{11}=-a_{22}=-a_{33}=-\frac{a_{23}}{\omega_{23}}=-\frac{a_{31}}{\omega_{31}}=-\frac{a_{12}}{\omega_{12}};$$

e però le condizioni, perchè l'equazione $f(x)=0$ rappresenti una sfera in assi obliqui, sono

$$[6] \quad a_{11}=a_{22}=a_{33}=a, \quad a_{12}=a\omega_{12}, \quad a_{13}=a\omega_{13}, \quad a_{23}=a\omega_{23},$$

ovvero l'equazione tipica della sfera è

$$[7] \qquad a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{13}x_1x_3 + 2\omega_{23}x_2x_3) + 2(a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3)x_4 + a_{44}x_4^2 = 0.$$

E l'equazione

$$[7] \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{13}x_1x_3 + 2\omega_{23}x_2x_3 = 0$$

rappresenta il cono immaginario circoscritto dall'origine all'assoluto.

Osserviamo anche, che nel caso del paraboloide ($B = 0$) la [3] § 31 diviene

$$[8] \quad (\sqrt{B_{11}} + \omega_{12}\sqrt{B_{22}} + \omega_{13}\sqrt{B_{33}})\alpha_1 + (\omega_{21}\sqrt{B_{11}} + \sqrt{B_{22}} + \omega_{23}\sqrt{B_{33}})\alpha_2 + (\omega_{31}\sqrt{B_{11}} + \omega_{32}\sqrt{B_{22}} + \sqrt{B_{33}})\alpha_3 = 0,$$

e le equazioni dei due piani principali e dell'asse si modificano in conseguenza.

* **§ 33.** Per formare l'equazione complessiva dei tre piani principali, anzichè moltiplicare le loro equazioni separate, convien procedere come segue:

1° Siano le coordinate ortogonali: dalle [3] § 27, moltiplicate per B_{1h}, B_{2h}, B_{3h} ($h = 1, 2, 3$) e sommate, si traggono le equazioni

$$[1] \qquad \begin{cases} (B_{11} + \rho')\alpha_1 + B_{12}\alpha_2 + B_{13}\alpha_3 = 0, \\ B_{21}\alpha_1 + (B_{22} + \rho')\alpha_2 + B_{23}\alpha_3 = 0, \\ B_{31}\alpha_1 + B_{32}\alpha_2 + (B_{33} + \rho')\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

ov'è posto $\rho' = \dfrac{B}{\rho}$.

Ora queste equazioni differiscono dalle [3] § 27 solo per lo scambio di $a_{11}, \ldots$ in $B_{11}, \ldots$ $\left(\text{e di } \rho \text{ in } \dfrac{B}{\rho}\right)$, e devono dare per $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ gli stessi valori che quelle, vale a dire che i piani principali della nostra quadrica $f(x) = 0$ sono paralleli a quelli della quadrica

$$\psi(x) = B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 + 2B_{12}x_1x_2 + 2B_{13}x_1x_3 + B_{23}x_2x_3 + 2\lambda_1x_1x_4 + 2\lambda_2x_2x_4 + 2\lambda_3x_3x_4 + \lambda x_4^2 = 0,$$

qualunque siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda$; ed anzi coincideranno con questi piani,

se si suppone la seconda quadrica concentrica alla prima; il che si fa ponendo

$$\psi_h(A_{14}, A_{24}, A_{34}, B) = 0 \quad (h = 1, 2, 3),$$

ovvero

$$\lambda_h = -\frac{A_{14}B_{1h} + A_{24}B_{2h} + A_{34}B_{3h}}{B},$$

e lasciando λ arbitrario.

Gli stessi piani saranno principali anche per ogni sfera concentrica alla quadrica data, p. es.

$$\chi(x) = (Bx_1 - A_{14}x_4)^2 + (Bx_2 - A_{24}x_4)^2 + (Bx_3 - A_{34}x_4)^2 - R^2x_4^2 = 0,$$

qualunque sia R.

Insomma, se un punto x è in un piano principale della quadrica $f(x) = 0$, le tre equazioni

$$[2] \qquad \begin{cases} \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0, \\ \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x) + \alpha_3 \psi_3(x) = 0, \\ \alpha_1 \chi_1(x) + \alpha_2 \chi_2(x) + \alpha_3 \chi_3(x) = 0 \end{cases}$$

devono determinare per $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ un sistema di valori; e per conseguenza

$$[3] \qquad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \\ \chi_1(x) & \chi_2(x) & \chi_3(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

è l'equazione complessiva dei tre piani principali.

L'equazione diviene illusoria nel caso di un paraboloide ($B = 0$). Ma allora alla 2ª delle [2] può sostituirsi la [3] § 31 (**), e per $\chi(x) = 0$ può prendersi una qualunque sfera che abbia il centro sull'asse, per es. nel punto comune all'asse ed al piano polare dell'origine, punto individuato dalle equazioni

$$\frac{f_1(x)}{\sqrt{B_{11}}} = \frac{f_2(x)}{\sqrt{B_{22}}} = \frac{f_3(x)}{\sqrt{B_{33}}}, \qquad f_4(x) = 0,$$

(*) Questo determinante è l'*Jacobiano* o *determinante funzionale* delle $f(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ (a meno del fattore 8).

(**) In altre parole può assumersi

$$\psi(x) = (x_1\sqrt{B_{11}} + x_2\sqrt{B_{22}} + x_3\sqrt{B_{33}})^2 + \lambda x_4^2,$$

e che quindi ha per coordinate

$$y_h = A_{h1}\sqrt{B_{11}} + A_{h2}\sqrt{B_{22}} + A_{h3}\sqrt{B_{33}} \quad (h=1,2,3,4),$$

onde potremo porre

$$\chi(x) = (y_4x_1 - y_1x_4)^2 + (y_4x_2 - y_2x_4)^2 + (y_4x_3 - y_3x_4)^2 - R^2x_4^2.$$

Avremo così per equazione complessiva dei due piani principali (a distanza finita)

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ \chi_1(x) & \chi_2(x) & \chi_3(x) \\ \sqrt{B_{11}} & \sqrt{B_{22}} & \sqrt{B_{33}} \end{vmatrix} = 0.$$

2° Nel caso che le coordinate si suppongano oblique, i procedimenti ora esposti non cessano di condurre allo scopo; solo bisogna introdurre nelle formole nuovi termini con la scorta del § 32.

Noi ci limitiamo ad accennare quale funzione vada sostituita alla $\psi(x)$.

Consideriamo la forma quadratica ternaria

$$G(x_1, x_2, x_3) = B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{33}x_3^2 + 2B_{12}x_1x_2 + 2B_{13}x_1x_3 + 2B_{23}x_2x_3$$

e le sue semiderivate

$$G_h(x_1, x_2, x_3) = B_{h1}x_1 + B_{h2}x_2 + B_{h3}x_3 \quad (h=1,2,3),$$

e poniamo

$$G\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{pmatrix} = G_1(x_1, x_2, x_3)y_1 + G_2(x_1, x_2, x_3)y_2 + G_3(x_1, x_2, x_3)y_3\,;$$

indi moltiplichiamo le [1] § 32 per

$$G_1(\omega_{h1}, \omega_{h2}, \omega_{h3}), \qquad G_2(\omega_{h1}, \omega_{h2}, \omega_{h3}), \qquad G_3(\omega_{h1}, \omega_{h2}, \omega_{h3})$$

e sommiamo: avremo

$$G\begin{pmatrix} \omega_{h1}, & \omega_{h2}, & \omega_{h3} \\ 1, & \omega_{12}, & \omega_{13} \end{pmatrix}\alpha_1 + G\begin{pmatrix} \omega_{h1}, & \omega_{h2}, & \omega_{h3} \\ \omega_{21}, & 1, & \omega_{23} \end{pmatrix}\alpha_2 + G\begin{pmatrix} \omega_{h1}, & \omega_{h2}, & \omega_{h3} \\ \omega_{31}, & \omega_{32}, & 1 \end{pmatrix}\alpha_3$$
$$+ \frac{B}{\rho}(\omega_{h1}\alpha_1 + \omega_{h2}\alpha_2 + \omega_{h3}\alpha_3) = 0.$$

Queste tre equazioni provano che i piani principali della quadrica $f(x) = 0$ sono paralleli a quelli della

$$\psi(x) = G(1, \omega_{12}, \omega_{13})x_1^2 + \ldots + 2G\begin{pmatrix} 1, & \omega_{12}, & \omega_{13} \\ \omega_{21}, & 1, & \omega_{23} \end{pmatrix}x_1x_2 + \ldots$$
$$+ 2(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3)x_4 + \lambda x_4^2 = 0,$$

qualunque siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; anzi i piani principali saranno gli stessi scegliendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in modo che le due quadriche siano concentriche, cioè ponendo

$$\lambda_h = -\frac{1}{B}\left\{ G\begin{pmatrix} \omega_{h1}, \omega_{h2}, \omega_{h3} \\ 1, \ \omega_{12}, \omega_{13} \end{pmatrix} A_{14} + G\begin{pmatrix} \omega_{h1}, \omega_{h2}, \omega_{h3} \\ \omega_{21}, \ 1, \ \omega_{23} \end{pmatrix} A_{24} + G\begin{pmatrix} \omega_{h1}, \omega_{h2}, \omega_{h3} \\ \omega_{31}, \omega_{32}, \ 1 \end{pmatrix} A_{34} \right\}.$$

Insomma può assumersi

$$\psi(x) = G(x_1 + \omega_{12}x_2 + \omega_{13}x_3, \quad \omega_{21}x_1 + x_2 + \omega_{23}x_3, \quad \omega_{31}x_1 + \omega_{32}x_2 + x_3)$$
$$- \frac{2}{B} G\begin{pmatrix} x_1 + \omega_{12}x_2 + \omega_{13}x_3, & \omega_{21}x_1 + x_2 + \omega_{23}x_3, & \omega_{31}x_1 + \omega_{32}x_2 + x_3 \\ A_{14} + \omega_{12}A_{24} + \omega_{13}A_{34}, & \omega_{21}A_{14} + A_{24} + \omega_{23}A_{34}, & \omega_{31}A_{14} + \omega_{32}A_{24} + A_{34} \end{pmatrix} x_4$$
$$+ \lambda x_4^2.$$

Sezioni piane.

§ 34. I punti comuni alla quadrica e ad un piano u soddisfanno all'equazione della quadrica $f(x) = 0$ ed all'equazione del piano

$$[1] \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$

e costituiscono una conica, come già mostrammo nel § 7-2°.

Il centro di questa conica si determina facilmente, poichè esso è il punto comune al piano u e al diametro coniugato di u (§ 21)

$$\frac{f_1(x)}{u_1} = \frac{f_2(x)}{u_2} = \frac{f_3(x)}{u_3} \quad (= -\lambda), \quad (^*)$$

e però soddisfa alla [1] ed alle

$$[2] \qquad f_1(x) + \lambda u_1 = 0, \quad f_2(x) + \lambda u_2 = 0, \quad f_3(x) + \lambda u_3 = 0,$$

in tutto quattro equazioni omogenee in x_1, x_2, x_3, λ, dalle quali si ricava

$$[3] \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : \lambda :: \text{sud}\, a_{41} : \text{sud}\, a_{42} : \text{sud}\, a_{43} : \text{sud}\, a_{44} : \text{sud}\, u_4,$$

i suddeterminanti essendo presi nel determinante [6] § 10, che vale $-F(u)$.

(*) Quest'analisi non è applicabile al piano all'infinito, poichè per esso u_1, u_2, u_3 son nulli, e le presenti equazioni riescono indeterminate.

Il sud a_{44}, che ci occorrerà più sovente, lo potremo indicare con $G(u_1, u_2, u_3)$; cosicchè

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= B_{11}u_1^2 + B_{22}u_2^2 + B_{33}u_3^2 + 2B_{12}u_1u_2 + 2B_{13}u_1u_3 + 2B_{23}u_2u_3$$
$$= G(u_1, u_2, u_3).$$

1° Se $G(u_1, u_2, u_3) \gtrless 0$: la curva ha un centro unico a distanza finita, e però è una ellisse o una iperbole.

Essa diviene una coppia di rette quando inoltre il suo centro sta sulla quadrica, ossia quando, oltre le [1] e [2], si verifica anche l'equazione $f(x) = 0$. Ora si ha

$$f(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + x_4 f_4(x)$$
$$= x_4 \{ f_4(x) + \lambda u_4 \} \text{ per le [2] e [1],}$$
$$= \frac{x_4^2}{\text{sud}\, a_{44}} \left(a_{41}\text{sud}a_{41} + a_{42}\text{sud}a_{42} + a_{43}\text{sud}a_{43} + a_{44}\text{sud}a_{44} + u_4\text{sud}u_4 \right) \text{ per le [3],}$$

onde

$$[4] \qquad f(x) = -x_4^2 \frac{F(u_1, u_2, u_3, u_4)}{G(u_1, u_2, u_3)};$$

dunque la condizione $f(x) = 0$ involge l'altra $F(u) = 0$, e ritroviamo così la nota condizione affinchè il piano u tocchi la quadrica.

2° Se $G(u_1, u_2, u_3) = 0$, senz'altro: il centro va all'infinito, e la curva è una parabola.

Ne segue che $G(u_1, u_2, u_3) = 0$ è la condizione perchè il piano $(u_1, u_2, u_3, 0)$ tocchi il cono $f(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$ lungo una generatrice, ossia la condizione perchè il piano u passi per una tangente della conica all'infinito della quadrica $f(x) = 0$, o anche l'equazione di quella conica in coordinate di piani.

3° Se, oltre $G(u_1, u_2, u_3)$, è nullo uno dei numeratori, e quindi ciascun determinante di 4° ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} :$$

allora la conica si riduce a due rette parallele, e ciò avviene nei piani tangenti all'infinito o asintoti.

§ 35. Passiamo a determinare le direzioni e le lunghezze degli assi della conica di cui è parola.

1° Per trovare le direzioni degli assi, consideriamo quel diametro della conica che è coniugato alla direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Il suo piano diametrale coniugato

$$[1] \qquad \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$$

passa per quel diametro della conica che è coniugato al precedente; e se questi due diametri sono anche ortogonali, cioè sono gli assi della conica, allora pel secondo dovrà passare un piano perpendicolare al primo. Ora un tal piano, facendo fascio coi piani [1] e u, ha una equazione della forma

$$(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \lambda u_1)x_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \lambda u_2)x_2$$
$$+(a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \lambda u_3)x_3 + (a_{41}\alpha_1 + a_{42}\alpha_2 + a_{43}\alpha_3 + \lambda u_4)x_4 = 0;$$

ed essendo esso perpendicolare alla direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, avremo le condizioni

$$\frac{a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+a_{13}\alpha_3+\lambda u_1}{\alpha_1+\omega_{12}\alpha_2+\omega_{13}\alpha_3} = \frac{a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{23}\alpha_3+\lambda u_2}{\omega_{21}\alpha_1+\alpha_2+\omega_{23}\alpha_3} = \frac{a_{31}\alpha_1+a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3+\lambda u_3}{\omega_{31}\alpha_1+\omega_{32}\alpha_2+\alpha_3} (=-\rho)$$

ovvero

$$[2] \quad (a_{h1}+\rho\omega_{h1})\alpha_1+(a_{h2}+\rho\omega_{h2})\alpha_2+(a_{h3}+\rho\omega_{h3})\alpha_3+\lambda u_h=0 \quad (h=1, 2, 3).$$

Queste equazioni, con l'altra

$$[3] \qquad u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3 = 0,$$

porgono la equazione in ρ

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{12}+\rho\omega_{12} & a_{13}+\rho\omega_{13} & u_1 \\ a_{21}+\rho\omega_{21} & a_{22}+\rho & a_{23}+\rho\omega_{23} & u_2 \\ a_{31}+\rho\omega_{31} & a_{32}+\rho\omega_{32} & a_{33}+\rho & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Indicheremo con $\Theta(\rho)$ questo determinante cambiato di segno.

Per svilupparlo secondo le potenze di ρ, indichiamo con $G_{11}(u_1, u_2, u_3)$, ... i suddeterminanti complementari di a_{11}, ... nel determinante $G(u_1, u_2, u_3)$, e poniamo

$$H(u_1, u_2, u_3) = \Omega_{11}u_1^2 + \Omega_{22}u_2^2 + \Omega_{33}u_3^2 + 2\Omega_{12}u_1u_2 + 2\Omega_{13}u_1u_3 + 2\Omega_{23}u_2u_3$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} & u_1 \\ \omega_{21} & 1 & \omega_{23} & u_2 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 1 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix};$$

sicchè $H(u_1, u_2, u_3) = 0$ è l'equazione dell'assoluto in coordinate di piani. Allora, scrivendo per brevità G, ... invece di $G(u_1, u_2, u_3)$,..., avremo

$$[5] \quad \Theta(\rho) = H\rho^2 + (G_{11} + G_{22} + G_{33} + 2G_{12}\omega_{12} + 2G_{13}\omega_{13} + 2G_{23}\omega_{23})\rho + G = 0,$$

Ai due valori ρ_1, ρ_2 forniti dalla equazione $\Theta(\rho) = 0$ corrispondono mediante le [2] rispettivamente le direzioni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ dei due assi della conica (*). Ed è noto che esse sono reali, anche quando la conica è un'ellisse immaginaria.

Nella equazione $\Theta(\rho) = 0$ e nelle coordinate del centro [3] § 34, non figura a_{44}; ciò conferma la proprietà, che le sezioni prodotte da un piano nella quadrica e nel cono asintoto sono omotetiche e concentriche (§ 23 e 24).

2° Per trovare le lunghezze degli assi, moltiplichiamo le [2] per α_1, α_2, α_3 e sommiamo: avremo

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0) + \rho(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\omega_{12}\alpha_1\alpha_2 + 2\omega_{13}\alpha_1\alpha_3 + 2\omega_{23}\alpha_2\alpha_3) = 0;$$

or indicando con x_1, x_2, x_3, 1 le coordinate del centro, con R un semiasse della conica, e con y_1, y_2, y_3, 1 le coordinate del suo estremo, abbiamo

$$\frac{y_1 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_2 - x_2}{\alpha_2} = \frac{y_3 - x_3}{\alpha_3},$$

(*) Come al § 27, si ha dalle [2] e [3]

$$-\rho_1\{\alpha_1\beta_1 + \ldots + 2\omega_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \ldots\} = \beta_1(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3) + \ldots$$

$$= \alpha_1(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3) + \ldots = -\rho_2\{\beta_1\alpha_1 + \ldots + 2\omega_{12}(\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1) + \ldots\};$$

e però, se $\rho_1 \gtrless \rho_2$, dev'essere $\alpha_1\beta_1 + \ldots + 2\omega_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \ldots = 0$, che è la condizione di perpendicolarità.

e però la precedente equazione diventa

$$f(y_1 - x_1,\ y_2 - x_2,\ y_3 - x_3,\ 0) + \rho R^2 = 0.$$

Intanto (§ 6-1°)

$$f(y_1, y_2, y_3, 1) = f(y_1 - x_1,\ y_2 - x_2,\ y_3 - x_3,\ 0)$$
$$+ 2\left\{(y_1 - x_1)f_1(x_1,..,1) + (y_2 - x_2)f_2(x_1,..,1) + (y_3 - x_3)f_3(x_1,..,1)\right\}$$
$$+ f(x_1, x_2, x_3, 1);$$

e siccome $f(y_1, y_2, y_3, 1) = 0$, e

$$(y_1 - x_1)f_1(x_1,..,1) + (y_2 - x_2)f_2(x_1,..,1) + (y_3 - x_3)f_3(x_1,..,1)$$

è proporzionale a

$$\alpha_1 f_1(x_1,..,1) + \alpha_2 f_2(x_1,..,1) + \alpha_3 f_3(x_1,..,1)$$

che è nullo per la [1]; così

$$f(y_1 - x_1,\ y_2 - x_2,\ y_3 - x_3,\ 0) = -f(x_1, x_2, x_3, 1);$$

ma la [4] § 34 per $x_4 = 1$ porge

$$[6] \qquad f(x_1, x_2, x_3, 1) = -\frac{F}{G};$$

sarà dunque

$$\rho R^2 = \frac{F}{G} \quad \text{ovvero} \quad \rho = \frac{F}{G R^2}.$$

Quindi segue che *la equazione alle lunghezze dei semiassi della conica è*

$$\theta\left(\frac{F}{G R^2}\right) = 0,$$

ossia

$$[7] \qquad G^3 R^4 + (G_{11} + \ldots)FGR^2 + F^2 H = 0.$$

I due valori di R^2 forniti da questa equazione devono essere reali. Sono positivi se la successione dei coefficienti presenta due variazioni di segno, negativi se nessuna, uno positivo e uno negativo se una. E siccome F^2H è positivo (*); così, d'accordo col § 34, possiamo conclu-

(*) Infatti u_1, u_2, u_3 differiscono per uno stesso fattore dai coseni degli angoli che una perpendicolare al piano fa cogli assi, onde H differisce pel quadrato di quel fattore dal valore Ω che assumerebbe sostituendo a u_1, u_2, u_3 quei coseni, e che è certo positivo.

dere che: *la sezione è una ellisse reale, se* G *è positivo ed* F *ha il segno opposto a quello di* $G_{11} + \ldots$; *è una ellisse immaginaria, se* G *è positivo ed* F *ha il segno di* $G_{11} + \ldots$; *ed è una iperbole, se* G *è negativo.*

I due valori di R^2 sono opposti se $G < 0$ e $G_{11} + \ldots = 0$; dunque *i piani che secano la quadrica in iperboli equilatere sono quelli pei quali, oltre ad essere* G *negativo, è verificata la condizione*

$$[8] \qquad G_{11} + \ldots + 2G_{12}\omega_{12} + \ldots = 0.$$

Qui è opportuno ricordare che il segno di F non si altera per trasformazione di coordinate (§ 10); onde la [6] conferma che anche il segno di G non si altera; anzi la [6] mostra che non si altera il valore di $\frac{F}{G}$.

Nell'equazione [7] non figura u_4, e ciò concorda con la proprietà (§ 24), che le sezioni prodotte nella quadrica da piani paralleli sono omotetiche.

Notiamo altresì che per una sezione centrale è lecito assumere, indicando con $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la direzione coniugata al piano secante:

$$u_1 = f_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 0), \quad u_2 = f_2(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 0), \quad u_3 = f_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 0),$$

onde

$$F = Af(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 0), \qquad G = Bf(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, 0),$$

e

$$\rho = \frac{A}{BR^2};$$

questa osservazione semplifica alquanto la [7].

3° *Quando* $G = 0$, *il piano u seca la quadrica in una parabola*, come dianzi trovammo. Del resto allora la [7] porge $R^2 = \infty$.

Allora una radice della equazione $\Theta(\rho) = 0$ è zero, e l'altra $-\frac{G_{11} + \cdots}{H}$.

In corrispondenza alla radice zero le [2] e [3] dànno

$$[9] \qquad \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 :: G_{h1} : G_{h2} : G_{h3}$$

$$:: \sqrt{G_{11}} : \sqrt{G_{22}} : \sqrt{G_{33}},$$

e determinano la direzione dell'asse della parabola (a distanza finita).

All'altra radice corrisponde la direzione $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ perpendicolare

alla precedente; e però l'asse della parabola è la retta dalle equ zioni

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \quad \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x) + \beta_3 f_3(x) = 0.$$

Si potrebbero cercar le coordinate del vertice, aggiungendo a ques due equazioni la $f(x) = 0$.

Per calcolare poi il parametro principale della parabola, osservia che, in generale, detti R_1, R_2 i semiassi di una sezione piana, si l dalla [7]

$$R_1^2 R_2^2 = \frac{F^2 H}{G^3},$$

onde

$$\frac{R_1^4}{R_2^2} = \frac{R_1^6}{R_1^2 R_2^2} = \frac{G^3 R_1^6}{F^2 H} = \frac{(G R_1^2)^3}{F^2 H}.$$

Ora la trasformata della [7] in $r^2 = GR^2$ è

$$Gr^4 + (G_{11} + \ldots)Fr^2 + F^2H = 0;$$

quando $G = 0$ un valore di r^2, ossia di GR^2, diviene infinito, e l'al $-\frac{FH}{G_{11}+\ldots}$; e se scegliamo per GR_1^2 questo secondo valore, avrem

$$\text{per } G = 0 \lim \frac{R_1^4}{R_2^2} = -\frac{FH^2}{(G_{11}+\ldots)^3};$$

ma $\lim \frac{R_1^2}{R_2}$ è il semiparametro; dunque *il quadrato del semipar metro principale della parabola è* $-\frac{FH^2}{(G_{11}+\ldots)^3}$.

4° Segue dalle cose dette che, secondochè per un piano tang u è $G \gtrless 0$ (oltre $F = 0$), il piano è ellittico o iperbolico (§ 7-5° punto di contatto a distanza finita. Quando $G = 0$ (oltre $F = 0$ piano tangente è asintoto, e può essere ellittico o iperbolico o an parabolico (nel cono) (*).

* § **36.** L'equazione $\Theta(\rho) = 0$ merita uno studio speciale; poi ora proveremo che le sue radici, come già quelle dell'equazione bica $\Delta(\rho) = 0$ e come quelle della [7], conservano gli stessi val

(*) La proprietà, che quale è un piano tangente tali son tutti, mostra che de permanente il segno di G, finchè u_1, u_2, u_3 variano serbandosi reali, e tali che la condizione $F = 0$ non renda u_4 immaginario.

comunque si cangino le coordinate; ovvero *i mutui rapporti dei coefficienti dell'equazione* $\Theta(\rho)=0$ *sono invarianti assoluti.*

Ciò è evidente per ogni traslazione degli assi coordinati; perchè nell'equazione non entrano che le quantità $a_{11}, \ldots, a_{23}, u_1, u_2, u_3, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$, le quali non si alterano nella traslazione.

Nel caso che cangino le direzioni degli assi ma non l'origine, ricorriamo (come nel § 6) alla identità

$$\begin{aligned}&(a_{11}+\rho)x_1^2+(a_{22}+\rho)x_2^2+(a_{33}+\rho)x_3^2\\&+2(a_{12}+\rho\omega_{12})x_1x_2+2(a_{13}+\rho\omega_{13})x_1x_3+2(a_{23}+\rho\omega_{23})x_2x_3\\&=(a'_{11}+\rho)X_1^2+(a'_{22}+\rho)X_2^2+(a'_{33}+\rho)X_3^2\\&+2(a'_{12}+\rho\omega_{12})X_1X_2+2(a'_{13}+\rho\omega_{13})X_1X_3+2(a'_{23}+\rho\omega_{23})X_2X_3\,,\end{aligned}$$

cui qui si unisce l'altra

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=u'_1X_1+u'_2X_2+u'_3X_3:$$

ciascun membro della prima identità eguagliato a zero rappresenta uno stesso cono avente per vertice l'origine, e ciascun membro della seconda uno stesso piano per l'origine; dunque la condizione perchè il piano tocchi il cono lungo una generatrice non si altera mutandovi $a_{11},\ldots$ in $a'_{11},\ldots$ e $u_1,\ldots$ in $u'_1,\ldots$ Or questa condizione è appunto la [4] § 35, giusta l'osservazione fatta in fine del § 34; dunque ecc.

Siccome H è sempre positivo, così G e $G_{11}+\ldots$ non mutano segno per trasformazione di coordinate.

In particolare, per assi ortogonali l'equazione $\Theta(\rho)=0$ assume la forma più semplice

$$[1]\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\rho & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22}+\rho & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\rho & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ovvero

$$[2]\qquad (u_1^2+u_2^2+u_3^2)\rho^2+(G_{11}+G_{22}+G_{33})\rho+G=0.$$

Se inoltre si suppone per poco preso u per piano 12 ($u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$, $u_4=1$), allora alla quadrica si può sostituire il cilindro $f(x_1, x_2, 0, 1)=0$, e la $\Theta(\rho)=0$ riducesi a

$$[3]\qquad \rho^2+(a_{11}+a_{22})\rho+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0.$$

Or siccome questa ha le radici reali, perchè il suo discriminante è

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - \tfrac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 = -\tfrac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 - a_{12}^2 < 0\,;$$

così anche in generale *l'equazione* $\Theta(\rho) = 0$ *ha le radici reali.*

Siccome poi nel piano 12 la conica $f(x_1, x_2, 0,1)=0$ è ellisse, iperbole o parabola secondochè $a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \gtreqless 0$ (*), e $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ equivale a $\frac{G}{H}$, e H è positivo; così ritroviamo per altra via le proprietà già dimostrate: 1° *il piano u seca la quadrica lungo un'ellisse, un'iperbole o una parabola, secondochè* G *è positivo, negativo o nullo; 2° piani paralleli secano lungo coniche della stessa specie.*

Inoltre, nel caso della ellisse nel piano 12, questa è reale quando (**) il discriminante A_{33} della $f(x_1, x_2, 0, 1)$ ha segno opposto a $a_{11}+a_{22}$: ora A_{33} e $a_{11} + a_{22}$ sono rispettivamente ciò che divengono nell'ipotesi attuale F ed il secondo coefficiente $G_{11}+\ldots$ dell'equazione $\Theta(\rho)=0$, ed F non muta segno per trasformazione di coordinate (§ 10), come pure $G_{11} + \ldots$; dunque ritroviamo che *la sezione del piano u è una ellisse reale, quando* (*oltre* $G>0$) *la* F *ha il segno opposto a quello di* $G_{11} + \ldots$

Si può anche osservare che l'equazione del cilindro proiettante la sezione del piano u secondo l'asse 3, o anche l'equazione della conica proiezione della detta sezione sul piano 12 e secondo 3, si ottiene eliminando x_3 dalle equazioni della quadrica e del piano u, e quindi è

$$[4] \qquad f\left(x_1, x_2, -\frac{u_1x_1 + u_2x_2 + u_4x_4}{u_3}, x_4\right) = 0,$$

ovvero

$$[5] \quad f(u_3, 0, -u_1, 0)x_1^2 + f(0, u_3, -u_2, 0)x_2^2 + f(0, 0, -u_4, u_3)x_4^2$$
$$+ 2f\begin{pmatrix} u_3, 0, & -u_1, 0 \\ 0, & u_3, -u_2, 0 \end{pmatrix} x_1x_2 + 2f\begin{pmatrix} u_3, 0, -u_1, 0 \\ 0, & 0, -u_4, u_3 \end{pmatrix} x_1x_4$$
$$+ 2f\begin{pmatrix} 0, u_3, & -u_2, 0 \\ 0, 0, & -u_4, u_3 \end{pmatrix} x_2x_4 = 0,$$

ovvero

$$[6] \qquad G_{22}x_1^2 + G_{11}x_2^2 + \frac{d^2F}{da_{11}da_{22}}x_4^2$$
$$-2G_{12}x_1x_2 - 2\frac{d^2F}{da_{22}da_{14}}x_1x_4 - 2\frac{d^2F}{da_{11}da_{24}}x_2x_4 = 0.$$

(*) Cfr. Con. § 8.
(**) Cfr. Con. § 10 in fine.

Il discriminante dei termini a 2° grado in x_1, x_2 è Gu_3^2 (*), e il discriminante di tutto il 1° membro è Fu_3^4 (**); dunque *la sezione è*

(*) Infatti dalle proprietà dei determinanti aggiunti si ha

$$G_{11}G_{22} - G^2_{12} = G \begin{vmatrix} a_{33} & u_3 \\ u_3 & 0 \end{vmatrix} = -Gu_3^2.$$

(**) Questo discriminante si può calcolare in varie maniere. P. es. si può moltiplicare pel $-Gu_3^2$ ora trovato il 1° membro della equazione [4] in cui si siano sostituite le due coordinate del centro della conica proiezione; or queste coordinate sono quelle stesse del centro della sezione (tranne x_3 che è nullo), e d'altronde

$$f\left(x_1, x_2, -\frac{u_1x_1+u_2x_2+u_4x_4}{u_3}, x_4\right) = f\left(x_1, x_2, x_3 - \frac{u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4}{u_3}, x_4\right)$$
$$= f(x) = -\frac{F}{G}x_4^2 \quad (\S\ 34);$$

dunque il discriminante è Fu_3^4.

Si può anche ricorrere al teorema seguente (cfr. D'Ovidio, *Sui determinanti di determinanti*, Atti dell'Accademia di Torino, XI): « Il determinante, che ha per elementi i suddeterminanti d'ordine $n-\mu$ ricavati da un dato determinante d'ordine n col sopprimervi μ orizzontali e μ verticali prese comunque fra λ orizzontali fisse e λ verticali fisse, è eguale alla potenza $\left\{\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-\mu)}{1.2\ldots\mu}\right\}^{ma}$ del dato determinante, moltiplicata per la potenza $\left\{\frac{(\lambda-1)\ldots(\lambda-\mu+1)}{1.2\ldots(\mu-1)}\right\}^{ma}$ del suddeterminante ottenuto dal dato col sopprimervi le λ orizzontali e λ verticali suddette ». Sia il determinante dato quello del § 10 che vale $-F$, e le λ orizzontali fisse siano la 1ª, 2ª e 4ª, come pure le verticali; allora $n=5$, $\lambda=3$, $\mu=2$, e risulta il discriminante della [6] eguale a

$$F \begin{vmatrix} a_{33} & u_3 \\ u_3 & 0 \end{vmatrix}^2 = Fu_3^4.$$

Si potrebbe anche adoperare la seguente identità, che è una estensione di alcune esposte al § 13, e che il lettore potrà dimostrare mediante la regola di moltiplicazione dei determinanti:

$$\begin{vmatrix} f\binom{x}{x} & f\binom{x}{y} & f\binom{x}{z} \\ f\binom{y}{x} & f\binom{y}{y} & f\binom{y}{z} \\ f\binom{z}{x} & f\binom{z}{y} & f\binom{z}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \ldots \\ y_1 \ldots \\ z_1 \ldots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1(x) \ldots \\ f_1(y) \ldots \\ f_1(z) \ldots \end{vmatrix} = \ldots$$

$$= F\left\{ \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \right\};$$

scegliendo per x, y, z i punti

$$(u_3, 0, -u_1, 0), \quad (0, u_3, -u_2, 0), \quad (0\ 0, -u_4, u_3),$$

si ha il discriminante della [5] espresso da $F(u_1u_3^2, u_2u_3^2, u_3^3, u_4u_3^2)$ ossia Fu_3^4.

un'ellisse reale, se F *è di segno opposto a* G_{hh} (*), *ovvero anche se* (**)

$$G.\mathrm{sud}\, a_{hh} < \mathrm{sud}^2 a_{h4} \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Quando il piano u è tangente alla quadrica, la [6] si scinde in due equazioni lineari, cioè quelle delle proiezioni sul piano 12 delle due rette che la quadrica ha nel piano u. Per semplicità, supponiamo che il punto di contatto y del piano u abbia una coordinata nulla, p. e. y_4 (***); allora avremo

$$f(y_1, y_2, y_3, 0) = 0,$$

$$u_1 = f_1(y_1, y_2, y_3, 0),\ u_2 = f_2(y_1, y_2, y_3, 0),\ u_3 = f_3(y_1, y_2, y_3, 0),\ u_4 = f_4(y_1, y_2, y_3, 0);$$

ed è agevole vedere che la [6] diverrà

$$B(y_2x_1 - y_1x_2)^2 - 2(A_{14}y_2 - A_{24}y_1)(y_2x_1 - y_1x_2)x_4 + (A_{11}y_2^2 + A_{22}y_1^2 - 2A_{12}y_1y_2)x_4^2 = 0;$$

la quale, risoluta per $y_2x_1 - y_1x_2$, porge

$$[7] \qquad y_2x_1 - y_1x_2 = \frac{x_4}{B}\left\{A_{14}y_2 - A_{24}y_1 \pm f_3(y_1, y_2, y_3, 0)\sqrt{A}\right\},$$

visto che per la [5] § 4

$$(A_{14}y_2 - A_{24}y_1)^2 - B(A_{11}y_2^2 + A_{22}y_1^2 - 2A_{12}y_1y_2) = -A(B_{11}y_2^2 + B_{22}y_1^2 + 2B_{12}y_1y_2),$$

e pel § 5

$$0 = a_{33}f(y_1, y_2, y_3, 0) = f_3^2(y_1, y_2, y_3, 0) + B_{11}y_2^2 + B_{22}y_1^2 + 2B_{12}y_1y_2,$$

ossia

$$B_{11}y_2^2 + B_{22}y_1^2 + 2B_{12}y_1y_2 = -f_3^2(y_1, y_2, y_3, 0).$$

La [7], e le due analoghe relative ai piani 23, 31, forniscono le seguenti *equazioni delle due rette della quadrica che passano pel*

(*) Dal confronto dei varii enunciati emerge che G_{11}, G_{22}, G_{33} devono aver lo stesso segno fra loro e con $G_{11} + \ldots$ quando $G > 0$. Non ci fermeremo a verificarlo col calcolo, per non uscire dai limiti che ci siamo dovuti imporre.

(**) Poichè da una proprietà dei determinanti aggiunti si deduce

$$\mathrm{sud}\, a_{hh} . \mathrm{sud}\, a_{44} - \mathrm{sud}^2 a_{h4} = FG_{hh}.$$

(***) Nel qual caso le due rette son parallele a un asintoto, la cui direzione è (y_1, y_2, y_3).

punto $(y_1, y_2, y_3, 0)$:

$$[8] \quad \frac{y_2x_1-y_1x_2}{A_{14}y_2-A_{24}y_1\pm f_3(y_1, y_2, y_3, 0)\sqrt{A}}=\frac{y_3x_2-y_2x_3}{A_{24}y_3-A_{34}y_2\pm f_1(y_1, y_2, y_3, 0)\sqrt{A}}$$

$$=\frac{y_1x_3-y_3x_1}{A_{34}y_1-A_{14}y_3\pm f_2(y_1, y_2, y_3, 0)\sqrt{A}}=\frac{x_4}{B}.$$

Altri tre gruppi di equazioni analoghe corrispondono ai punti y pei quali sia nulla y_1 o y_2 o y_3.

Si noti: 1° che le [8] non servono quando $B=0$, ma allora soccorrono gli altri tre gruppi; 2° che, perchè le rette sulla quadrica siano reali, occorre prima di tutto che questa si estenda all'infinito, vale a dire che i punti y qui considerati siano reali; e subordinatamente che sia $A>0$ o almeno $A=0$.

Nel caso $A=0$, che è quello del cono, le due rette per ciascun punto y coincidono in una di equazioni

$$\frac{y_2x_1-y_1x_2}{A_{14}y_2-A_{24}y_1}=\frac{y_3x_2-y_2x_3}{A_{34}y_2-A_{24}y_3}=\frac{y_1x_3-y_3x_1}{A_{34}y_1-A_{14}y_3}=\frac{x_4}{B},$$

come si poteva trovare direttamente.

Sezioni circolari.

§ 37. La sezione prodotta dal piano u nella quadrica diviene circolare quando ammette infiniti assi, vale a dire quando due delle equazioni [2] e [3] § 35 sono conseguenze delle altre, e quindi tutti i suddeterminanti di 3° ordine del determinante [4] § 35 son nulli per uno stesso valore di ρ; al qual fine basta siano nulli tre suddeterminanti complementari di elementi tali, che il 1° abbia l'un indice comune col 2° e l'altro col 3°.

Il suddeterminante complementare dell'elemento 0 è $\Delta(\rho)$; quelli di u_1, u_2, u_3 sono forme lineari in u_1, u_2, u_3; quelli di $a_{11}, \ldots$ sono forme quadratiche, e dànno sei equazioni compendiate nella

$$[1] \qquad G_{ih}+\rho H_{ih}=0 \qquad (i, h=1, 2, 3);$$

da queste eliminando ρ, avremo che *le condizioni perchè la sezione del piano u sia un circolo sono*

$$[2] \qquad \frac{G_{11}}{H_{11}}=\frac{G_{22}}{H_{22}}=\frac{G_{33}}{H_{33}}=\frac{G_{23}}{H_{23}}=\frac{G_{31}}{H_{31}}=\frac{G_{12}}{H_{12}},$$

delle quali due sole indipendenti.

Per coordinate ortogonali

$$[3] \qquad \frac{G_{11}}{u_2^2+u_3^2}=\frac{G_{22}}{u_3^2+u_1^2}=\frac{G_{33}}{u_1^2+u_2^2}=\frac{G_{23}}{u_2u_3}=\frac{G_{31}}{u_3u_1}=\frac{G_{12}}{u_1u_2},$$

e potranno ritenersi le

$$[4] \qquad u_1G_{23}=u_2G_{31}=u_3G_{12}.$$

Nel caso del circolo l'equazione $\Theta(\rho)=0$ *ha le due radici eguali;* e per provarlo basta osservare che il discriminante della [3] § 36, ossia $-\frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2-a_{12}^2$, si annulla per $a_{11}=a_{22}$ e $a_{12}=0$.

Fra le equazioni in ρ vi è anche la $\Delta(\rho)=0$, che servì a determinare i piani principali; onde si rileva che la radice doppia della $\Theta(\rho)=0$ è una delle radici della $\Delta(\rho)=0$, e si deduce che il piano d'una sezione circolare dev'esser parallelo a un asse della quadrica. E precisamente: noi possiamo prendere una qualunque radice della $\Delta(\rho)=0$, e sostituirla in una sola delle [1] che sono quadratiche in u_1, u_2, u_3, e in una sola ben determinata di quelle condizioni lineari in u_1, u_2, u_3 che abbiamo accennato in principio; abbiamo così due equazioni, che forniscono due sistemi di valori per i mutui rapporti fra u_1, u_2, u_3.

Insomma: *per ciascun asse della quadrica passano due piani, i quali e i loro paralleli secano la quadrica secondo circoli*, e però son chiamati piani *ciclici*.

I due piani ciclici per uno stesso asse sono in posizione simmetrica rispetto a ciascun piano principale; e i due sistemi di piani ciclici cui essi dànno origine, si dicono *antiparalleli*.

Si hanno così sei sistemi di piani ciclici, ma vedremo che due soli sono reali.

In ciascun sistema vi sono due piani tangenti alla quadrica, e i loro punti di contatto diconsi *ombelichi* o punti *ciclici* della quadrica. Quattro al più fra essi sono reali.

A complemento di questi cenni sulle sezioni circolari, esporremo ora alcune considerazioni geometriche, che il lettore può anche tralasciare senza alcun inconveniente.

La conica all'infinito della quadrica e l'assoluto dello spazio, in generale, han comuni quattro punti immaginarii, vertici d'un quadrangolo completo. Il triangolo diagonale di questo quadrangolo è l'unico che sia autoconiugato rispetto alla detta conica ed all'assoluto; e però i suoi lati son le rette all'infinito dei piani principali della quadrica, e i suoi vertici i punti all'infinito degli assi; i sei lati del quadrangolo sono poi le rette all'infinito dei piani ciclici.

Siccome i punti comuni alla conica all'infinito della quadrica e all'assoluto dello spazio sono determinati da tre equazioni a coefficienti reali (quella della quadrica, quella di una sfera e quella del piano all'infinito); così due di essi hanno le coordinate omologhe complesse-coniugate, e lo stesso vale per gli altri due; e ne deriva che il lato passante pei due primi punti e quello per gli altri due sono reali; mentre gli altri quattro lati del quadrangolo sono immaginarii, ma ciascuno seca l'opposto in un punto reale. Ciò prova che due sistemi di piani ciclici sono reali e gli altri quattro immaginarii, e conferma che i piani principali e gli assi sono reali.

Se la quadrica è un paraboloide, la conica all'infinito degenera in due rette; un vertice del triangolo diagonale suddetto è il loro punto comune, ed è il punto all'infinito dell'asse del paraboloide; e le due rette individuano le giaciture di due sistemi di piani, i quali han comuni con la quadrica coppie di rette di cui una all'infinito, coppie assimilabili a circoli.

Se la quadrica è rotonda, devono esistere infiniti triangoli autoconiugati come il precedente, e però allora la conica all'infinito della quadrica ha doppio contatto coll'assoluto; la corda dei contatti è la retta all'infinito dei paralleli, e il suo polo rispetto all'assoluto è il punto all'infinito dell'asse di rotazione. Dunque nelle quadriche rotonde i due sistemi di piani ciclici reali si riducono al sistema dei *paralleli*, ossia dei piani perpendicolari all'asse di rotazione.

Nella sfera ogni piano è ciclico.

Nel cono non vi è particolarità notevole.

Ritornando al caso di una quadrica qualunque, rileviamo le seguenti proprietà.

Per ciascuno dei quattro punti comuni alla conica all'infinito della quadrica e all'assoluto dello spazio passa una coppia di rette (immaginarie) della quadrica. Una retta di una coppia ne incontra una di ciascuna altra coppia, e i tre punti d'incontro sono ombelichi; onde segue che *i dodici ombelichi si trovano allineati per tre su otto rette immaginarie della quadrica*. Ne segue anche che non più di quattro ombelichi sono reali.

Considerando due circoli antiparalleli reali, essi hanno in comune i due punti nei quali la retta intersezione dei loro piani seca la quadrica; or questi punti possono esser reali, od avere le coordinate omologhe complesse-coniugate; ma in ogni caso è facile vedere che, prendendo su ciascuno dei due circoli un altro punto (non all'infinito), questi quattro punti individueranno una sfera reale, la quale conterrà certamente i due circoli. Dunque *due sezioni circolari antiparallele si trovano sopra una sfera.*

Sia dalle formole dianzi stabilite, sia dalle considerazioni geometriche testè fatte sulla conica all'infinito della quadrica in relazione con l'assoluto, emerge che *le* ∞ *quadriche comprese nella equazione*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{13}x_1x_3 + 2\omega_{23}x_2x_3) = 0,$$

qualunque valore si attribuisca a λ, *sono non solo concentriche ma anche concicliche*, vale a dire ammettono gli stessi sistemi di piani ciclici.

* **§ 38.** Nel § 28 esponemmo una decomposizione in quadrati del discriminante della equazione cubica $\Delta(\rho) = 0$, che servì a determinare gli assi di una quadrica. Ora esporremo una analoga decomposizione del discriminante della equazione quadratica $\Theta(\rho) = 0$, che serve a determinare gli assi di una sezione piana della quadrica. Avvertiamo che, come per la $\Delta(\rho) = 0$, la decomposizione si sa fare solo nella ipotesi di coordinate ortogonali, ossia per l'equazione [2] § 36.

Il discriminante di questa equazione, col segno cambiato, è

$$[1] \qquad (G_{11} + G_{22} + G_{33})^2 - 4(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)G.$$

Ora, dalle proprietà dei determinanti aggiunti si hanno le identità

$$Gu_1^2 = G_{22}G_{33} - G^2_{23}, \quad Gu_2^2 = G_{33}G_{11} - G^2_{31}, \quad Gu_3^2 = G_{11}G_{22} - G^2_{12},$$

$$Gu_2u_3 = G_{23}G_{11} - G_{31}G_{12}, \quad Gu_3u_1 = G_{31}G_{22} - G_{12}G_{23}, \quad Gu_1u_2 = G_{12}G_{33} - G_{23}G_{31};$$

dalle quali, moltiplicate per u_1^2, u_2^2, u_3^2, $2u_2u_3$, $2u_3u_1$, $2u_1u_2$ e sommate, si desume l'altra:

$$[2] \qquad G(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2 = - \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & u_1 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & u_2 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Questo determinante si può in tre modi sviluppare in prodotti di suddeterminanti di 2° ordine; sommando gli sviluppi, e sopprimendo quella parte che riproduce la somma precedente, si trova

$$[3] \quad -2G(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ G_{12} & G_{13} \end{vmatrix}^2 + \ldots + 2 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ G_{31} & G_{33} \end{vmatrix} - \ldots$$

Inoltre dalle identità

$$[4] \qquad u_1 G_{1h} + u_2 G_{2h} + u_3 G_{3h} = 0 \; (h = 1, 2, 3)$$

si trae

$$(G_{11} + G_{22} + G_{33}) u_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ G_{31} & G_{33} \end{vmatrix};$$

quadrando questa e le due analoghe e poi sommando, si ottiene

$$[5] \quad (G_{11} + G_{22} + G_{33})^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 2 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{11} & G_{12} \end{vmatrix}^2 + \ldots$$
$$+ 2 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ G_{31} & G_{33} \end{vmatrix} + \ldots$$

Da ultimo, sommando la [5] con due volte la [3], risulta l'espressione [1] equivalente alla seguente somma di sei quadrati:

$$[6] \qquad 2 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ G_{12} & G_{13} \end{vmatrix}^2 + 2 \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ G_{23} & G_{21} \end{vmatrix}^2 + 2 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{31} & G_{32} \end{vmatrix}^2$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ G_{31} & G_{33} \end{vmatrix} \right\}^2 + \left\{ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ G_{22} & G_{21} \end{vmatrix} \right\}^2 + \left\{ \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ G_{13} & G_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_3 & u_2 \\ G_{23} & G_{22} \end{vmatrix} \right\}^2,$$

divisa per $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Prendendo per u_1, u_2, u_3 i coseni degli angoli della normale al piano u, il divisore si riduce a 1, ed allora abbiamo sei quadrati di funzioni intere.

I quadrati si possono ridurre a cinque, e ciò in tre maniere; poichè p. es. la somma dei primi tre vale

$$3 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ G_{12} & G_{13} \end{vmatrix}^2 + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{31} & G_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ G_{21} & G_{23} \end{vmatrix} \right\}^2,$$

grazie alla identità

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ G_{12} & G_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ G_{21} & G_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ G_{31} & G_{32} \end{vmatrix}.$$

Sappiamo anche ridurre l'espressione [1] a una somma di due quadrati, ma di espressioni fratte.

Infatti, dal modo come abbiam dedotta la [2] apparisce che è lecito in essa porre zero dov'è scritto esplicitamente u_1, e però

$$G(u_2^2+u_3^2)^2 = -\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & u_2 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & u_3 \\ 0 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix};$$

sviluppando pei prodotti dei suddeterminanti formati con le orizzontali 1ª e 4ª, 2ª e 3ª, si ha

$$-G(u_2^2+u_3^2)^2 = G_{11}(2G_{23}u_2u_3 - G_{33}u_2^2 - G_{22}u_3^2) + (u_2G_{31} - u_3G_{12})^2,$$

e per le [4]

$$\begin{aligned} &-G(u_2^2+u_3^2)^2 \\ &= G_{11}\left\{-u_3(G_{31}u_1+G_{33}u_3) - u_2(G_{21}u_1+G_{22}u_2) - G_{33}u_2^2 - G_{22}u_3^2\right\} \\ &\qquad + (u_2G_{31} - u_3G_{12})^2 \\ &= G_{11}\left\{G_{11}u_1^2 - (G_{22}+G_{33})(u_2^2+u_3^2)\right\} + (u_2G_{31} - u_3G_{12})^2 \\ &= G_{11}^2(u_1^2+u_2^2+u_3^2) - G_{11}(G_{11}+G_{22}+G_{33})(u_2^2+u_3^2) + (u_2G_{31} - u_3G_{12})^2; \end{aligned}$$

di qui ricavando il valore di G e sostituendo nella espressione [1], questa diventa

$$[7] \quad \frac{\{2G_{11}(u_1^2+u_2^2+u_3^2) - (G_{11}+G_{22}+G_{33})(u_2^2+u_3^2)\}^2}{(u_2^2+u_3^2)^2} + \frac{4(u_2G_{31}-u_3G_{12})^2(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}{(u_2^2+u_3^2)^2},$$

che è una somma di due quadrati.

Permutando gl'indici 1, 2, 3 si ottengono due espressioni analoghe coi denominatori $(u_3^2+u_1^2)^2$, $(u_1^2+u_2^2)^2$. Ed è facile verificare che le radici quadrate dei tre primi numeratori dànno per somma zero, e così pure le radici dei tre secondi numeratori.

L'equazione $\Theta(\rho)=0$ ha le radici eguali allorchè è nullo il suo discriminante, e quindi allorchè son nulli tutti i sei quadrati della formola [6], oppure i due della formola [7]. Si può verificare che, annullando questi quadrati, si ricade nelle condizioni [3] o [4] § 37 affinchè la conica sia un circolo.

Criterio pei punti esterni o interni alla quadrica.

§ 39. Un punto x, che non appartenga alla quadrica, è esterno o interno (§ 7-6°) secondochè il cono da esso circoscritto alla quadrica è reale o immaginario, o anche secondochè il suo piano polare seca la quadrica in una conica reale o immaginaria (§ 8-3°). Suppongasi dunque che il piano u del § 35 sia polare di x: allora è lecito porre

$$u_1 = f_1(x), \quad u_2 = f_2(x), \quad u_3 = f_3(x), \quad u_4 = f_4(x),$$

onde (§ 11-[7])

$$F(u) = Af(x);$$

e si trova subito

$$G = Bf(x) - Ax_4^2,$$

che è il primo membro dell'equazione del cono asintoto (§ 23); e poi anche

$$\begin{aligned} G_{33} &= a_{11}f_2^2(x) + a_{22}f_1^2(x) - 2a_{12}f_1(x).f_2(x) \\ &= B_{33}f(x) - (A_{33}x_4^2 + Bx_3^2 - 2A_{34}x_3x_4), \text{ ecc.} \end{aligned}$$

($G_{33} = 0$ è l'equazione di una certa coppia di piani asintoti, ecc.).

Quindi deduciamo il seguente criterio:

Se il punto x non è sulla quadrica, sarà esterno quando sia $Bf(x) - Ax_4^2 \leqq 0$, e quando, essendo $Bf(x) - Ax_4^2 > 0$, sia $Af(x)$ di segno opposto alla espressione $B_{33}f(x) - (A_{33}x_4^2 + Bx_3^2 - 2A_{34}x_3x_4)$ ed alle due analoghe; altrimenti il punto sarà interno (*).

Quadrica riferita al centro, a una terna di diametri coniugati, ai proprii assi.

§ 40. Esaminiamo quali particolarità offra la posizione della quadrica rispetto ai piani coordinati, quando nella equazione $f(x) = 0$ manca un termine, ossia è nullo uno dei coefficienti.

Se $a_{44} = 0$: l'origine è sulla quadrica.

(*) Questo criterio non si applica al centro, essendo esso il polo del piano all'infinito, che fu escluso dalle considerazioni del § 34. Ma pel centro già vedemmo altrimenti quando sia interno alla quadrica, quando esterno, e quando sulla quadrica.

Se $a_{14}=0$: l'origine è nel piano diametrale $f_1(x)=0$ coniugato all'asse coordinato 1.

Se $a_{24}=0$ o $a_{34}=0$: analogamente.

Se $a_{12}=0$: il piano diametrale coniugato all'asse 1 è parallelo all'asse 2, e viceversa. Laonde, se la quadrica ha centro, gli assi coordinati 1 e 2 son paralleli a due diametri coniugati; e in ogni caso son paralleli a due diametri coniugati della conica $f(x_1, x_2, 0, 1)=0$ che la quadrica ha nel piano 12, od anche a un diametro di questa conica ed alle corde ad esso coniugate.

Se $a_{13}=0$ o $a_{23}=0$: analogamente.

Se $a_{11}=0$: l'asse 1 incontra la quadrica in un punto all'infinito, poichè la $f(x_1, 0, 0, 1)=0$ ha una radice infinita; in altre parole l'asse 1 è parallelo a un asintoto della quadrica.

Se $a_{22}=0$ o $a_{33}=0$: analogamente.

I casi di mancanza di più termini corrispondono a combinazioni delle particolarità accennate. Valgano alcuni esempii:

Se $a_{14}=0$, $a_{24}=0$, $a_{34}=0$: l'origine è comune ai piani diametrali coniugati alle direzioni 1, 2, 3, ossia è centro della quadrica. Del resto, perchè l'origine sia centro, evidentemente bisogna e basta che l'equazione $f(x_1, x_2, x_3, 1)=0$ non si alteri mutando di segno x_1, x_2, x_3, e quindi che manchino i termini con x_1, x_2, x_3.

Se $a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{23}=0$: gli assi coordinati son paralleli a una terna di diametri coniugati, quando la quadrica ha centro. E in ogni caso, uno degli assi coordinati è parallelo a un diametro della quadrica, e gli altri due sono paralleli a due diametri coniugati della conica prodotta nella quadrica da un piano coniugato con quel primo diametro.

Se $a_{11}=0$, $a_{22}=0$, $a_{33}=0$: gli assi coordinati son paralleli a tre asintoti. Il che è possibile soltanto per un iperboloide.

§ **41**. Supponiamo che la quadrica abbia centro ($B \gtrless 0$), e trasportiamo ivi l'origine, senza mutare le direzioni degli assi coordinati. Applicando la regola § 6-1° e le [4], [5] e [6] § 18, si ottiene per *equazione della quadrica riferita al centro come origine:*

$$[1] \qquad a_{11}X_1^2+a_{22}X_2^2+a_{33}X_3^2+2a_{12}X_1X_2+2a_{13}X_1X_3+2a_{23}X_2X_3+\frac{A}{B}=0,$$

vale a dire che si ha

$$f(x_1, x_2, x_3, 1)=f(X_1, X_2, X_3, 0)+\frac{A}{B}\,.$$

Questa equazione si può render più semplice, cangiando le direzioni degli assi coordinati in modo che spariscano i tre termini coi pro-

dotti di due coordinate; il che si ottiene prendendo per nuovi assi coordinati una terna di diametri coniugati, ossia riferendo la quadrica a tre piani diametrali coniugati. Bisogna fare la sostituzione

$$X_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3\,,$$
$$X_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3\,,$$
$$X_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3\,,$$

in cui α_{11},... hanno i significati accennati al § 6-2°, e però dipendono da sei parametri; allora la [1] assume la forma

$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{13}x_1x_3 + 2a'_{23}x_2x_3 + \frac{A}{B} = 0.$$

in cui le $a'_{11}, \ldots$ sono funzioni quadratiche omogenee delle $\alpha_{11}, \ldots$ Eguagliando a zero a'_{12}, a'_{13}, a'_{23}, si hanno tre equazioni nelle α_{11},...; sicchè la riduzione si può fare in ∞^3 modi. Ma a noi basta trovare i coefficienti della trasformata, senza entrare nei particolari della sostituzione.

All'uopo osserviamo che *l'equazione della quadrica riferita a una terna di diametri coniugati è*

$$[2] \qquad a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + \frac{A}{B} = 0\,;$$

e ricorriamo agli invarianti assoluti, stabiliti al § 6: chiamando λ_1, λ_2, λ_3 gli angoli dei tre diametri e Λ il seno quadrato del loro triedro, avremo le tre equazioni

$$[3] \qquad \frac{D}{\Omega} = \frac{a'_{11}\,\mathrm{sen}^2\lambda_1 + a'_{22}\,\mathrm{sen}^2\lambda_2 + a'_{33}\,\mathrm{sen}^2\lambda_3}{\Lambda}\,,$$

$$[4] \qquad \frac{C}{\Omega} = \frac{a'_{11}a'_{22} + a'_{11}a'_{33} + a'_{22}a'_{33}}{\Lambda}\,,$$

$$[5] \qquad \frac{B}{\Omega} = \frac{a'_{11}a'_{22}a'_{33}}{\Lambda}\,,$$

senza contare la

$$\frac{A}{\Omega} = \frac{a'_{11}a'_{22}a'_{33}A}{\Lambda B}$$

che coincide con la [5].

Queste equazioni determinano a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, quando son dati λ_1, λ_2, λ_3 e quindi Λ. P. es. eliminando a'_{22}, a'_{33}, si ha una equazione di grado $1.2.3 = 6$ in a'_{11}, che fornisce sei valori per a'_{11}, a ciascuno dei quali corrisponde nelle [3] e [4] un valore di a'_{22} e uno di a'_{33}. Ma il calcolo e la discussione di questi valori sono complicati; e inoltre bisognerebbe assegnare le limitazioni cui van soggetti λ_1, λ_2, λ_3. Si è perciò che noi non proseguiremo in questa via.

Più facile è il caso particolare $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, onde $\Lambda = 1 - 3\cos^2\lambda + 2\cos^3\lambda$. Allora la [3] diviene

$$[6] \qquad \frac{D\Lambda}{\Omega \operatorname{sen}^2\lambda} = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33},$$

e con le [4] e [5] determina la somma di a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, la somma dei loro prodotti a due a due, e il prodotto di tutte tre; quindi si ottengono $-a'_{11}$, $-a'_{22}$, $-a'_{33}$ come radici dell'equazione di 3° grado

$$\frac{\Omega}{\Lambda}\rho^3 + \frac{D}{\operatorname{sen}^2\lambda}\rho^2 + C\rho + B = 0;$$

e resta a vedere a quali limitazioni vada soggetto λ.

Ma la ricerca più facile e più importante è quella della *equazione della quadrica riferita ai suoi piani principali.*

Allora le [3], [4], [5] divengono

$$\frac{D}{\Omega} = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}, \quad \frac{C}{\Omega} = a'_{11}a'_{22} + a'_{11}a'_{33} + a'_{22}a'_{33}, \quad \frac{B}{\Omega} = a'_{11}a'_{22}a'_{33},$$

e però $-a'_{11}$, $-a'_{22}$, $-a'_{33}$ sono le radici della equazione

$$\Omega\rho^3 + D\rho^2 + C\rho + B = 0,$$

che è di nuovo la $\Delta(\rho) = 0$ dei §§ 6 e 27. Del resto è evidente che la [4] § 27 applicata alla [2] si riduce a $(a'_{11}+\rho)(a'_{22}+\rho)(a'_{33}+\rho) = 0$, onde le sue radici sono $-a'_{11}$, $-a'_{22}$, $-a'_{33}$.

Sappiamo che le radici di questa equazione sono reali, e potremmo scriverne le espressioni in funzione di Ω, D, C, B; ma ce ne dispensiamo.

È lecito scegliere per valore di $-a'_{11}$ una qualunque delle radici, e così per $-a'_{22}$ e a'_{33}; poichè ciò equivale a permutare le veci degli assi.

Vi possono essere tre radici positive, o tre negative, o due positive e una negativa, o una positiva e due negative. Nessuna è nulla, essendosi supposto $B \gtrless 0$.

In ogni caso, se non è $A = 0$, la [2] mostra che la quadrica seca i suoi assi nei punti pei quali è rispettivamente

$$[7] \quad x_1 = \pm\sqrt{-\frac{A}{Ba'_{11}}}, \quad x_2 = \pm\sqrt{-\frac{A}{Ba'_{22}}}, \quad x_3 = \pm\sqrt{-\frac{A}{Ba'_{33}}},$$

e la equazione stessa può scriversi

$$[8] \qquad \frac{x_1^2}{-\frac{A}{Ba'_{11}}} + \frac{x_2^2}{-\frac{A}{Ba'_{22}}} + \frac{x_3^2}{-\frac{A}{Ba'_{33}}} = 1.$$

I secondi membri delle [7] possono esser reali o immaginarii puri: chiamando a_1, a_2, a_3 i loro moduli, troveremo dunque che *l'equazione di una quadrica a centro, riferita ai piani principali, si riduce a uno dei seguenti tipi, quando A non è nullo:*

[I.] $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

[II.] $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = -1,$$

[III.] $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

[IV.] $$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1;$$

essendo inutile considerare gli altri due casi analoghi al 3° ($+-+$, $-++$) e gli altri due analoghi al 4° ($-+-$, $--+$).

Se poi è $A=0$, allora la [2] si riduce a

[9] $$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 = 0;$$

e chiamando a_1, a_2, a_3 i moduli di $\sqrt{\frac{1}{a'_{11}}}$, $\sqrt{\frac{1}{a'_{22}}}$, $\sqrt{\frac{1}{a'_{33}}}$, vediamo che *l'equazione di una quadrica a centro, riferita ai piani principali, si riduce a uno dei seguenti tipi, quando A è nullo:*

[V.] $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0,$$

[VI.] $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

La [2] dicesi *forma canonica* della $f(x_1, x_2, x_3, 1) = 0$, quando A e B non son nulli; se solo $A=0$, la forma canonica è la [9].

Classificazione e descrizione delle quadriche a centro.

§ 42. Esamineremo particolarmente i sei tipi ora enumerati.

L'equazione [1] per $x_3=0$ dà

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

onde nel piano 12 la quadrica ha per sezione principale una ellisse concentrica alla quadrica, con gli assi lunghi $2a_1$, $2a_2$ nelle direzioni degli assi 1 e 2 della quadrica. Similmente, nel piano 13 si ha una ellisse di assi $2a_1$, $2a_3$, diretti secondo le rette 1 e 3; e nel piano 23 una ellisse di assi $2a_2$, $2a_3$, diretti secondo le 2 e 3 (fig. 1).

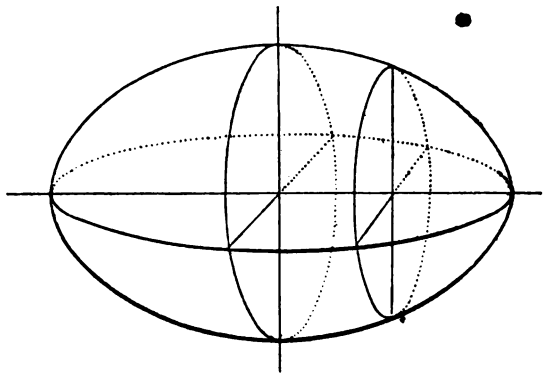


fig. 1

Scritta la [I] così:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1-\frac{x_3^2}{a_3^2} \quad \text{o} \quad \frac{x_1^2}{a_1^2\left(1-\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)}+\frac{x_2^2}{a_2^2\left(1-\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)}=1,$$

si vede che un piano parallelo a 12 alla distanza $\pm x_3$ seca lungo una ellisse, il cui centro è sull'asse 3 della quadrica, i cui assi hanno le lunghezze

$$2a_1\sqrt{1-\frac{x_3^2}{a_3^2}}, \quad 2a_2\sqrt{1-\frac{x_3^2}{a_3^2}},$$

e son diretti parallelamente alle 1 e 2. Facendo crescere x_3 da 0 ad a_3, si ha una serie di ellissi, i cui assi decrescono da $2a_1$ e $2a_2$ a zero, e che son tutte simili e similmente poste, essendo costanti le direzioni e il rapporto dei loro assi. Per $x_3=a_3$ l'ellisse si riduce a due rette ellittiche, e il piano è tangente. Per $x>a_3$ si hanno ellissi immaginarie. Variando x_3 da 0 a $-a_3$ e poi verso $-\infty$, si ritrovano le stesse cose.

Analoghi risultati dànno i piani paralleli a 13 e 23.

La quadrica [I.] è dunque una superficie reale, chiusa, a punti ellittici: un *ellissoide reale*.

Le lunghezze dei suoi assi sono $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$.

Se per un punto (x_1, x_2, x_3) dell'ellissoide ρ è la lunghezza del se-

midiametro che ivi termina, e α_1, α_2, α_3 sono i coseni degli angoli che questo fa con gli assi, si ha

$$x_1 = \rho\alpha_1, \quad x_2 = \rho\alpha_2, \quad x_3 = \rho\alpha_3,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$

e la [I.] diviene

$$[1] \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\alpha_1^2}{a_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{a_2^2} + \frac{\alpha_3^2}{a_3^2}.$$

Posto $a_1 > a_2 > a_3$, avremo

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a_1^2} + \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}\right)\alpha_2^2 + \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2}\right)\alpha_3^2,$$

onde $\frac{1}{\rho^2} \geqq \frac{1}{a_1^2}$, $\rho \leqq a_1$; vale a dire che a_1 è il massimo semidiametro dell'ellissoide.

Parimenti si ha

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a_3^2} - \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2}\right)\alpha_1^2 - \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_2^2}\right)\alpha_2^2,$$

onde $\frac{1}{\rho^2} \leqq \frac{1}{a_3^2}$, $\rho \geqq a_3$; vale a dire che a_3 è il minimo semidiametro.

Applicando poi la [1] a tre semidiametri mutuamente perpendicolari ρ_1, ρ_2, ρ_3 e sommando, si ha

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} = \text{costante},$$

val dire che *nell'ellissoide è costante la somma dei valori inversi dei quadrati di tre semidiametri ortogonali qualunque.*

La [II.] non è soddisfatta da punti reali; poichè ogni punto reale renderebbe il primo membro positivo o nullo, e non -1. Le sezioni principali e loro parallele sono ellissi immaginarie. Diremo che in questo caso si ha un *ellissoide immaginario.*

La [V.] è soddisfatta da un sol punto reale, l'origine; le sezioni principali sono coppie ellittiche di rette, e le loro parallele ellissi immaginarie. Questo è il caso del *cono immaginario* col solo vertice reale (o anche ellissoide ridotto a un punto, ellissoide conico, cono ellissoidico, ecc.).

Se $a_1 = a_2$, l'ellissoide, sia reale, sia immaginario, sia conico, è di rotazione intorno all'asse 3; e così via. Se $a_1 = a_2 = a_3$, è una sfera.

Per una stessa terna di valori di a_1, a_2, a_3, la [I.] e la [V.] non differiscono che nel termine indipendente da x_1, x_2, x_3; e però (§ 23) allora la [V.] rappresenta il cono asintoto dell'ellissoide [I.].

Lo stesso se a_1, a_2, a_3 nelle [I.] e [V.] hanno valori proporzionali.

§ 43. La [III.] porge

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 + \frac{x_3^2}{a_3^2};$$

quindi la sezione principale nel piano 12 è una ellisse concentrica alla quadrica, e di assi $2a_1$, $2a_2$. Variando x_3 da 0 a $\pm\infty$, si hanno ellissi, coi centri sull'asse 3 della quadrica, ed i cui assi

$$2a_1\sqrt{1+\frac{x_3^2}{a_3^2}},\quad 2a_2\sqrt{1+\frac{x_3^2}{a_3^2}}$$

crescono all'infinito mantenendo costanti le direzioni 1, 2 e il rapporto, vale a dire ellissi simili e similmente poste (fig. 2).

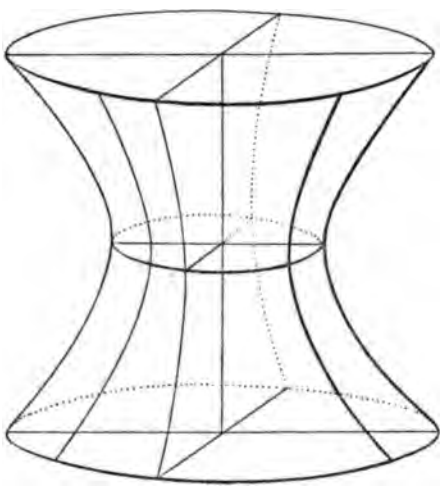


fig. 2.

Si ha pure

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 - \frac{x_2^2}{x_2^2};$$

onde la sezione principale nel piano 13 è una iperbole concentrica alla quadrica, con l'asse trasverso lungo $2a_1$ nella direzione 1, e con l'altro lungo $2a_2$ nella direzione 2. Crescendo x_2 da 0 ad a_2, si hanno iperboli simili e similmente poste, coi centri sulla retta 2, ed i cui assi decrescono sino a zero. Per $x_2 = a_2$ si hanno due rette iperboliche, e il piano è tangente. Per x_2 crescente da a_2 a ∞, scritta la equazione così:

$$\frac{x_3^2}{a_3^2} - \frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1,$$

si scorge che le sezioni sono iperboli simili e similmente poste, i cui assi crescono da 0 a ∞; ma gli assi trasversi ora vanno nella direzione 2 e gli altri nella direzione 1. Le stesse cose per x_2 negativo.

Pel piano 23 e paralleli si hanno iperboli in analoghe condizioni.

La quadrica [III.] è reale, si estende in due sensi all'infinito, ha punti iperbolici; e dicesi *iperboloide a una falda.*

Le lunghezze dei due assi 1, 2 che secano la quadrica sono $2a_1$, $2a_2$; e chiameremo $2a_3$ *lunghezza* dell'asse 3 che non seca.

Come la [I.], così anche la [II.] può scriversi

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\alpha_1^2}{a_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{a_2^2} - \frac{\alpha_3^2}{a_3^2};$$

e allora si può verificare che, se $a_1 > a_2$, a_2 è il minimo semidiametro fra quelli che secano l'iperboloide. Questi poi crescono all'infinito, e divengono infiniti sugli asintoti.

Il teorema su tre semidiametri perpendicolari, dimostrato per l'ellissoide, vale anche per l'iperboloide, purchè si osservi che il quadrato di un semidiametro che non seca va preso negativamente.

La [VI.] fornisce per sezioni principali una coppia ellittica e due coppie iperboliche di rette. Le sezioni parallele alla prima sono ellissi reali, simili e similmente poste e crescenti all'infinito. Le sezioni parallele alla 2ª o alla 3ª sono iperboli nelle stesse condizioni, con gli assi trasversi tutti nella stessa direzione. Questo è il caso del *cono reale.*

Se $a_1 = a_2$, l'iperboloide o il cono è di rotazione intorno all'asse 3. Non così se $a_1 = a_3$ o $a_2 = a_3$.

Per valori di a_1, a_2, a_3 rispettivamente eguali o proporzionali, la [VI.] rappresenta il cono asintoto dell'iperboloide [III.].

Il cono è circondato dalla quadrica; poichè in ogni piano parallelo a 12 la conica della quadrica ha gli assi più lunghi che quella del cono, e però circonda questa.

La [IV.] dà

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 + \frac{x_3^2}{a_3^2},$$

e però la sezione principale nel piano 12 è una iperbole concentrica alla quadrica, con l'asse trasverso $2a_1$ nella direzione 1 e l'altro $2a_2$ nella direzione 2; e variando x_3 da 0 a $\pm\infty$, si hanno iperboli simili e similmente poste, coi centri sulla 3, e con assi crescenti indefinitamente sempre nelle stesse direzioni.

Nel piano 13 e paralleli si hanno iperboli in analoghe condizioni (fig. 3).

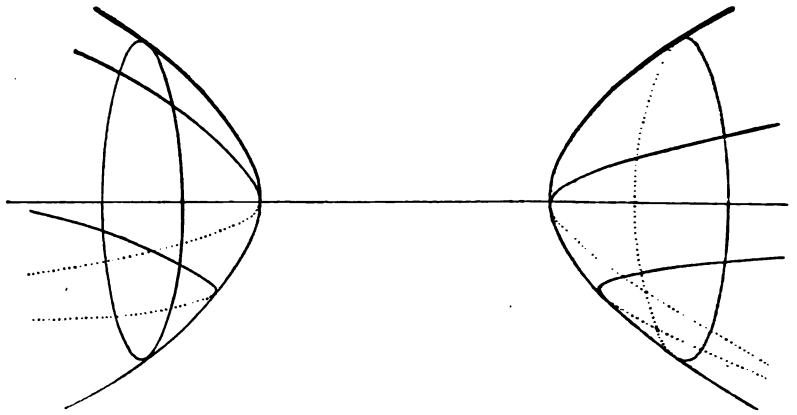


fig. 3

Si ha pure

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = \frac{x_1^2}{a_1^2} - 1;$$

e però la sezione principale nel piano 23 è una ellisse immaginaria; variando x_1 da 0 a a_1, si hanno ellissi immaginarie; per $x_1 = a_1$ si ha una coppia ellittica di rette, e il piano è tangente; per x_1 crescente da a_1 a $+\infty$, si hanno ellissi reali, ad assi crescenti indefinitamente, e tutte simili e similmente poste. Lo stesso per x_1 negativo.

La quadrica [IV.] è dunque reale, a punti ellittici, e composta di due falde estese all'infinito, di cui una è posta da una banda dello strato compreso fra i due piani paralleli $x_1 = a_1$, $x_1 = -a_1$, e l'altra dall'altra banda. Questa quadrica si chiama *iperboloide a due falde*.

L'asse 1 che seca è lungo $2a_1$; e chiameremo $2a_2$, $2a_3$ *lunghezze* degli altri due assi.

Si può verificare che il minimo fra i semidiametri che secano è a_1; essi crescono all'infinito, e divengono infiniti sugli asintoti.

Si può dire che le due falde si riuniscono lungo la conica all'infinito.

Il cono asintoto dell'iperboloide [IV.] è

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0,$$

e le sue due falde circondano rispettivamente quelle dell'iperboloide. È chiaro che questo cono rientra nel tipo [VI.].

L'iperboloide e il cono sono di rotazione solo quando $a_2 = a_3$, e l'asse di rotazione è 1.

§ 44. Poichè le radici della equazione $\Delta(\rho) = 0$ sono reali, le positive sono tante quante le variazioni di segno nella successione dei suoi coefficienti, e le negative quante le permanenze. E siccome Ω è sempre positivo, così si hanno i seguenti casi:

B	C	D	
$-$	$+$	$-$	3 radici positive
$+$	$+$	$+$	3 negative
$+$	$-$	$+$	2 positive, 1 negativa
$+$	$+$	$-$	
$+$	$-$	$-$	
$-$	$-$	$-$	1 positiva, 2 negative.
$-$	$-$	$+$	
$-$	$+$	$+$	

Tengasi poi conto del fattore $\frac{A}{B}$ nei denominatori della [8] § 41; e si osservi che, se si mutano i segni dei coefficienti di $f(x)$, la quadrica non si altera, ma B e D mutano di segno, mentre A e C non si alterano.

Con questo, potremo riassumere *la classificazione delle quadriche a centro nella seguente tabella*:

	B non è zero			
A	B	C	D	
$-$	$\pm$	$+$	$\pm$	*ellissoide reale*
$+$				*ellissoide immaginario*
0				*cono immaginario.*
$+$	$+$ ovvero	$-$	$\pm$	*iperboloide a una falda*
$-$	$-$ ovvero	$-$	$\pm$	*iperboloide a due falde*
0	$\pm$	$+$	$\mp$	*cono reale.*

I segni $\pm$ di una stessa riga si corrispondono. Negli ellissoidi C, D

non son nulli, e BD ha il segno $+$ come C. Negli iperboloidi uno dei due C, D può esser nullo, ma non C se $BD > 0$, nè D nel caso $C > 0$.

§ 45. È importante osservare che, a qualunque terna di diametri coniugati si riferisca una quadrica a centro per ridurre la funzione $f(x)$ alla forma canonica [2] o [9] § 41, *il numero dei coefficienti positivi e quello dei negativi nelle* ∞^3 *forme coniche di* $f(x)$ *è sempre il medesimo* (*).

Infatti, dopo trasformata $f(x)$ in $f(X_1, X_2, X_3, 0) + \frac{A}{B}$ portando l'origine al centro (§ 41), supponiamo che mediante due diverse sostituzioni lineari omogenee essa divenga rispettivamente

$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + \frac{A}{B}, \quad a''_{11}x'^2_1 + a''_{22}x'^2_2 + a''_{33}x'^2_3 + \frac{A}{B};$$

sarà identicamente

$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 - a''_{11}x'^2_1 - a''_{22}x'^2_2 - a''_{33}x'^2_3 = 0;$$

ed osservando che così x_1, x_2, x_3 come x'_1, x'_2, x'_3 sono funzioni lineari omogenee di X_1, X_2, X_3, questa identità prenderà la forma

$$a'_{11}(\alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3)^2 + a'_{22}(\alpha_{21}X_1 + \ldots)^2 + a'_{33}(\alpha_{31}X_1 + \ldots)^2$$
$$- a''_{11}(\beta_{11}X_1 + \ldots)^2 - a''_{22}(\beta_{21}X_1 + \ldots)^2 - a''_{33}(\beta_{31}X_1 + \ldots)^2 = 0,$$

ed è chiaro che bisogna dimostrare che tre dei sei coefficienti $a'_{11}, \ldots, -a''_{33}$ sono positivi e tre negativi. Or se così non fosse, e vi fossero p. es. quattro coefficienti positivi e due negativi; allora si potrebbero dare a X_1, X_2, X_3 valori non tutti nulli, ma pur tali da annullare i due termini negativi e non tutti i positivi; e però risulterebbe una somma di quantità positive identicamente nulla, il che è assurdo.

Quindi segue che, *se l'equazione della quadrica riferita ai propri assi si riduce a uno dei tipi* [I.],..., [VI.], *a quello stesso tipo si ridurrà quando si riferisca a tre diametri coniugati qualunque.*

Insomma, si può rimuovere la restrizione che le coordinate sieno ortogonali, e ritenere che la [I.] è la più generale forma canonica dell'equazione dell'ellissoide reale, la [II.] dell'ellissoide immaginario, la [III.] dell'iperboloide a una falda, la [IV.] dell'iperboloide a due falde, la [V.] del cono immaginario (col vertice reale), la [VI.] del cono reale.

(*) Questa è un'applicazione della cosiddetta *legge d'inerzia* delle forme algebriche.

Inoltre, si potrà ripetere, per le sezioni prodotte da tre piani diametrali coniugati e loro paralleli, quasi tutto quel che nei §§ 42 e 43 esponemmo per le sezioni principali e loro parallele (Veggasi figure 4, 5, 6).

Ritroviamo così delle proprietà già altrimenti dimostrate, p. es.

due piani paralleli producono nella quadrica sezioni omotetiche; uno stesso piano produce nella quadrica e nel cono asintoto sezioni omotetiche e concentriche;

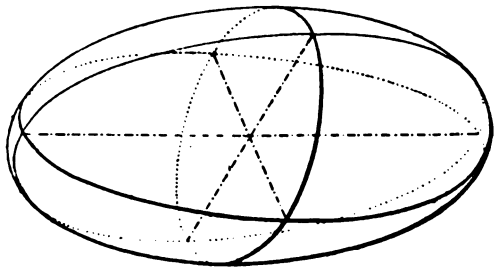


fig. 4

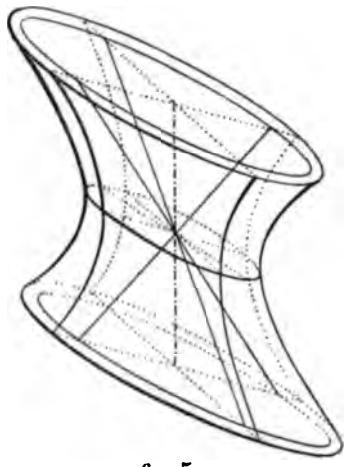


fig. 5

se un punto di una quadrica a centro è ellittico o iperbolico o parabolico, tali son tutti (salvo il vertice nel cono);

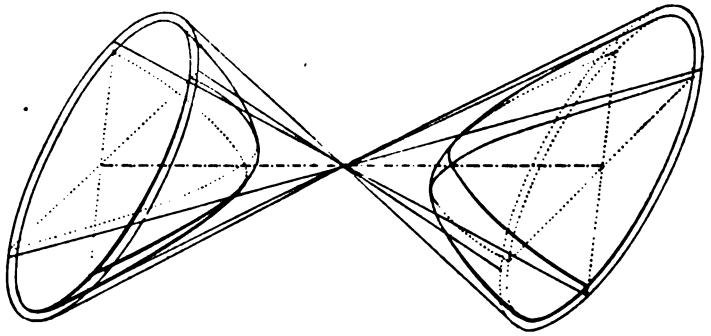


fig. 6

sull'iperboloide a una falda e sul cono reale esistono rette, ma non già sull'ellissoide nè sull'iperboloide a due falde.

Per calcolare gl'invarianti assoluti della [I.], conviene moltiplicarla per $-\frac{A}{B}$, poichè allora i coefficienti divengono quelli della [2] § 41,

e si possono applicare le [3], [4] e [5] § 41; si hanno così le relazioni

$$-\frac{A}{B}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\lambda_1}{a_1^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\lambda_2}{a_2^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\lambda_3}{a_3^2}\right)=\frac{D\Lambda}{\Omega},$$

$$\frac{A^2}{B^2}\left(\frac{1}{a_1^2a_2^2}+\frac{1}{a_2^2a_3^2}+\frac{1}{a_3^2a_1^2}\right)=\frac{C\Lambda}{\Omega},$$

$$-\frac{A^3}{B^3}\cdot\frac{1}{a_1^2a_2^2a_3^2}=\frac{B\Lambda}{\Omega};$$

dalla 3ª delle quali si deduce

[1] $$a_1^2a_2^2a_3^2\Lambda=-\frac{A^3\Omega}{B^4}=\text{costante},$$

e da questa moltiplicata per la 2ª

[2] $$a_1^2+a_2^2+a_3^2=-\frac{AC}{B^2}=\text{costante},$$

e dalla stessa moltiplicata per la 1ª

[3] $$(a_2a_3\operatorname{sen}\lambda_1)^2+(a_1a_3\operatorname{sen}\lambda_2)^2+(a_1a_2\operatorname{sen}\lambda_3)^2=\frac{A^2D}{B^2}=\text{costante}.$$

La [2] dice che *è costante la somma dei quadrati di tre semidiametri coniugati di un ellissoide.*

La [3] dice che *è costante la somma dei quadrati delle aree dei parallelogrammi costruiti su tre semidiametri coniugati di un ellissoide presi a due a due.*

La [1] mostra che $a_1a_2a_3\sqrt{\Lambda}$ è costante, ossia *è costante il volume del parallelepipedo costruito su tre semidiametri coniugati di un ellissoide.*

Per l'iperboloide [II.] a una falda basta mutar di segno a_3^2 nelle [1], [2] e [3]; ed è facile enunciare i risultati, grazie alla definizione già data della lunghezza di un diametro che non seca l'iperboloide.

Per l'iperboloide [III.] a due falde si muteranno di segno a_2^2 e a_3^2.

* § **46**. Nel § 5 noi accennammo alcune particolari decomposizioni della forma $f(x)$ in quadrati (affetti da coefficienti positivi o negativi), le quali sono perciò forme canoniche di $f(x)$. E precisamente, indicando con hik una permutazione di 1 2 3, e con X_1, X_2, X_3 delle forme lineari (di cui la 1ª contiene x_h, la 2ª x_i, la 3ª x_k, sicchè esse eguagliate a zero, determinano un punto, cioè il centro), possiamo scrivere

$$f(x)=\frac{1}{a_{hh}}X_1^2+\frac{1}{a_{hh}B_{ii}}X_2^2+\frac{B}{B_{ii}}X_3^2+\frac{A}{B}x_4^2;$$

e quindi, moltiplicando per $-\frac{B}{A}$ e ponendo $x_4=1$, la $f(x)=0$ diviene

$$-\frac{B}{a_{hh}A}X_1^2-\frac{B}{a_{hh}B_{ii}A}X_2^2-\frac{B^2}{B_{ii}A}X_3^2=1.$$

Confrontando i segni dei coefficienti di questa equazione con quelli delle [I.],..., [VI.], si scorge che *per la classificazione delle quadriche a centro può servire la seguente tabella:*

Se B e a_{hh} non sono zero,

A	B	B_{ii}	a_{hh}	
$-$	$\pm$	$+$	$\pm$	*ellissoide reale*
$+$				*ellissoide immaginario*
0				*ellissoide conico*
$+$	$+$ ovvero	$-$	$\pm$	*iperboloide a una falda*
$-$	$-$ ovvero	$-$	$\pm$	*iperboloide a due falde*
0	$\pm$	$+$	$\mp$	*cono reale.*

Negli ellissoidi a_{11}, a_{22}, a_{33} esistono ed hanno lo stesso segno di B; e B_{11}, B_{22}, B_{33} esistono e son positivi (*). Negli iperboloidi, se a_{hh} non è nullo, sarà $a_{hh}B<0$, ed almeno B_{hh} non sarà nullo.

Questa tabella deve certo concordare con quella esibita al § 44; e ciò si potrebbe provare mediante trasformazioni algebriche. Ma noi non ci fermeremo su questo punto, per non digredire troppo dal nostro cammino. Solo noteremo che le due tabelle non differiscono se non pel cambio di C e D in B_{ii} e a_{hh}.

Questa tabella serve anche quando a_{11}, a_{22}, a_{33} son tutti nulli. Infatti allora, portando l'origine al centro, la $f(x)=0$ diviene

$$2a_{12}X_1X_2+2a_{13}X_1X_3+2a_{23}X_2X_3+\frac{A}{B}=0,$$

e nessuno dei tre a_{12}, a_{13}, a_{23} è nullo, essendosi supposto $B\gtrless 0$, ossia $2a_{12}a_{13}a_{23}\gtrless 0$. Dunque la quadrica è un'iperboloide, a una falda se

(*) Poichè il piano $x_3=0$ seca nella ellisse $f(x_1, x_2, 0, 1)=0$, e però $B_{33}>0$, e a_{11}, a_{22} dello stesso segno. E così via.

$A > 0$, a due se $A < 0$; ed è riferita a tre asintoti. La quadrica è poi un cono reale se $A = 0$.

E se si osserva che ora $B_{ii} = -a^2_{hk} < 0$, si vede che il caso presente rientra nel 1° e 2° dei tre relativi agli iperboloidi nella tabella che precede.

Equazioni ridotte e descrizione dei paraboloidi, cilindri e coppie di piani.

§ 47. Passiamo ad esaminare il caso $B = 0$. Non potendosi allora prender per origine il centro, che è all'infinito, non è possibile far sparire i termini di 1° grado dalla $f(x_1, x_2, x_3, 1)$. Ma è sempre possibile far sparire i termini coi prodotti di due coordinate; anzi ciò si può fare in ∞^3 modi, mutando le direzioni degli assi coordinati senza spostar l'origine; ed all'uopo servono le stesse formole esposte al § 41 per le quadriche a centro, visto che in quelle formole non compaiono che i coefficienti dei termini a 2° grado di $f(x_1, x_2, x_3, 1)$. Se inoltre osserviamo che attualmente l'equazione $\Delta(\rho) = 0$, mancando del termine noto B, ha una radice nulla, e le altre due radici sono quelle della equazione

$$[1] \qquad \Omega\rho^2 + D\rho + C = 0;$$

concludiamo che l'equazione della quadrica può esser ridotta alla forma

$$[2] \qquad a'_{11}X_1^2 + a'_{22}X_2^2 + 2a'_{14}X_1 + 2a'_{24}X_2 + 2a'_{34}X_3 + a_{44} = 0,$$

ove a'_{11}, a'_{22} sono le radici della [1] col segno cambiato.

Ora sposteremo soltanto l'origine, portandola nel punto da determinare $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 1)$; e l'equazione [2] diverrà (cfr. § 6)

$$[3] \quad a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + 2(a'_{11}\xi_1 + a'_{14})x_1 + 2(a'_{22}\xi_2 + a'_{24})x_2 + 2a'_{34}x_3$$
$$+ (a'_{11}\xi_1^2 + a'_{22}\xi_2^2 + 2a'_{14}\xi_1 + 2a'_{24}\xi_2 + 2a'_{34}\xi_3 + a_{44}) = 0.$$

Ciò posto: se a'_{11}, a'_{22}, a'_{34} non son nulli, si possono far sparire i termini a 1° grado e l'ultimo termine, assumendo

$$\xi_1 = -\frac{a'_{14}}{a'_{11}}, \quad \xi_2 = -\frac{a'_{24}}{a'_{22}}, \quad \xi_3 = -\frac{a'_{11}\xi_1^2 + a'_{22}\xi_2^2 + 2a'_{14}\xi_1 + 2a'_{24}\xi_2 + a_{44}}{2a'_{34}}$$
$$= -\frac{(a'_{11}\xi_1 + a'_{14})\xi_1 + (a'_{22}\xi_2 + a'_{24})\xi_2 + a'_{14}\xi_1 + a'_{24}\xi_2 + a_{44}}{2a'_{34}}$$
$$= -\frac{a'^2_{14}a'_{22} + a'^2_{24}a'_{22} - a'_{11}a'_{22}a_{44}}{2a'_{11}a'_{22}a'_{34}};$$

e l'equazione si riduce a

$$[4] \qquad a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + 2a'_{34}x_3 = 0.$$

È manifesto (§ 40) che l'origine è un punto della quadrica, e la 3 è il diametro per quel punto. Di più vedremo presto che il piano 12 è tangente in quel punto, e le 1 e 2 sono due rette coniugate.

In particolare, si può supporre che l'origine sia il vertice della quadrica, 3 il diametro principale o asse, 12 il piano tangente nel vertice, 13 e 23 i piani principali. Ed è ciò che noi per ora riterremo.

Chiamiamo a_1, a_2 i moduli di $-\frac{a'_{34}}{a'_{11}}$, $-\frac{a'_{34}}{a'_{22}}$.

Allora, se a'_{11}, a'_{22} son dello stesso segno, la [4] può scriversi

$$[\text{VII.}] \qquad \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} = 2x_3\,;$$

poichè, se venisse $-2x_3$ basterebbe invertire la direzione positiva sulla retta 3.

La [VII.] prova: che x_3 non può esser negativo, sicchè la quadrica resta tutta da una banda del piano 12; che il piano 12 ha comuni con la quadrica due rette ellittiche per l'origine, simmetriche rispetto alle rette 1 e 2, e però è tangente nell'origine; e che, crescendo x_3 da 0 a ∞, i piani paralleli a 12 secano la quadrica in ellissi reali, simili e similmente poste, con gli assi nelle direzioni 1 e 2, e crescenti indefinitamente (fig. 7).

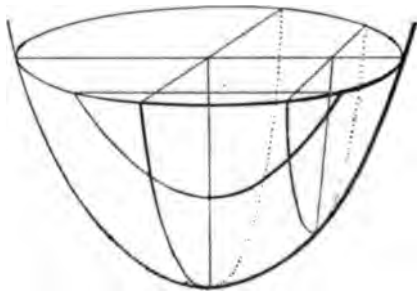


fig. 7

Per $x_2 = 0$ la [VII.] dà

$$x_1^2 = 2a_1x_3\,,$$

onde il piano 13 seca la quadrica in una parabola, che ha per vertice l'origine, per asse la 3, per tangente al vertice la 1, per parametro $2a_1$. Ed essendo per la [VII.]

$$x_1^2 = 2a_1\left(x_3 - \frac{x_2^2}{a_2}\right),$$

si vede che ciascun piano parallelo a 13 seca la quadrica in una parabola eguale a quella nel piano 13, con l'asse nel piano 23 e sempre nella direzione 3.

Similmente: il piano 23 seca in una parabola, avente per vertice l'origine, per asse la 3, per tangente al vertice la 2; e i piani paralleli a 23 secano in parabole eguali a questa, con gli assi nel piano 13 e sempre nella direzione 3.

Insomma, la quadrica può venir generata da una parabola di parametro costante, il cui piano si muova serbando la stessa giacitura, il cui asse serbi la stessa direzione, e il cui vertice percorra un'altra parabola fissa, avente l'asse nella stessa direzione che la mobile, e situata in un piano perpendicolare al piano mobile. Ed è facile scorgere che, comunque si scelgano i parametri di due parabole in queste condizioni, si genera sempre una quadrica del tipo [VII.].

La quadrica in discorso è a punti ellittici, e si estende all'infinito in un sol senso: un *paraboloide ellittico*.

Esso è di rotazione, intorno all'asse, se $a_1 = a_2$.

Se a'_{11}, a'_{22} son di segno contrario, la [4] si riduce al tipo

$$\text{[VIII.]} \qquad \frac{x_1^2}{a_1} - \frac{x_2^2}{a_2} = 2x_3 .$$

Questa equazione mostra: che il piano 12 ha comuni con la quadrica due rette iperboliche, simmetriche rispetto alle 1 e 2, e situate nei due piani

$$[5] \qquad \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} - \frac{x_2}{\sqrt{a_2}} = 0, \quad \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{a_2}} = 0 ;$$

che, crescendo x_3 da 0 a $+\infty$, i piani paralleli a 12 secano in iperboli simili e similmente poste, con gli asintoti paralleli a quelle due rette iperboliche, con gli assi diretti secondo le 1 e 2 e crescenti indefinitamente; e che, decrescendo x_3 da 0 a $-\infty$, si hanno anche iperboli simili e similmente poste, ad assi crescenti indefinitamente; ma gli assi trasversi sono nella direzione 1 per quelle iperboli e nella direzione 2 per queste.

Il piano 13 e suoi paralleli producono parabole eguali, di parametro $2a_1$, con gli assi nella direzione positiva 1 e nel piano 23.

Il piano 23 e suoi paralleli producono anche parabole eguali, di parametro $2a_2$, con gli assi nel piano 13 e nella direzione positiva opposta a 1 (fig. 8).

Insomma, la quadrica può venir generata da una parabola di parametro costante, il cui piano si muova serbando la stessa giacitura, il cui asse serbi la stessa direzione, e il cui vertice percorra un'altra

parabola fissa, avente l'asse in direzione opposta a quello della parabola mobile e situata in un piano perpendicolare al piano mobile. E comunque si scelgano i parametri delle due parabole, si genera sempre una quadrica del tipo [VIII.].

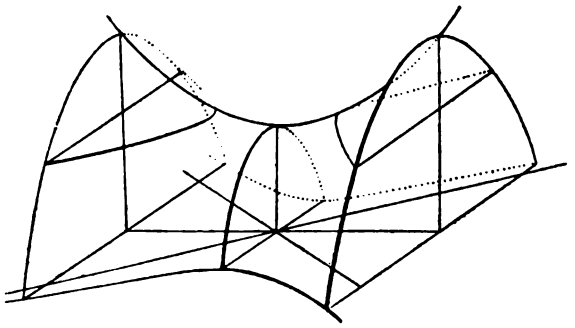


fig. 8

La quadrica è a punti iperbolici, e si estende all'infinito da ogni parte: un *paraboloide iperbolico*.

I due piani [5], i quali passano per l'asse del paraboloide, e contengono rispettivamente le due rette del paraboloide passanti pel vertice, contengono anche le due rette all'infinito del paraboloide; giacchè, resa omogenea la [VIII.] e poi posto $x_4 = 0$, si ritrovano le [5].

Questi sono i cosidetti *piani direttori* del paraboloide.

Un paraboloide iperbolico non può essere mai di rotazione.

§ **48**. Sinora abbiamo supposto $a'_{11}\, a'_{22}, a'_{34}$ diversi da zero.

Se fosse $a'_{34} = 0$: prendendo $\xi_1 = -\frac{a'_{14}}{a'_{11}}$, $\xi_2 = -\frac{a'_{24}}{a'_{22}}$ e lasciando indeterminato ξ_3, la [3] si ridurrebbe al tipo

[IX.] $$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{44} = 0,$$

e rappresenterebbe *un cilindro ellittico o iperbolico*, avente per asse la retta 3, e per traccia nel piano 12 la conica ivi rappresentata dalla [IX.].

Questa conica, se risulta $a'_{44} = 0$, degenera in due rette ellittiche o iperboliche; e il cilindro riducesi a *due piani, reali o immaginarii, secantisi lungo una retta a distanza finita*, e determinati dalla equazione

[X.] $$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 = 0.$$

Se invece fosse $a'_{22}=0$: allora, lasciando indeterminati ξ_2, ξ_3 ed assumendo $\xi_1=-\frac{a'_{14}}{a'_{11}}$, la [3] diverrebbe

$$a'_{11}x_1^2+2a'_{24}x_2+2a'_{34}x_3+a'_{44}=0\,;$$

or conservando il piano 23, e movendo gli altri due in guisa che uno divenga il piano $2a'_{24}x_2+2a'_{34}x_3+a'_{44}=0$ e l'altro sia perpendicolare ai primi due, questa equazione si trasforma in

$$\text{[XI.]}\qquad a'_{12}x_1^2+2a''_{34}X_3=0,$$

che rappresenta *un cilindro parabolico*, la cui traccia sul nuovo piano 13 è la parabola rappresentata dalla [XI.], e le cui generatrici son parallele alla nuova retta 2.

Analogamente se $a'_{11}=0$.

Se $a'_{34}=0$ e $a'_{22}=0$: la [2] diviene

$$\text{[XII.]}\qquad a'_{11}X_1^2+2a'_{14}X_1+2a'_{24}X_2+a_{44}=0,$$

e rappresenta anche *un cilindro parabolico*, con le generatrici nella direzione 3. Esso riducesi a *due piani paralleli* se $a'_{24}=0$.

Se $a'_{11}=0$ e $a'_{22}=0$: la [4] si abbassa a 1° grado, e però rappresenta *un piano a distanza finita e il piano all'infinito.*

Lo stesso, se è anche $a'_{34}=0$, ma a'_{14} e a'_{24} non sono amendue nulli; nel qual caso si ha *il piano all'infinito contato due volte.*

§ **43**. Rimuovendo l'ipotesi delle coordinate ortogonali, in qualunque modo l'equazione di un paraboloide si riduca alla forma [4], si avrà sempre una equazione del tipo [VII.] se il paraboloide è ellittico, e del tipo [VIII.] se iperbolico; poichè nel primo caso i termini a 2° grado devono aver lo stesso segno e nel secondo segni contrari (fig. 9 e 10).

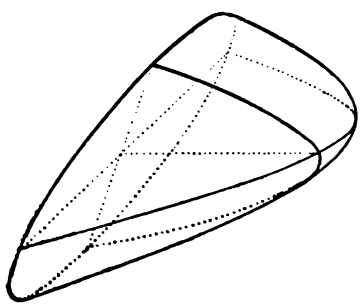


fig. 9

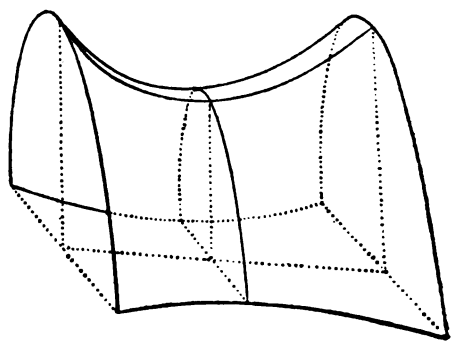


fig. 10

Calcolando poi gli invarianti assoluti della quadrica nella ipotesi $B=0$, si trovano le relazioni (§ 41)

$$[1] \qquad \frac{D}{\Omega}=\frac{a'_{11}\operatorname{sen}^2\lambda_1+a'_{22}\operatorname{sen}^2\lambda_2}{\Lambda},\quad \frac{C}{\Omega}=\frac{a'_{11}a'_{22}}{\Lambda},\quad \frac{A}{\Omega}=\frac{-a'_{11}a'_{22}a'^2_{34}}{\Lambda},$$

e dividendo la 3ª per la 2ª,

$$[2] \qquad a'_{34}=\pm\sqrt{-\frac{A}{C}}\,;$$

formola, che serve a calcolare a'_{34}, e che ci mostra che nei paraboloidi A ha il segno opposto a C.

Tenendo presente tutto quanto precede, possiamo classificare i paraboloidi così:

$B=0$

A	C	D	
$-$	$+$	$\pm$	*paraboloide ellittico*
$+$	$-$	$\pm$	*paraboloide iperbolico.*

Nel 1° caso nè C nè D son nulli, nel 2° può esser $D=0$.

La classificazione dei cilindri è la seguente:

$A=0,\quad B=0$

C	D	
$+$	$\pm$	*cilindro ellittico*
$-$	$\pm$	*cilindro iperbolico*
0	$\pm$	*cilindro parabolico.*

Nel 1° caso il cilindro è reale o immaginario secondochè uno dei prodotti $a_{hh}A_{ii}\lesseqgtr 0$ (*). Nel 2° caso soltanto può esser $D=0$. Nel 3° caso $f(x_1, x_2, x_3, 0)$ è un quadrato, e i suddeterminanti di B son tutti nulli.

I casi di due piani sono i seguenti:

(*) Poichè una almeno delle tracce del cilindro sui piani coordinati dev'essere un'ellisse, reale o immaginaria. Del resto qui per ogni piano u, non parallelo alle generatrici, dev'essere $G>0$ e F di segno opposto o identico a $G_{11}+\ldots$ (§ 35-2°).

$$A=0,\quad B=0,\quad A_{hh}=0\quad (h=1,2,3)\ (^*)$$

C	D	
$+$	$\pm$	*due piani immaginarii, con una retta comune reale a distanza finita.*
$-$	$\pm$	*due piani reali, id. id.*
0	$\pm$	*due piani paralleli.*

Solo nel 2° caso può esser $D=0$: Nel 3° caso son nulli tutti i suddeterminanti di B (in tutto 5 condizioni); e i due piani sono reali e distinti o immaginarii, secondochè uno almeno dei suddeterminanti $A_{23,23}$, $A_{31,31}$, $A_{12,12}$ è rispettivamente negativo o positivo; e sono coincidenti se questi son tutti nulli.

Se si calcolano gl'invarianti assoluti della funzione [VII.], dopo averla moltiplicata per $-a'_{34}$ ossia $\mp\sqrt{-\frac{A}{C}}$; allora, d'accordo con le [1], si trova

$$\mp\sqrt{-\frac{A}{C}}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\lambda_1}{a_1}+\frac{\operatorname{sen}^2\lambda_2}{a_2}\right)=\frac{D\Lambda}{\Omega},\qquad -\frac{A}{C}\,\frac{1}{a_1a_2}=\frac{C\Lambda}{\Omega};$$

delle quali la 2ª può scriversi

$$[3]\qquad a_1a_2\Lambda=-\frac{A\Omega}{C^2},$$

e allora la 1ª diviene

$$[4]\qquad a_2\operatorname{sen}^2\lambda_1+a_1\operatorname{sen}^2\lambda_2=\pm\frac{D}{C}\sqrt{-\frac{A}{C}}.$$

Poichè $2a_1$, $2a_2$ sono i parametri delle sezioni paraboliche nei piani 12, 13 al punto origine, e quindi $2a_1\operatorname{sen}^2\lambda_2$, $2a_2\operatorname{sen}^2\lambda_1$ sono i parametri principali delle medesime (**), la [4] dice che: *in un paraboloide ellittico è costante la somma dei parametri principali di due qualunque sezioni coniugate e diametrali* (e quindi paraboliche).

Nel paraboloide iperbolico è costante la differenza.

Sul diametro 3 prendiamo un segmento arbitrario k, e pel suo termine conduciamo il piano coniugato al diametro: il piano seca il paraboloide nella conica

$$x_3=k,\qquad \frac{x_1^2}{2a_1k}+\frac{x_2^2}{2a_2k}=1;$$

(*) O anche $F=0$ per ogni piano u. Insomma tutti i suddeterminanti di 3° ordine in A son nulli (cfr. § 9-3°).

(**) Cfr. Con. § 45.

$2a_1k$, $2a_2k$ sono i quadrati di quei due semidiametri coniugati della conica che stanno nei piani 13, 23; e il volume del parallelepipedo costrutto su questi due semidiametri e sul segmento k è espresso da

$$k.\sqrt{2a_1k}\,.\,\sqrt{2a_2k}\,.\,\sqrt{\Lambda} = 2k^2\sqrt{a_1a_2\Lambda} = \frac{2k^2}{C}\sqrt{-A\Omega} \quad \text{per la [3].}$$

Quindi: *il volume del parallelepipedo, che ha per spigoli due semidiametri coniugati qualunque di una sezione del paraboloide e il segmento che il piano secante stacca dal diametro suo coniugato, varia in ragion diretta del quadrato di quel segmento, ma non dipende dalla posizione del diametro.*

* § **50.** Quelle decomposizioni di $f(x)$ in quadrati, che accennammo nel § 5 e poi adoprammo nel § 46, subiscono delle modificazioni nel caso di un paraboloide, poichè allora A_{44} ossia B è nullo.

P. es., indicando con hik una permutazione degli indici 1, 2, 3, e supponendo che a_{hh} e B_{ii} non siano nulli, la $f(x_1, x_2, x_3, 1)$ può scriversi così:

$$\frac{1}{a_{hh}}\,f_h^2(x_1,..,1) + \frac{1}{a_{hh}B_{ii}}\,(B_{ii}x_k - B_{ik}x_i + A_{i4,ki})^2 + \frac{1}{B_{ii}}\,(A_{ii} - 2A_{i4}x_i),$$

ovvero

$$\frac{1}{a_{hh}}\,X_1^2 + \frac{1}{a_{hh}B_{ii}}\,X_2^2 + \frac{1}{B_{ii}}\,(A_{ii} - 2A_{i4}x_i),$$

dove X_1 contiene certo x_h, e X_2 contiene x_k. Laonde:

1° avremo un paraboloide ellittico, se $B_{ii} > 0$ e $A_{i4} \gtrless 0$, ossia (visto che $A_{ii}A_{44} - A^2_{i4} = A\,A_{i4,i4} = AB_{ii} < 0$) se $B_{ii} > 0$ e $A < 0$;

2° avremo un paraboloide iperbolico, se $B_{ii} < 0$ e $A > 0$;

3° avremo un cilindro se $A_{i4} = 0$ oppure $A = 0$: ellittico reale se $B_{ii} > 0$ e $a_{hh}A_{ii} < 0$, ellittico immaginario se $B_{ii} > 0$ e $a_{hh}A_{ii} > 0$, iperbolico se $B_{ii} < 0$;

4° avremo una coppia di piani se $A = 0$ e $A_{ii} = 0$; piani reali se $B_{ii} < 0$, immaginarii se $B_{ii} > 0$.

Quando uno almeno fra a_{11}, a_{22}, a_{33} non è nullo, e sia a_{hh}, ma è contemporaneamente $B_{ii} = 0$ e $B_{kk} = 0$: allora si ha subito

$$a_{hh}\,f(x_1,..,1) = f_h^2(x_1,..,1) + 2(A_{ik,k4}x_i - A_{ik,i4}x_k) + A_{ik,ik}\,;$$

e se ne deduce che:

5° avremo un cilindro parabolico, se almeno uno dei due $A_{ik,ii}$,

$A_{ik,k4}$ non è nullo, ovvero (essendo $A_{ii}\,a_{hh} = A_{ik,ik}\,B_{ii} - A^2_{ik,i4} = -A^2_{ik,i4}$ e $A_{kk}a_{hh} = -A^2_{ik,k4}$) se almeno uno dei due A_{ii}, A_{kk} non è nullo;

6° e avremo due piani paralleli, se $A_{ii} = 0$ e $A_{kk} = 0$.

Se poi $a_{11}, \ldots, B_{11}, \ldots$ son tutti nulli, sappiamo che la quadrica si riduce a un piano, più il piano all'infinito contato due volte.

Alcune proprietà delle quadriche ricavate dalle equazioni ridotte.

§ 51. Presenteremo ora alcuni esempi dei vantaggi che, nello studio delle proprietà delle quadriche, si ricavano dall'adoperare la forma canonica dell'equazione di 2° grado. Così ci si porgerà anche occasione di applicare le svariate formole dianzi esposte relativamente all'equazione generale di 2° grado.

Denoteremo di nuovo con x, y, z le coordinate Cartesiane ordinarie di un punto, e denoteremo con u, v, w le coordinate Plückeriane ordinarie di un piano.

Ellissoide. — Sia (§ 45)

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'equazione di un ellissoide riferito a tre diametri coniugati, dei quali sono $2a$, $2b$, $2c$ le lunghezze.

Sarà (§§ 3 e 4)

$$f(x, y, z, 1) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

$$f_1 = \frac{x}{a^2},\ f_2 = \frac{y}{b^2},\ f_3 = \frac{z}{c^2},\ f_4 = -1,$$

$$B = \frac{1}{a^2b^2c^2},\quad A = -\frac{1}{a^2b^2c^2}, \ldots$$

L'equazione del piano polare del punto $P'(x', y', z')$, oppure del piano tangente in P' se P' è un punto dell'ellissoide, è (§ 8)

$$[2] \qquad \frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1;$$

e l'equazione del piano diametrale coniugato del diametro diretto al punto P′ (§ 17) è

[3] $$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 0.$$

Se (u, v, w) è il piano polare di P′, si ha dalla [2], o dalle [2] § 8,

[4] $$u = -\frac{x'}{a^2}, \quad v = -\frac{y'}{b^2}, \quad w = -\frac{z'}{c^2};$$

e però

[5] $$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}.$$

Di qui, supposto P′ sull'ellissoide, otteniamo l'equazione dell'ellissoide considerato come inviluppo:

[6] $$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1.$$

Del resto è facile verificare che (§ 10)

$$F(u, v, w, 1) = -\frac{1}{a^2b^2c^2}(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1).$$

Se p è la distanza dal centro al piano, e α, β, γ gli angoli di essa con gli assi coordinati, si ha evidentemente

[7] $$u = -\frac{\cos\alpha}{p}, \quad v = -\frac{\cos\beta}{p}, \quad w = -\frac{\cos\gamma}{p};$$

e se il piano è tangente all'ellissoide, si deduce dalle [6] e [7]

[8] $$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

Quind'innanzi supporremo l'ellissoide riferito ai proprii assi. Allora, se $p, p', p'', \ldots$ sono relative a tre piani tangenti mutuamente ortogonali, applicando ad essi la [8] e sommando, si trova

[9] $$p^2 + p'^2 + p''^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

(essendo $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1, \ldots$). Ora $p^2 + p'^2 + p''^2$ equivale al quadrato del raggio vettore del punto comune ai tre piani. Dunque: *il luogo dei punti, da cui si possono condurre all'ellissoide terne di piani ortogonali* (ovvero *dei vertici dei triedri trirettangoli circoscritti all'ellissoide*), *è una sfera concentrica all'ellissoide.* Il raggio ne è $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Le equazioni della *normale* in P′, cioè della perpendicolare al piano tangente nel punto di contatto P′, sono

$$[10] \qquad \frac{a^2}{x'}(x-x') = \frac{b^2}{y'}(y-y') = \frac{c^2}{z'}(z-z').$$

Dalle [10], [4], [7] segue che: *il segmento di normale fra l'ellissoide e un piano principale, moltiplicato per la distanza fra il centro e il piano tangente, dà un prodotto costante, cioè il quadrato del semiasse perpendicolare al piano principale.*

Per ogni punto P(x, y, z) dell'ellissoide è lecito porre

$$[11] \qquad x = a\cos\lambda, \quad y = b\cos\mu, \quad z = c\cos\nu,$$

indicando con λ, μ, ν gli angoli degli assi con una certa retta corrispondente al punto (*); e, se O è il centro, risulta

$$[12] \qquad OP^2 = a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu.$$

Se P, P′ sono gli estremi di due diametri coniugati, si ha dalla [3]

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0,$$

ed applicando la sostituzione [11]

$$[13] \qquad \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0,$$

vale a dire che le due rette corrispondenti a P e P′ sono perpendicolari.

Se dunque P″ è l'estremo del diametro coniugato ai due precedenti, applicando la [12], avremo

$$[14] \qquad OP^2 + OP'^2 + OP''^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

e ritroviamo che: *è costante la somma dei quadrati di tre semidiametri coniugati* (§ 45).

(*) Consideriamo le tre sfere concentriche all'ellissoide e di raggi a, b, c. Se dal centro si tira una retta nella direzione (λ, μ, ν), e pei punti ove seca le tre sfere si conducono rispettivamente i piani paralleli ai tre piani principali, il punto comune a quei tre piani è appunto P.

Abbiamo pure dalle [11]

$$[15] \qquad \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{1}{6}abc \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\lambda' & \cos\mu' & \cos\nu' \\ \cos\lambda'' & \cos\mu'' & \cos\nu'' \end{vmatrix} = \frac{1}{6}abc \ (^*);$$

è così ritroviamo che: *è costante il volume del parallelepipedo costrutto su tre semidiametri coniugati* (§ 45).

Ora dimostreremo che: *è costante la somma dei quadrati delle proiezioni di tre semidiametri coniugati sopra una retta o un piano qualunque.*

Infatti: 1° detti α, β, γ gli angoli di una retta con gli assi, le proiezioni dei tre semidiametri sopra essa sono
$a\cos\lambda\cos\alpha + b\cos\mu\cos\beta + c\cos\nu\cos\gamma$, $a\cos\lambda'\cos\alpha + ..$, $a\cos\lambda''\cos\alpha + ..$, e la somma dei loro quadrati è

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

2° Detti poi α', β', γ' gli angoli dei tre semidiametri con una perpendicolare a un dato piano, le proiezioni dei tre semidiametri sul piano sono $OP\operatorname{sen}\alpha'$, $OP'\operatorname{sen}\beta'$, $OP''\operatorname{sen}\gamma'$, e la somma dei loro quadrati è

$$(OP^2 + OP'^2 + OP''^2) - (OP^2\cos^2\alpha' + OP'^2\cos^2\beta' + OP''^2\cos^2\gamma'),$$

che è costante, per la [14] e pel teorema ultimo.

Le lunghezze dei semiassi di una sezione centrale ci son fornite dalla equazione (§ 35-2°)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{R^2} & 0 & 0 & u \\ 0 & \frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2} & 0 & v \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} - \frac{1}{R^2} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) Il determinante, riferendosi a tre rette mutuamente perpendicolari, vale 1: come si vede anche dall'ultima relazione della nota a pag. 4, applicata a due triedri trirettangoli.

che sviluppata e moltiplicata per $a^2b^2c^2 : (R^2-a^2)(R^2-b^2)(R^2-c^2)$, diviene

$$[16] \qquad \frac{a^2u^2}{R^2-a^2}+\frac{b^2v^2}{R^2-b^2}+\frac{c^2w^2}{R^2-c^2}=0.$$

Volendo che la sezione centrale sia circolare, si applicheranno le condizioni [4] § 37; e si avrà

$$\frac{uvw}{a^2}=\frac{uvw}{b^2}=\frac{uvw}{c^2}.$$

Queste equazioni sono indeterminate quando $a=b=c$, che è il caso della sfera; escluso questo, esse mostrano che dev'essere nullo u o v o w, e però il piano secante deve passare per uno degli assi dell'ellissoide (cfr. § 37).

Se il piano passa per l'asse $2a$, si ha $u=0$, e le [3] § 37 porgono

$$v^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+w^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0,$$

onde

$$[17] \qquad u=0, \quad \frac{v}{w}=\pm\frac{c}{b}\sqrt{-\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},$$

ed è così determinata una prima coppia di piani *ciclici*. Le altre due passano per gli assi $2b$, $2c$, e son determinate dalle equazioni

$$[18] \qquad v=0, \quad \frac{w}{u}=\pm\frac{a}{c}\sqrt{-\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}}=\pm\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}};$$

$$[19] \qquad w=0, \quad \frac{u}{v}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{-\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}}.$$

Or supposto $a>b>c$, è chiaro che solo la 2ª coppia è reale; e se $a=b$ o $b=c$, due coppie si confondono in un sol piano e la rimanente è immaginaria.

Dunque: *per ogni ellissoide (reale) esistono due piani diametrali (reali) che secano l'ellissoide secondo circoli. Questi piani passano per l'asse di media lunghezza, e sono simmetricamente posti rispetto ai piani principali. Essi e i loro paralleli costituiscono i due sistemi di piani ciclici (reali) per l'ellissoide.*

Nell'ellissoide rotondo si riducono ai paralleli.

Il diametro coniugato a un piano della 2ª coppia giace nel piano principale $y=0$, ed ha le equazioni (§ 21)

$$y=0, \quad \frac{z}{c\sqrt{b^2-c^2}}=\frac{x}{\pm a\sqrt{a^2-b^2}};$$

il suo estremo soddisfa anche la [1]; dunque le sue coordinate sono

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad 0, \quad \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right):$$

si hanno così le coordinate di quattro ombelichi reali.

Alla 2ª e 3ª coppia di piani ciclici corrispondono altre due quaterne di ombelichi; ma sono immaginarie.

§ **52**. **Iperboloide a una falda.** — Le cose ora esposte per l'ellissoide valgono anche per l'iperboloide a una falda riferito a tre diametri coniugati o ai suoi assi:

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

solo bisogna mutare dappertutto c^2 in $-c^2$, e quindi c in $c\sqrt{-1}$.

P. es., se per un momento a, b, c indicano i semiassi, posto $a>b$, i piani ciclici reali sono quelli della 1ª coppia, pei quali

$$u=0, \quad \frac{v}{w}=\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}};$$

ossia: *nell'iperboloide a una falda i due sistemi di piani ciclici (reali) sono paralleli al maggiore dei due assi trasversi.*

Gli ombelichi son tutti immaginarii.

Scritta la [1] così:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

ovvero

$$[2] \qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

si scorge che, qualunque sia il parametro λ, la retta comune ai due piani

$$[3] \qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}$$

giace sull'iperboloide; giacchè eliminando λ fra le [3] si cade nella [2]. Facendo prendere a λ tutti i valori reali, le [3] rappresentano due fasci di piani; e considerando le coppie di piani corrispondenti, si ottiene un sistema di ∞ rette giacenti sull'iperboloide; ed è facile vedere che due qualunque di esse non possono incontrarsi.

La [2] mostra che un altro sistema di ∞ rette sulla quadrica è definito dalle equazioni

$$[4] \qquad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b},$$

facendo variare il parametro μ; e due qualunque fra queste rette non s'incontrano.

Ma una retta del 1° sistema e una del 2° s'incontrano; e per assicurarsene basta osservare che nelle [3] e [4], sia sottraendo la 1ª dalla 1ª, sia la 2ª dalla 2ª, si ha lo stesso risultato

$$y=b\,\frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda},$$

e però le quattro equazioni [3] e [4] ammettono una soluzione comune.

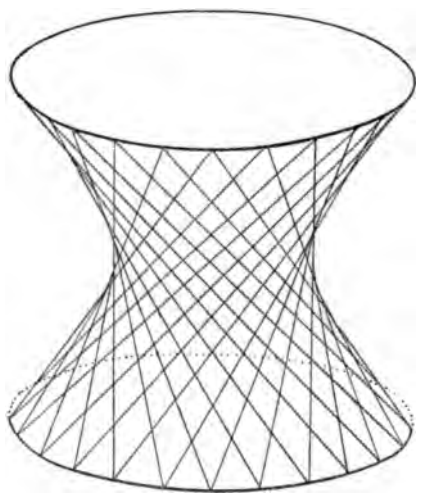


fig. 11

Tutte queste proprietà concordano con quanto esponemmo al § 7-5° per le quadriche a punti iperbolici, quale è l'iperboloide a una falda (fig. 11).

Quattro rette del 1° sistema, corrispondenti a quattro valori assegnati di λ, secano una retta del 2° sistema in quattro punti, che sono gli stessi in cui essa è incontrata dai quattro piani del fascio

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

corrispondenti a quei valori di λ; dunque il rapporto anarmonico dei quattro punti è eguale a quello dei quattro piani. Vale a dire che le punteggiate segnate dalle rette di un sistema su quelle dell'altro, e i fasci di piani per le singole rette di un sistema e per tutte quelle dell'altro, son tutti proiettivi.

Fra le rette del 1° sistema vi sono le

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\ 1-\frac{y}{b}=0\right),\quad \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\ 1+\frac{y}{b}=0\right),$$

che corrispondono a $\lambda = 0$ e $\lambda = \infty$. Similmente, fra le rette del 2° sistema vi sono le

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0,\ 1 + \frac{y}{b} = 0\right),\ \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0,\ 1 - \frac{y}{b} = 0\right).$$

Per ciascun punto dell'iperboloide possiamo far passare due piani [3] e due piani [4], e però due rette, una per sistema.

Sappiamo (§ 7-5°) che sopra una quadrica non possono esistere più di due sistemi di rette. P. es. i sistemi analoghi a [3] e [4]:

$$[5] \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \lambda'\left(1 + \frac{x}{a}\right),\ \lambda'\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{x}{a},$$

$$[6] \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \mu'\left(1 - \frac{x}{a}\right),\ \mu'\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{x}{a},$$

coincidono con quelli. Si può infatti verificare che il sistema [6] si riduce a [3], e [5] si riduce a [4], prendendo rispettivamente

$$\mu' = \frac{1+\lambda}{1-\lambda},\quad \lambda' = \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

Inoltre è chiaro che, considerando due rette di un sistema e due dell'altro, si hanno quattro spigoli di un tetraedro, il quale è contemporaneamente iscritto e circoscritto all'iperboloide. I rimanenti due spigoli opposti del tetraedro sono due rette coniugate. Ed ogni coppia di rette coniugate individua un cosiffatto tetraedro.

Importa notare che ciascuna generatrice del cono asintoto è parallela a due rette dell'iperboloide, una di un sistema e l'altra dell'altro; cioè a quelle due rette che passano pel punto all'infinito della generatrice, e quindi cadono nel piano tangente al cono asintoto lungo la generatrice stessa.

E siccome tre generatrici del cono non cadono in un piano, così tre rette di uno stesso sistema sull'iperboloide non sono mai parallele a uno stesso piano.

Poichè siamo ritornati sulle proprietà esposte nel § 7-5°, crediamo utile ricercare analiticamente: *il luogo generato da una retta, che si muova appoggiandosi a tre rette date sghembe e non parallele a uno stesso piano.*

Per avere le equazioni delle tre rette date nella forma più semplice, conduciamo per ciascuna retta i piani paralleli alle altre due, formando così un parallelepipedo, del quale esse sono tre spigoli non contigui; indi poniamo l'origine nel centro del parallelepipedo, e ti-

riamo gli assi coordinati parallelamente alle tre rette. Detti $2a$, $2b$, $2c$ i tre spigoli, è chiaro che le tre rette date hanno le equazioni

$$(y = b,\ z = -c),\quad (z = c,\ x = -a),\quad (x = a,\ y = -b).$$

Assumendo le equazioni della retta mobile sotto la forma

$$\frac{x - x'}{\alpha} = \frac{y - y'}{\beta} = \frac{z - z'}{\gamma},$$

le condizioni perchè essa incontri le tre rette date saranno

$$\frac{y' - b}{\beta} = \frac{z' + c}{\gamma},\quad \frac{z' - c}{\gamma} = \frac{x' + a}{\alpha},\quad \frac{x' - a}{\alpha} = \frac{y' + b}{\beta};$$

moltiplicando queste fra loro, e sopprimendo gli accenti, avremo come equazione del luogo

$$(x - a)(y - b)(z - c) = (x + a)(y + b)(z + c),$$

ovvero

[7] $$ayz + bzx + cxy + abc = 0,$$

la quale (§ 46) rappresenta un iperboloide a una falda riferito a tre asintoti.

Si noti che nel parallelepipedo vi sono altri tre spigoli non contigui, i quali appartengono anche all'iperboloide: essi con le tre rette date costituiscono un particolare *esagono iperboloidico*. Tutte le facce del parallelepipedo sono tangenti all'iperboloide, e ciò in sei degli otto vertici.

È chiaro che un'iperboloide rotondo a una falda può esser generato in due modi da una retta che roti intorno all'asse non trasverso.

Del resto, possiamo dimostrare che un *cilindroide*, ossia la superficie generata da una retta rotante intorno ad una retta fissa che non incontra, è un iperboloide a una falda.

Prendiamo per asse delle z la retta fissa, per asse delle x la perpendicolare comune alla retta fissa e alla posizione iniziale della retta mobile, per asse delle y la perpendicolare ai due assi precedenti; e chiamiamo λ e μ l'angolo e la distanza costanti fra la retta mobile e la fissa. Saranno

$$x = z\,\mathrm{tg}\lambda,\quad y = \mu$$

le equazioni della detta posizione iniziale, e quindi sarà

[8] $$x^2 + y^2 = z^2\mathrm{tg}^2\lambda + \mu^2$$

l'equazione della superficie. Essa dunque non è che un iperboloide a una falda, i cui semiassi sono μ, μ, $\frac{\mu}{\operatorname{tg}\lambda}$. Mutando il segno di λ, si ha l'altro sistema di rette sulla superficie.

§ 53. Iperboloide a due falde. — Anche per l'iperboloide a due falde

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

valgono le formole e le proprietà esposte per l'ellissoide al § 51; solo bisogna mutare b^2 e c^2 in $-b^2$ e $-c^2$, e quindi b e c in $b\sqrt{-1}$ e $c\sqrt{-1}$.

P. es. se a, b, c sono i semiassi, posto $b > c$, i piani ciclici reali sono quelli della 2ª coppia:

$$v = 0, \quad \frac{w}{u} = \pm \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 + b^2}};$$

dunque: *nell'iperboloide a due falde i due sistemi di piani ciclici reali sono paralleli all'asse non trasverso più lungo;* e va notato che non tutti questi piani secano in circoli reali; fra gli altri quelli pel centro. I quattro ombelichi corrispondenti sono reali.

§ 54. Cono. — Quanto al cono reale riferito a tre diametri coniugati

[1] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0:$$

il piano polare di un punto (x', y', z') è

[2] $$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - \frac{z'z}{c^2} = 0,$$

e però ciascun piano (u, v, w) tangente lungo una generatrice soddisfa l'equazione

[3] $$a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0.$$

Il cono ammette due sistemi di piani ciclici reali, e precisamente gli stessi degl'iperboloidi a una e due falde cui è asintotico; i quali iperboloidi (cfr. § 43) sono rappresentati dall'equazione

[4] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \nu,$$

ν essendo qualunque, positivo o negativo.

L'equazione del cono generato da una retta rotante intorno a una retta fissa, che incontra sotto l'angolo λ, è

$$[5] \qquad x^2 + y^2 = z^2 \mathrm{tg}^2\lambda,$$

come si vede sia direttamente, sia ponendo $\mu = 0$ nell'equazione del cilindroide (§ 52).

E l'equazione del cilindro generato da una retta rotante intorno a una retta fissa parallela a distanza μ, è evidentemente

$$[6] \qquad x^2 + y^2 = \mu^2.$$

§ 55. Paraboloide ellittico. — Passiamo ora ai paraboloidi. Sia

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$$

l'equazione di un paraboloide ellittico, riferito a due rette coniugate in un piano tangente e al diametro pel punto di contatto.

Allora

$$f(x, y, z, 1) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z,$$

$$f_1 = \frac{x}{a}, \quad f_2 = \frac{y}{b}, \quad f_3 = -1, \quad f_4 = -1,$$

$$A = -\frac{1}{ab}, \quad B = 0, \quad \text{ecc.}$$

L'equazione del piano polare del punto $P'(x', y', z')$ è

$$[2] \qquad \frac{x'x}{a} + \frac{y'y}{b} = z + z'.$$

Se (u, v, w) son le coordinate di questo piano, si ha

$$[3] \qquad u = -\frac{x'}{az'}, \quad v = -\frac{y'}{bz'}, \quad w = \frac{1}{z'},$$

e però

$$[4] \qquad au^2 + bv^2 - 2w = \frac{1}{z'^2}\left(\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} - 2z'\right),$$

onde risulta che l'equazione del paraboloide come inviluppo è

$$[5] \qquad au^2 + bv^2 = 2w;$$

del resto si verifica facilmente che

$$F(u, v, w, 1) = -\frac{1}{ab}(au^2 + bv^2 - 2w).$$

Se p è la distanza dall'origine a un piano tangente, e α, β, γ gli angoli di essa con gli assi coordinati, si ha

$$[6] \qquad a\cos^2\alpha + b\cos^2\beta = 2p\cos\gamma.$$

Quind'innanzi supporremo il paraboloide riferito ad assi ortogonali. Allora per tre piani tangenti mutuamente ortogonali si ha

$$[7] \qquad p\cos\gamma + p'\cos\gamma' + p''\cos\gamma'' = \frac{a+b}{2};$$

e siccome il 1° membro equivale alla proiezione sull'asse delle z del raggio vettore che va al punto comune ai tre piani; così questa proiezione è costante. Dunque *il luogo dei vertici dei triedri trirettangoli circoscritti al paraboloide ellittico è un piano perpendicolare all'asse*. Esso dista di $\frac{a+b}{2}$ dal vertice.

Le sezioni circolari sono prodotte da quei piani, pei quali si verificano le condizioni [4] § 37:

$$\frac{uvw}{a} = \frac{uvw}{b} = w.0,$$

e però dev'esser nullo u o v o w.

Per $u = 0$ le [3] § 37 dànno

$$\frac{w^2}{b(v^2 + w^2)} = \frac{1}{a} \quad \text{ovvero} \quad bv^2 = (a - b)w^2;$$

quindi due sistemi di piani ciclici sono determinati dalle equazioni

$$[8] \qquad u = 0, \quad \frac{v}{w} = \pm\sqrt{\frac{a-b}{b}};$$

altri due dalle

$$[9] \qquad v = 0, \quad \frac{w}{u} = \pm\sqrt{\frac{a}{b-a}},$$

e altri due dalle

$$[10] \qquad w = 0, \quad \frac{u}{v} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

Se $a > b$, i primi due soli sono reali; e se $a = b$, il 2° si confonde col 1°. Dunque *per ogni paraboloide ellittico esistono due sistemi di piani ciclici reali; essi son paralleli agli assi maggiori delle sezioni perpendicolari all'asse*, ecc. *Nel paraboloide rotondo si riducono ai paralleli.*

I due ombelichi reali a distanza finita sono

$$\left(0,\ \pm\sqrt{b(a-b)},\ \ \tfrac{1}{2}(a-b)\right).$$

§ 56. Paraboloide iperbolico. — Le formole e le proprietà accennate pel paraboloide ellittico reggono per l'iperbolico

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z\,;$$

solo bisogna mutare b in $-b$.

Quanto ai piani ciclici, sono reali quelli per cui

$$w = 0,\ \ \frac{u}{v} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\,;$$

ma questi piani sono paralleli ai due piani direttori (§ 47), e quindi i circoli in essi contenuti degenerano in una retta a distanza finita e in una retta all'infinito.

Scrivendo la [1] così:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 2z,$$

si scorge che la retta di equazioni

$$[2] \qquad \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = \lambda,\ \ \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 2z$$

appartiene al paraboloide, qualunque sia λ. Variando λ, le [2] rappresentano due fasci di piani, e dalla intersezione dei piani corrispondenti si ottiene un sistema di ∞ rette sul paraboloide; le quali sono tutte parallele al piano direttore

$$\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} = 0,$$

e non hanno punti comuni.

Un altro sistema di ∞ rette sul paraboloide è definito dalle equazioni

$$[3] \qquad \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = \mu, \quad \mu\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 2z\,;$$

queste rette sono parallele all'altro piano direttore

$$\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0,$$

e non hanno punti comuni.

Ma una retta del 1° sistema e una del 2° s'incontrano, poichè la 1ª [2] con la 2ª [3] dà $2z = \lambda\mu$, e lo stesso dà la 2ª [2] con la 1ª [3]. Non vi possono essere altre rette sul paraboloide (§ 7-5°).

Dall'essere le rette di un sistema parallele a un piano, segue che esse dividono due rette qualunque dell'altro sistema in parti proporzionali (§ 20-3°).

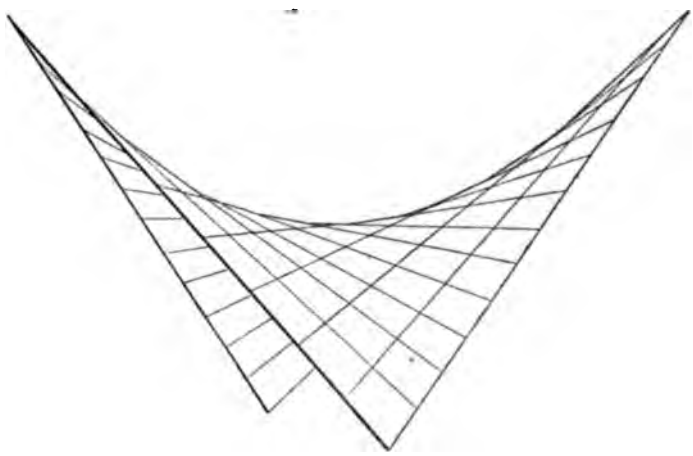


fig. 12

Viceversa: *una retta, che si muova appoggiandosi a due rette fisse sghembe e mantenendosi parallela a un piano dato, genera un paraboloide iperbolico.* Per ottenere l'equazione del luogo in una forma semplice, si scelga come asse delle z la retta che unisce le tracce delle due rette fisse sul piano dato, e come origine il punto medio fra le dette tracce; indi, condotte per l'origine le parallele alle due rette, si prenda per asse delle x la retta che il loro piano ha comune

col piano dato, e come asse delle y la coniugata armonica di essa retta rispetto a quelle due parallele. Allora le equazioni delle due rette fisse saranno della forma

$$(z = \mu,\ x = \lambda y),\quad (z = -\mu,\ x = -\lambda y)\,;$$

e un piano mobile parallelo al piano dato $y = 0$ secherà le due rette nei punti

$$(\lambda y,\ y,\ \mu),\quad (-\lambda y,\ y,\ -\mu)\,;$$

un punto qualunque della retta mobile individuata da questi due punti avrà la stessa y di essi, ed avrà la x e la z espresse da

$$x = \frac{n\lambda y - m\lambda y}{n+m} = \frac{n-m}{n+m}\lambda y,\quad z = \frac{n\mu - m\mu}{n+m} = \frac{n-m}{n+m}\mu\,;$$

donde, eliminando $\frac{n-m}{n+m}$, risulta

$$[4]\qquad \lambda y z = \mu x$$

come equazione del luogo. Questo è un paraboloide iperbolico, perchè nella [4] l'unico termine di 2° grado è prodotto di due fattori lineari reali (§ 19-2°).

La [4] è la più semplice equazione di un paraboloide iperbolico: l'origine è sul paraboloide, l'asse delle z è un diametro, i piani xz, yz son paralleli ai due piani direttori.

Ancora: *una retta, che si muova appoggiandosi a tre rette fisse parallele a un medesimo piano, genera un paraboloide iperbolico.* E invero, scegliendo per asse delle z una retta che incontri le tre rette fisse, e gli assi delle x e y paralleli a due di esse, le equazioni delle tre rette fisse si presentano sotto la forma

$$(x = 0,\ z = a),\quad (y = 0,\ z = b),\quad (x = my,\ z = c)\,;$$

allora le equazioni di una retta appoggiata alle due prime sono

$$x = \lambda(z - a),\quad y = \mu(z - b),$$

e questa retta si appoggia alla terza se

$$\lambda(c - a) = m\mu(c - b)\,;$$

ed eliminando λ, μ dalle ultime tre equazioni, si trova come equazione del luogo

$$(c-a)\,x\,(z-b) = m\,(c-b)\,y\,(z-a).$$

Poichè i termini di 2° grado hanno comune il fattore z, il luogo è un paraboloide iperbolico.

Quadriche equilatere.

§ 57. Noi abbiamo già esaminato alcune particolarità di quadriche, subordinandole a quelle dell'importante equazione $\Delta(\rho)=0$; e precisamente: abbiamo veduto che la quadrica è un paraboloide quando nella $\Delta(\rho)=0$ manca il termine costante B, ed è di rotazione quando è nullo il discriminante della $\Delta(\rho)=0$. Ora tratteremo qualche altro caso particolare.

Sia nullo D, coefficiente di ρ^2 nella $\Delta(\rho)=0$. Posto che A e B non sieno nulli, cioè che si tratti di un ellissoide o di un iperboloide a una o due falde, è chiaro (§ 41) che le radici della $\Delta(\rho)=0$ differiscono pel fattore $\frac{A}{B}$, preso coi debiti segni, dai quadrati inversi dei semiassi a, b, c della quadrica; e però il 2° coefficiente D differisce pel fattore $-\frac{A\Omega}{B}$ dalle rispettive somme

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2},\quad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2};$$

e siccome la 1ª somma è certamente positiva, così l'ipotesi $D=0$ può stare solamente per un iperboloide a una falda in cui sia

$$[1]\qquad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0,$$

e per un iperboloide a due falde in cui sia

$$[2]\qquad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

1° Assumiamo per equazione dell'iperboloide a una falda

$$[3]\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

e consideriamo una retta dell'iperboloide e un punto (x', y', z') di quello asintoto che le è parallelo, onde

$$[4] \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0.$$

Sarà

$$x'x + y'y + z'z + k = 0$$

un piano perpendicolare all'asintoto ed alla retta considerati; e questo piano secherà l'iperboloide in un'iperbole equilatera, poichè si verifica la condizione [8] § 35, che qui si riduce a

$$-\frac{y'^2}{c^2} + \frac{z'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{c^2} + \frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 0,$$

ovvero, per la [4], a

$$\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0,$$

cioè alla [1].

Dunque: *per un iperboloide a una falda, la condizione $D = 0$ esprime che i piani perpendicolari alle rette dell'iperboloide secano questo in iperboli equilatere. E se uno di questi piani seca in una iperbole equilatera, lo stesso avverrà per tutti.*

In questo caso l'iperboloide dicesi *equilatero.*

Riflettasi che fra i piani perpendicolari a una retta dell'iperboloide ve ne ha due tangenti, nei quali le sezioni saranno coppie di rette perpendicolari, una retta per sistema; e che le rette delle due coppie sono rispettivamente parallele. Quindi si può anche concludere che: *per un iperboloide a una falda, la condizione $D = 0$ esprime che a ciascuna retta dell'iperboloide ne corrispondono, nello stesso sistema, altre due ortogonali fra loro ed alla prima. E se ciò avviene per una retta, avverrà per tutte.*

A tali tre rette di un sistema ne corrispondono tre nell'altro, rispettivamente parallele a quelle; e tutte le sei rette formano un esagono iperboloidico con tutti gli angoli retti (§ 52); onde i parallelepipedi come quello del § 52 sono tutti rettangoli, e però i loro vertici appartengono tutti alla sfera luogo dei vertici dei triedri trirettangoli circoscritti all'iperboloide (§ 51).

2° Ripetendo il procedimento sulla [3] priva del 2° membro, abbiamo: *per un cono quadrico, la condizione $D = 0$ esprime che le sezioni perpendicolari alle generatrici sono iperboli equilatere;*

e se ciò avviene per una di tali sezioni, avverrà per tutte. Allora il cono dicesi *equilatero.*

Considerando che, fra le dette sezioni, quelle che passano pel vertice si scindono in due rette perpendicolari, abbiamo pure che: *per un cono quadrico, la condizione $D=0$ esprime che ad ogni generatrice ne corrispondono altre due formanti con essa un triedro trirettangolo; e se ciò avviene per una, avverrà per tutte.*

Poichè cinque rette di una stella individuano un cono quadrico, apparisce che *i sei spigoli di due triedri trirettangoli con lo stesso vertice appartengono a un cono quadrico ed equilatero.*

3° Analogamente: *per un iperboloide a due falde, la condizione $D=0$ esprime che una, e quindi tutte le sezioni perpendicolari agli asintoti sono iperboli equilatere*; oppure: *ad uno, e quindi a ciascuno asintoto ne corrispondono altri due perpendicolari ad esso e fra loro.* E l'iperboloide dicesi *equilatero.*

4° Nel paraboloide ellittico

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z,$$

è chiaro che D non può esser nullo.

5° Nel paraboloide iperbolico

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z\,,$$

una radice della $\Delta(\rho)=0$ è nulla, e le altre due sono proporzionali a $\frac{1}{a}$ e $-\frac{1}{b}$; quindi per $D=0$ si ha $a=b$, e le sezioni perpendicolari all'asse sono iperboli equilatere. Adunque: *per un paraboloide iperbolico, la condizione $D=0$ esprime che una, e quindi ogni sezione perpendicolare all'asse è un'iperbole equilatera*; ovvero: *che quelle due rette del paraboloide che passano pel vertice sono perpendicolari*; ovvero: *che i due piani direttori sono perpendicolari*; ovvero: *che tutte le rette di un sistema sono perpendicolari a quella retta dell'altro sistema che passa pel vertice.*

Questo paraboloide dicesi *equilatero.*

Di qui è facile dedurre il teorema:

Date due rette sghembe, la superficie luogo delle perpendicolari condotte all'una pei punti dell'altra è un paraboloide equilatero, ecc.

Quadriche ortogonali.

§ 58. Un'altra particolarità notevole si presenta quando una radice dell'equazione $\Delta(\rho)=0$ è eguale alla somma delle altre due, ossia quando $-\frac{D}{2\Omega}$ è una radice dell'equazione $\Delta(\rho)=0$, ossia quando è soddisfatta la condizione

$$[1] \qquad D^3 - 4\Omega CD + 8\Omega^2 B = 0.$$

1° Se la quadrica è un ellissoide di semiassi a, b, c, e se $a>b>c$, la [1] si traduce in

$$[2] \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2};$$

allora le equazioni [18] § 51, che determinano i due sistemi di piani ciclici reali, si riducono a

$$v=0, \quad \frac{w}{u} = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}};$$

onde si deduce che: *quando in un ellissoide si verifica la condizione* [1], *i due diametri perpendicolari ai piani ciclici (reali) passano per gli estremi dei segmenti eguali a b, elevati dai fuochi dell'ellisse principale di assi 2a, 2b perpendicolarmente al piano di essa.*

Allora l'ellissoide dicesi *ortogonale.*

2° Se

$$[3] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

è l'equazione di un iperboloide a una falda riferito ai suoi assi, posto $a>b$, la [1] equivale alla

$$[4] \qquad \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$$

e i piani ciclici reali sono determinati dalle

$$u=0, \quad \frac{v}{w} = \pm \frac{b}{c};$$

onde i diametri ad essi perpendicolari sono gli asintoti

$$\left(x=0,\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0\right),\ \left(x=0,\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\right)$$

dell'iperbole principale nel piano $x=0$. E siccome in ciascuno dei due sistemi di rette sull'iperboloide ve n'è una parallela all'uno asintoto e una parallela all'altro; così concludiamo che: *per un iperboloide a una falda, la* [1] *è la condizione affinchè un sistema di piani ciclici (reali) sia perpendicolare ad una, e quindi a due rette dell'iperboloide; nel qual caso l'altro sistema di piani ciclici sarà perpendicolare a due altre rette dell'iperboloide.* E l'iperboloide si chiamerà *ortogonale.*

Fra queste quattro rette, due di uno stesso sistema sono

$$\left(\frac{x}{a}-1=0,\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0\right),\ \left(\frac{x}{a}+1=0,\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\right);$$

e due piani variabili nei fasci da esse determinati sono

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad \lambda\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=1+\frac{x}{a};$$

questi per uno stesso valore arbitrario di λ verificano la condizione di perpendicolarità, grazie alla [4]; e variando λ, la retta loro comune genera il dato iperboloide [3]. Dunque possiamo anche enunciare che: *per un iperboloide a una falda, la condizione* [1] *esprime che l'iperboloide può venir generato dalle rette comuni ai piani di un certo fascio ed ai piani rispettivamente loro perpendicolari di un altro fascio, il cui asse non incontra quello del primo.*

Oltre questi due fasci, ve ne sono altri due nelle stesse condizioni (*).

3° Si scorge facilmente che: *per un cono reale, la* [1] *è la condizione affinchè un sistema di piani ciclici (reali) sia perpendicolare a una retta del cono, e quindi l'altro a un'altra;* od anche: *la condizione affinchè il cono possa venir generato dalle rette comuni ai*

(*) Il lettore può verificare che le proprietà dell'iperboloide a una falda ortogonale sussistono anche per le altre quadriche a centro ortogonali: solo che nell'ellissoide (incluso il cono immaginario) i piani ciclici e le generatrici in questione sono tutti immaginarii, e nell'iperboloide a due falde i piani ciclici in questione sono reali e le generatrici immaginarie.

piani di un fascio ed ai piani rispettivamente loro perpendicolari di un altro fascio, il cui asse incontri quello del primo.

4° Per un iperboloide a due falde riferito ai proprii assi

$$[5] \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la [1] equivale alla [2], e pei piani ciclici reali si ha

$$v = 0, \quad \frac{w}{u} = \pm \frac{c}{a};$$

dunque: *per un iperboloide a due falde, la condizione* [1] *esprime che un sistema di piani ciclici (reali) è perpendicolare a un asintoto, e quindi l'altro sistema a un altro asintoto;* e i due asintoti son quelli dell'iperbole principale di semiassi a, c.

5° Per un paraboloide ellittico è $B = 0$ e $D \gtrless 0$; e però la [1] diviene

$$[6] \qquad 4\Omega C - D^2 = 0,$$

ed implica che le due radici non evanescenti della $\Delta(\rho) = 0$ siano eguali. Allora il paraboloide è rotondo.

6° Per un paraboloide iperbolico è $B = 0$, e la $\Delta(\rho) = 0$ non ha radici eguali; sicchè la [6] equivale a $D = 0$, e ricadiamo nel caso già trattato del paraboloide *equilatero* (§ 57).

Fuochi e coniche focali.

§ **59**. Cerchiamo i punti tali, che i coni da essi circoscritti alla quadrica siano rotondi.

Cominciamo dal supporre che la quadrica abbia centro; e, ad evitare formole complicate, riferiamola ai proprii assi, assumendo

$$[1] \qquad f(x, y, z, 1) = px^2 + qy^2 + rz^2 - k.$$

L'equazione del cono circoscritto dal punto (x', y', z') è allora (§ 7-6°)

$$[2] \qquad f(x',\ldots).f(x,\ldots) - (px'x + qy'y + rz'z - k)^2 = 0;$$

e questo cono sarà rotondo quando si verifichino le condizioni [2] § 29. Ora si ha

$$a_{11} = p\,\{\mathrm{f}(x', \ldots) - px'^2\}, \ldots, \qquad a_{12} = -\,pqx'y', \ldots,$$

$$B_{11} = qr(px'^2 - k)\,\mathrm{f}(x', \ldots), \ldots, \qquad B_{12} = pqrx'y'\mathrm{f}(x', \ldots), \ldots;$$

e però le dette condizioni si riducono, soppressi gli accenti, alle seguenti:

$$[3] \qquad -\frac{pqrxy\mathrm{f}(x,\ldots)}{pqxy} = -\frac{pqrxz\mathrm{f}(x,\ldots)}{prxz} = -\frac{pqryz\mathrm{f}(x,\ldots)}{qryz}$$

$$= \frac{qr(px^2 - k) - pr(qy^2 - k)}{(p-q)\mathrm{f}(x,\ldots) - (p^2x^2 - q^2y^2)}\,\mathrm{f}(x,\ldots) = \frac{qr(px^2 - k) - pq(rz^2 - k)}{(p-r)\mathrm{f}(x,\ldots) - (p^2x^2 - r^2z^2)}\,\mathrm{f}(x,\ldots)$$

$$= \frac{pr(qy^2 - k) - pq(rz^2 - k)}{(q-r)\mathrm{f}(x,\ldots) - (q^2y^2 - r^2z^2)}\,\mathrm{f}(x,\ldots).$$

Queste condizioni sono evidentemente soddisfatte da tutti i punti dello spazio quando $p = q = r$, quando cioè la quadrica è una sfera; caso che noi escludiamo. Sono anche soddisfatte da tutti i punti della quadrica, qualunque siano p, q, r; e infatti per un punto della quadrica il cono si riduce al piano tangente ivi contato due volte, e può dirsi di rotazione intorno alla normale; ma noi non ci occupiamo di questi punti.

Ciò premesso, è chiaro che i tre primi rapporti [3] non possono essere eguali, se non a patto che sia nullo x o y o z. Posto p. es. $x=0$, rimane (*) ad eguagliare il 3° rapporto ai seguenti, il che mena all'unica condizione

$$[4] \qquad pq(p-r)y^2 + pr(p-q)z^2 - (p-q)(p-r)k = 0;$$

(*) A schiarimento del presente caso, è utile la seguente riflessione. Quando in $\mathrm{f}(x)$ son nulli due dei coefficienti a_{12}, a_{13}, a_{23}, p. es. i due primi, allora sono anche nulli B_{12}, B_{13}; e perchè il discriminante [1] § 28 della $\Delta(\rho) = 0$ si annulli, e quindi la quadrica sia rotonda, sono evidentemente più che sufficienti le condizioni [2] § 29; solo che è inutile tener conto dei rapporti che prendono l'aspetto $\frac{0}{0}$, e bisogna ricordare che esse equivalgono a una sola condizione (come è facile verificare sostituendo a B_{23}, B_{11},... le loro espressioni).

Si trova così $\rho_2 = -a_{11}$. Per questo valore la 1ª delle equazioni [3] § 27 riesce identica; e le altre due si riducono ad una, che è

$$(a_{22} - a_{11})\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0 \quad \text{oppure} \quad a_{23}\alpha_2 + (a_{33} - a_{11})\alpha_3 = 0,$$

ed è soddisfatta dalle ∞ direzioni perpendicolari all'asse di rotazione.

Si noti che α_1 è libero.

avremo dunque

$$[5] \qquad x = 0, \quad \frac{y^2}{\frac{k}{q} - \frac{k}{p}} + \frac{z^2}{\frac{k}{r} - \frac{k}{p}} = 1;$$

e però otterremo nel piano $x = 0$ ∞ punti sulla conica [5].

Confrontando questa con la sezione principale della quadrica:

$$[6] \qquad x = 0, \quad \frac{y^2}{\frac{k}{q}} + \frac{z^2}{\frac{k}{r}} = 1,$$

apparisce che esse hanno lo stesso centro, le stesse direzioni di assi, e gli stessi fuochi (reali o immaginarii). Inoltre, poichè le coordinate dei quattro ombelichi nel piano $x = 0$ si possono scrivere (§ 51)

$$x = 0, \quad y = \pm \sqrt{\frac{r\left(\frac{k}{q} - \frac{k}{p}\right)}{r - q}}, \quad z = \pm \sqrt{\frac{q\left(\frac{k}{r} - \frac{k}{p}\right)}{q - r}},$$

si vede subito che i punti d'incontro delle coniche [4] e [5] sono appunto questi ombelichi.

Possiamo dunque enunciare che: *il luogo dei punti tali, che i coni da essi circoscritti a una quadrica dotata di centro siano rotondi, si compone di tre coniche, situate rispettivamente nei tre piani principali della quadrica. Ciascuna conica ha in comune con la sezione principale che giace nel suo piano, il centro, le direzioni degli assi e i fuochi; inoltre essa passa per i quattro ombelichi esistenti nel suo piano.*

I punti di cui si tratta si chiamano *fuochi* della quadrica, e le coniche sulle quali essi sono distribuiti si chiamano *focali*.

L'asse di rotazione del cono [2], per la simmetria della figura, deve giacere nel piano principale in cui cade il suo vertice. Inoltre, se il vertice è nel piano $x = 0$, le direzioni (α, β, γ) ortogonali all'asse di rotazione del cono [2] verificano la equazione

$$\{ -pqy^2 + (q - p)(rz^2 - k) \} \beta - qryz\gamma = 0,$$

mentre α è libero. Eliminando pqy^2 mediante la [4], si ha

$$\beta : \gamma = \frac{y}{\frac{k}{q} - \frac{k}{p}} : \frac{z}{\frac{k}{r} - \frac{k}{p}};$$

e però il piano perpendicolare all'asse nel vertice passa per la normale alla conica [5] nel vertice stesso. Dunque:

1° *Gli assi di rotazione dei coni circoscritti alla quadrica dai punti delle sue coniche focali, sono le tangenti a queste;*

2° *Le tangenti alle coniche focali sono le rette per le quali passano infinite coppie di piani coniugati rispetto alla quadrica ed ortogonali* (cfr. § 11-5°-6° e § 29);

3° *Il piano perpendicolare a una tangente di una conica focale nel punto di contatto seca la quadrica lungo una conica, che ha per fuoco questo punto e per direttrice una retta perpendicolare al piano della conica focale.*

§ **60**. Sinora non abbiamo fatta distinzione fra le varie quadriche a centro, nè badato a distinguere enti reali da immaginarii. È ciò che ora faremo.

1° Per l'ellissoide reale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

posto $a > b > c$, le tre coniche focali sono

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = -1, \text{ ellisse immaginaria,}$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \text{ iperbole,}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \text{ ellisse reale.}$$

L'ellisse è interna alla corrispondente ellisse principale, e i coni circoscritti dai suoi punti sono immaginarii. L'iperbole seca la corrispondente ellisse principale negli ombelichi; e questi separano i punti pei quali i coni sono immaginarii da quelli pei quali sono reali.

2° Per l'ellissoide immaginario

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

posto $a > b > c$, si ha

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1, \text{ ellisse reale,}$$

$$y = 0, \quad \frac{z^2}{b^2 - c^2} - \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1, \text{ iperbole,}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = -1, \text{ ellisse immaginaria.}$$

3° Per l'iperboloide a una falda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

posto $a > b$, si ha

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1, \text{ ellisse immaginaria,}$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 1, \text{ iperbole,}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1, \text{ ellisse reale.}$$

L'iperbole e la ellisse sono esterne alle corrispondenti sezioni principali.

4° Per l'iperboloide a due falde

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

posto $b > c$, si ha

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{a^2 + c^2} = -1, \text{ ellisse immaginaria,}$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \text{ ellisse reale,}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 + c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \text{ iperbole.}$$

L'ellisse seca la corrispondente sezione principale negli ombelichi; l'iperbole è interna alla corrispondente sezione principale.

Riepilogando: *un ellissoide o iperboloide ammette, in generale, un'ellisse (reale) focale e un'iperbole focale, situate nei due piani principali che passano per l'asse trasverso più lungo.*

È poi facile vedere che: *due fuochi di una conica focale sono vertici di un'altra conica focale* (non esclusi gl'immaginarii). P. es., nell'ellissoide per un fuoco reale dell'ellisse focale si ha

$$x = \sqrt{(a^2 - c^2) - (b^2 - c^2)} = \sqrt{a^2 - b^2},$$

che è un semiasse dell'iperbole focale.

Quando la quadrica è rotonda, dalle formole precedenti emerge che due delle coniche focali si riducono all'asse di rotazione, e la rimanente è un circolo (reale o immaginario) nel piano principale perpendicolare all'asse. I due fuochi della curva meridiana posti sull'asse di rotazione meritano speciale considerazione, poichè essi godono di proprietà analoghe ai fuochi delle coniche, come il lettore potrà da sè verificare.

5° Passiamo al cono quadrico. Basterà porre $k = 0$ nella [1] § 59, con che la conica [5] § 59 (dopo aver moltiplicato per k) diviene

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} + \frac{z^2}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} = 0,$$

ossia

$$x = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}} \pm \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}} = 0,$$

sicchè abbiamo due rette nel piano $x = 0$, due nel piano $y = 0$, e due nel piano $z = 0$. Però due sole di queste rette sono reali.

Dunque: *per ogni cono quadrico esistono due rette reali, dette focali, per ciascuna delle quali passano infinite coppie di piani coniugati ortogonali.* Le due rette passano pel vertice, e giacciono in uno dei piani principali simmetricamente rispetto agli assi.

La conica prodotta nel cono dal piano perpendicolare ad una retta focale in un punto qualunque di essa, ha per fuoco questo punto, ecc.

Se il cono è rotondo, le rette focali si confondono con l'asse di rotazione.

Queste proprietà sussistono anche nel cilindro con lievi modificazioni.

Le rette focali del cono asintoto di una quadrica a centro sono gli asintoti delle coniche focali della quadrica.

§ 61. Rimane a trattare dei fuochi nei paraboloidi. Assunta l'equazione in coordinate ortogonali

$$f(x, y, z, 1) = px^2 + qy^2 - 2z,$$

si ha pel cono circoscritto dal punto (x', y', z') l'equazione

$$f(x',\ldots)\, f(x,\ldots) - (px'x + qy'y - z - z')^2 = 0,$$

ove

$$a_{11} = p(qy'^2 - 2z'), \quad a_{22} = q(px'^2 - 2z'), \quad a_{33} = -1,$$

$$a_{12} = -pqx'y', \quad a_{13} = px', \quad a_{23} = -qy',$$

$$B_{11} = -qf(x',\ldots), \quad B_{22} = -pf(x',\ldots), \quad B_{33} = -2pqz'f(x',\ldots),$$

$$B_{12} = 0, \quad B_{13} = -pqx'f(x',\ldots), \quad B_{23} = -pqy'f(x',\ldots);$$

e le condizioni perchè il cono sia rotondo, soppressi gli accenti, sono

$$-\frac{0}{pqxy} = -\frac{pqx}{px} f(x,\ldots) = -\frac{pqy}{qy} f(x,\ldots)$$

$$= \frac{(p-q)f(x,\ldots)}{pq(y^2 - x^2) - 2(p-q)z} = \frac{q(2pz-1)f(x,\ldots)}{p(qy^2 - 2z) + 1} = \frac{p(2qz-1)f(x,\ldots)}{q(px^2 - 2z) + 1}.$$

Esclusa l'ipotesi $f(x,\ldots) = 0$, risulta necessariamente (se $p \gtrless q$) $x = 0$ o $y = 0$. Posto $x = 0$, rimane ad eguagliare il 3° rapporto al 4°, e si trova

$$x = 0, \quad y^2 = 2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\left(z - \frac{1}{2p}\right):$$

equazioni di una parabola di parametro $2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$, di vertice $\left(0, 0, \frac{1}{2p}\right)$, e confocale con la parabola principale $(x=0,\ y^2 = \frac{2}{q}z)$.

Dunque: *un paraboloide ha, in generale, due parabole focali; le quali sono situate nei due piani principali, hanno lo stesso asse del paraboloide ma le aperture rivolte in sensi opposti, hanno gli stessi fuochi delle due parabole principali, ed hanno i parametri eguali fra loro ed alla differenza dei parametri delle due principali.*

Il fuoco dell'una parabola focale è vertice dell'altra, ecc., ecc.

§ 62. Il piano polare di un punto (x', y', z') rispetto alla quadrica [1] § 59 è

$$px'x + qy'y + rz'z - k = 0,$$

e la perpendicolare a questo dal polo è

$$\frac{x-x'}{px'}=\frac{y-y'}{qy'}=\frac{z-z'}{rz'};$$

le tracce del piano e della retta sul piano $x=0$ sono, la retta

$$x=0,\quad qy'y+rz'z-k=0$$

e il punto

$$x=0,\quad y=\frac{p-q}{p}y',\quad z=\frac{p-r}{p}z';$$

ora è chiaro che questo punto è polo di quella retta rispetto alla conica focale [5] § 59. Dunque:

1° *Se da un punto qualunque si conduca la retta perpendicolare al suo piano polare rispetto alla quadrica, le tracce della retta e del piano sopra un piano principale sono polo e polare rispetto alla conica focale ivi contenuta.*

2° *Tali sono, in particolare, le tracce di un piano tangente alla quadrica e della normale corrispondente.*

3° *Mentre un piano rota intorno a una tangente di una conica focale, la perpendicolare ad esso dal polo rota intorno al punto di contatto nel piano normale alla conica;* e quindi il polo percorre la direttrice corrispondente a quel punto di contatto (§ 59).

4° *Ogni direttrice è coniugata, rispetto alla quadrica, con la tangente alla conica focale nel fuoco corrispondente.*

5° *Il luogo delle direttrici è un cilindro, che ha per base la conica polare reciproca della focale rispetto alla sezione principale.*

Il quadrato della distanza di un punto variabile (x, y, z) della quadrica [1] § 59 da un punto fisso $(0, y', z')$ è

$$x^2+(y-y')^2+(z-z')^2;$$

ed eliminando x^2 mediante l'equazione della quadrica, diviene

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)y^2+\left(1-\frac{r}{p}\right)z^2-2y'y-2z'z+\left(y'^2+z'^2+\frac{1}{p}\right).$$

La condizione perchè questa espressione sia il prodotto di due fattori lineari in y e z, è che si annulli il suo discriminante, cioè

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)\left(1-\frac{r}{p}\right)\left(y'^2+z'^2+\frac{1}{p}\right)-\left(1-\frac{q}{p}\right)z'^2-\left(1-\frac{r}{p}\right)y'^2=0;$$

or questa si riduce alla [4] § 59; dunque il punto $(0, y', z')$ appartiene alla conica focale nel piano $x=0$.

I due fattori lineari richiesti poi sono

$$y\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}+z\sqrt{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}+\ldots,\quad y\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}-z\sqrt{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}+\ldots;$$

essi, eguagliati a zero, rappresentano due piani paralleli (com'è agevole verificare) ai due piani ciclici per l'asse delle x (piani reali o immaginarii). E le distanze del punto (x, y, z) da questi piani sono espresse dai detti fattori lineari divisi per $\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$.

Inoltre è noto (cfr. Con. § 8) che, quando una funzione quadratica di due variabili si scinde in due fattori lineari, questi sono insieme annullati da quei valori delle variabili che annullano amendue le derivate parziali della funzione; dunque la retta comune ai due piani in questione ha le equazioni

$$\left(1-\frac{q}{p}\right)y-y'=0,\quad \left(1-\frac{r}{p}\right)z-z'=0,$$

e però è perpendicolare al piano $x=0$ nel punto

$$\left(0,\ \frac{py'}{p-q},\ \frac{pz'}{p-r}\right).$$

Or questo è il polo della tangente alla conica focale rispetto alla conica principale; e quindi otteniamo il teorema:

Il quadrato della distanza di un punto della quadrica da un fuoco di questa, e il prodotto delle distanze dello stesso punto dai due piani ciclici condotti per la direttrice coniugata a quel fuoco, serbano fra loro un rapporto costante, mentre il punto si muove sulla quadrica e il fuoco sopra un'assegnata conica focale.

I rapporti per le tre coniche sono

$$\frac{1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}},\quad \frac{1}{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}},\quad \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Se da ultimo si riflette che una trasformazione di coordinate renderebbe i detti fattori lineari in tutte tre le nuove coordinate, perveniamo al teorema:

Il quadrato della distanza di un punto della quadrica da un

fuoco di essa, è esprimibile mediante un prodotto di due funzioni lineari delle coordinate cartesiane del punto.

Non ci fermiamo a provare che queste proprietà sono caratteristiche per le quadriche e pei loro fuochi; p. es. che: *il luogo di un punto, la cui distanza quadrata da un punto fisso sia esprimibile mediante il prodotto di due date funzioni lineari delle coordinate cartesiane del punto, è una quadrica;* ecc., ecc.

Quadriche confocali.

§ 63. Noi non intendiamo qui trattare dei sistemi di due o più quadriche; tuttavia crediamo utile dare qualche notizia sopra gl'importanti sistemi di quadriche *confocali* (o *omofocali*), ossia di quadriche aventi le stesse coniche focali. Non faremo che accennare le principali proprietà e le dimostrazioni.

Sia dato un ellissoide riferito ai piani principali

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

o in coordinate di piani

$$[2] \qquad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0.$$

È chiaro che l'equazione

$$[3] \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} - 1 = 0,$$

oppure la

$$[4] \qquad (a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

pei singoli valori del parametro λ, rappresenterà ciascuna delle quadriche confocali all'ellissoide data.

Sia $a^2 > b^2 > c^2$. Per $\lambda < c^2$ si hanno ellissoidi reali, per $c^2 < \lambda < b^2$ iperboloidi a una falda, per $b^2 < \lambda < a^2$ iperboloidi a due falde, per $\lambda > a^2$ ellissoidi immaginarii.

Il passaggio dalla 1ª serie alla 2ª si fa per $\lambda = c^2$; nel qual caso la [3] diviene $z^2 = 0$ e la [4] $(a^2 - \lambda)u^2 + (b^2 - \lambda)v^2 - 1 = 0$, onde la quadrica si riduce alla conica focale nel piano $z = 0$. Il passaggio dalla 2ª alla 3ª serie si fa per l'iperbole focale, e dalla 3ª alla 4ª per l'ellisse focale immaginaria.

Per un punto dato passano tre quadriche del sistema, e sono di

specie diversa. Poichè, dato x, la [3] liberata da fratti è di 3° grado in λ, e per $\lambda = a^2, b^2, c^2, -\infty$ il 1° membro prende segni alterni; onde i tre valori di λ sono reali, e individuano quadriche di specie diversa.

I tre valori di λ corrispondenti a un punto qualunque dello spazio si possono assumere come coordinate del punto, e diconsi *ellittiche*.

Due quadriche della stessa specie non han punti comuni. Le tre quadriche per un punto si secano ivi ortogonalmente, vale a dire che i loro piani tangenti sono mutuamente ortogonali.

La [4] prova che *in un sistema di quadriche confocali ne esiste una tangente a un piano dato.*

Esercizii.

§ 64. Proponendo al lettore alcuni esercizii, abbiamo anzitutto in mira di dargli modo di applicare le principali formole che occorrono nella discussione delle quadriche e nella riduzione delle loro equazioni a forme più semplici. Oltre a ciò vogliamo portare a sua cognizione alcune proprietà, che potrà dimostrare con l'aiuto di quelle da noi esposte innanzi, alle quali servono di complemento.

1. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy + 10x + 4y + 6z + 4 = 0.$

Si ha

$$a_{11} = 7, \quad a_{22} = 6, \quad a_{33} = 5, \quad a_{12} = -2, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = -2,$$

$$a_{14} = 5, \quad a_{24} = 2, \quad a_{34} = 3, \quad a_{44} = 4;$$

$$A = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$B = A_{44} = 162, \quad A_{14} = -162, \quad A_{24} = -162, \quad A_{34} = -162, \quad A = -162.6.$$

La quadrica ha il centro unico a distanza finita $(-1, -1, -1)$; e non può essere che un ellissoide reale o un iperboloide a due falde.

Trasportando l'origine nel centro, l'equazione diviene

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6 = 0.$$

Per coordinate ortogonali si ha

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 7+\rho & -2 & 0 \\ -2 & 6+\rho & -2 \\ 0 & -2 & 5+\rho \end{vmatrix} = \rho^3 + 18\rho^2 + 99\rho + 162$$
$$= (\rho+3)(\rho+6)(\rho+9).$$

L'equazione $\Delta(\rho) = 0$ ha le radici distinte e negative -3, -6, -9; dunque la quadrica è un ellissoide ortogonale; e riferito ai piani principali, ha l'equazione

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2.$$

I semiassi sono ineguali e lunghi $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

I coseni degli angoli che gli assi della quadrica fanno con gli assi primitivi sono, a meno del divisore 3:

$$(1,\ 2,\ 2),\quad (2,\ 1,\ -2),\quad (2,\ -2,\ 1),$$

e le equazioni dei piani principali sono

$$x + 2y + 2z = 0,\quad 2x + y - 2z = 0,\quad 2x - 2y + z = 0.$$

I piani ciclici reali pel centro passano per l'asse medio, che è il 2°; e bisecano i diedri dei piani principali per esso.

La sostituzione che riduce l'equazione all'ultima forma è

$$x = \frac{X + 2Y + 2Z}{3},\quad y = \frac{2X + Y - 2Z}{3},\quad z = \frac{2X - 2Y + Z}{3}.$$

I due sistemi di assi coordinati sono in posizione reciproca.

Se si supponessero gli assi delle x e y inclinati a 60° e l'asse delle z perpendicolare ad essi, sarebbe $\Omega = \frac{3}{4}$ e

$$4\Delta(\rho) = 3\rho^3 + 83\rho^2 + 478\rho + 648 = (\rho+2)(3\rho^2 + 77\rho + 324),$$

e si avrebbe anche un ellissoide reale.

2. $$11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy - 8yz + 4zx = 12.$$

La quadrica ha per centro l'origine; inoltre si ha

$$B = \begin{vmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 324,\quad A = -12.324,$$

e se le coordinate sono ortogonali

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 11+\rho & -6 & 2 \\ -6 & 10+\rho & -4 \\ 2 & -4 & 6+\rho \end{vmatrix} = \rho^3 + 27\rho^2 + 180\rho + 324 = (\rho+3)(\rho+6)(\rho+18)\,;$$

dunque la quadrica è un ellissoide reale; che, riferito ai proprii assi, ha l'equazione

$$x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 4.$$

Le lunghezze dei semiassi sono 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Le direzioni sono le stesse dell'es. 1.

I due piani ciclici passano pel 2° asse, e sono $x \pm 2z = 0$.

3. $7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy - 12xz + 12yz = \pm 84.$

Si ha

$$B = \begin{vmatrix} 7 & 12 & -6 \\ 12 & -13 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 6.7^3, \quad A = \mp 6.7^3.84,$$

e per coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 7+\rho & 12 & -6 \\ 12 & -13+\rho & 6 \\ -6 & 6 & 6+\rho \end{vmatrix} = \rho^2 - 343\rho + 2058 = (\rho-7)(\rho-14)(\rho+21);$$

dunque la quadrica è un iperboloide equilatero; che, riferito ai proprii assi, ha l'equazione

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = \mp 12.$$

Prendendo il segno +, si ha un iperboloide a una falda, di semiassi trasversi $\sqrt{12}$, $\sqrt{6}$ e non trasverso 2. Prendendo il segno —, si ha un iperboloide a due falde, di semiasse trasverso 2 e non trasversi $\sqrt{12}$, $\sqrt{6}$.

In ogni caso le direzioni degli assi sono

$$(19,\ 32,\ -6),\quad (8,\ 138,\ -39),\quad (24,\ 29,\ 2).$$

I piani ciclici son paralleli ai due $y \mp 2z = 0$, condotti pel maggiore

dei due assi trasversi nel 1° caso, e nel 2° per l'asse non trasverso più lungo.

I piani che producono nell'iperboloide iperboli equilatere sono perpendicolari alle rette del cono asintoto

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0,$$

e inviluppano il cono

$$x^2 + \tfrac{1}{2} y^2 - \tfrac{1}{3} z^2 = 0.$$

4. $$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 4yz + 8zx = 8.$$

Si ha

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -20, \quad A = 20.8,$$

e per assi ortogonali

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 2+\rho & 3 & 4 \\ 3 & 3+\rho & 2 \\ 4 & 2 & 4+\rho \end{vmatrix} = \rho^3+9\rho^2-3\rho-20=(\rho+3)^3-30(\rho+3)+43.$$

La quadrica è un iperboloide a una falda riferito al centro, e non è di rotazione.

5. $10(x^2 + y^2 + z^2) + 2z(4x + 3y) - 2(14x + 13y + 17z) + 43 = 0.$

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 4 & -14 \\ 0 & 10 & 3 & -13 \\ 4 & 3 & 10 & -17 \\ -14 & -13 & -17 & 43 \end{vmatrix},$$

$$B = 750, \quad A_{14} = A_{24} = A_{34} = 750, \quad A = -750.$$

La quadrica ha il centro nel punto (1, 1, 1); e trasportando ivi l'origine, la sua equazione diviene

$$10(x^2 + y^2 + z^2) + 2z(4x + 3y) = 1.$$

Si ha per assi ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + 30\rho^2 + 275\rho + 750 = (\rho+5)(\rho+10)(\rho+15);$$

onde la quadrica è un ellissoide reale; e l'equazione riferita ai piani principali è

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = \tfrac{1}{5}.$$

Le lunghezze dei semiassi sono $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Le direzioni degli assi sono

$$(4,\ 3,\ -5),\quad (3,\ -4,\ 0),\quad (4,\ 3,\ 5).$$

I piani ciclici passano pel 2° asse, e bisecano i diedri dei due piani principali per esso.

6. Sia $$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

e i piani coordinati sieno tre facce di un tetraedro regolare, onde

$$\omega_{12} = \omega_{13} = \omega_{23} = \cos\frac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2},$$

$$\Omega = \tfrac{1}{2},\quad \Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = \tfrac{3}{4},\quad \Omega_{12} = \Omega_{13} = \Omega_{23} = 0.$$

L'equazione rappresenta un ellissoide reale, riferito a tre diametri coniugati di eguale lunghezza 2.

Si ha $$B = 1,\quad A = -1,$$

$$4\Delta(\rho) = 2\rho^3 + 9\rho^2 + 12\rho + 4 = 2(\rho + 2)^2(\rho + \tfrac{1}{2});$$

dunque l'ellissoide è rotondo; e riferito a tre piani principali, ha la equazione

$$2x^2 + 2y^2 + \tfrac{1}{2}z^2 = 1.$$

L'ellissoide è allungato, l'asse di rotazione è lungo $2\sqrt{2}$, e il raggio dell'equatore $\sqrt{2}$.

Le equazioni dell'asse di rotazione nelle primitive coordinate sono

$$x = y = z.$$

7. $$5x^2 - y^2 + z^2 + 6xz + 4xy + 2x + 4y + 6z = 8.$$

Si ha $B = 0$, $A = 16$, e per assi ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + 5\rho^2 - 14\rho = \rho(\rho + 7)(\rho - 2).$$

La quadrica è un paraboloide iperbolico.

I piani principali sono

$$19x + 4y + 9z + 9 = 0, \quad 32x + 3y - 18z + 72 = 0.$$

I termini a 2° grado formano il prodotto $(5x - y + z)(x + y + z)$.
L'equazione del paraboloide, riferito ai piani principali e al piano tangente nel vertice, è

$$7x^2 - 2y^2 = \frac{8}{\sqrt{14}} z.$$

8. $$(x + 1)^2 + (2y + 3z)^2 + (3x - z) = 0.$$

La quadrica è un paraboloide ellittico, in cui $x+1=0$, $2y+3z=0$ sono due piani diametrali coniugati, $3x - z = 0$ è il piano tangente coniugato al loro diametro comune, $(1, \frac{9}{2}, -3)$ il punto di contatto, $(0, 3, -2)$ la direzione dei diametri, e $A = -1$.
Per assi ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + 14\rho^2 + 49\rho = \rho(\rho + 7)^2;$$

e però il paraboloide è rotondo, e l'asse di rotazione è

$$(2x + 5 = 0, \quad 2y + 3z = \tfrac{3}{26}),$$

e il vertice

$$(-\tfrac{5}{2}, \ \tfrac{5349}{676}, \ -\tfrac{885}{169}).$$

L'equazione del paraboloide riferito all'asse e al vertice è

$$x^2 + y^2 = \tfrac{2}{49} z;$$

$\frac{2}{49}$ è il parametro principale della parabola meridiana.

9. $$x^2 + 2y^2 + 3yz - 2xy - 6x + 7y + 6z + 7 = 0.$$

Si ha

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 3 \\ -3 & \frac{7}{2} & 3 & 7 \end{vmatrix},$$

$$B = -\tfrac{9}{4}, \quad A_{14} = -\tfrac{9}{4}, \quad A_{24} = \tfrac{9}{2}, \quad A_{34} = -\tfrac{9}{4}, \quad A = 0.$$

La quadrica è un cono di vertice $(1, -2, 1)$; e trasportando ivi

l'origine, l'equazione diviene

$$x^2 + 2y^2 + 3yz - 2xy = 0.$$

Il cono contiene l'asse delle z, e però è reale.

Per coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + 3\rho^2 - \tfrac{5}{4}\rho - \tfrac{9}{4} = (\rho+1)^3 - \tfrac{17}{4}(\rho+1) + 1;$$

e le radici della $\Delta(\rho) = 0$ sono prossimamente

$$-3{,}170424\,; \quad 0{,}931938\,; \quad -0{,}761514.$$

10. $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz - 4zx - 2xy + 2x + 8y - 6z - 13 = 0.$

Si ha

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -3 & -13 \end{vmatrix},$$

$$B = 9, \quad A_{14} = 9, \quad A_{24} = -9, \quad A_{34} = 18, \quad A = -198.$$

La quadrica ha il centro nel punto (1, —1, 2), ed è un ellissoide reale.

Per coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + 10\rho^2 + 25\rho + 9.$$

11. $$yz + zx + xy - x - 2y - 3z + 2 + a = 0.$$

Annullando le derivate si determina il centro (2, 1, 0); e preso questo per origine, l'equazione diviene

$$yz + zx + xy + a = 0,$$

e però

$$B = \frac{1}{4}, \quad A = \frac{a}{4}.$$

La quadrica è un iperboloide, a una o due falde secondochè $a \gtrless 0$, ed è riferito a tre asintoti. È un cono reale se $a = 0$.

Se le coordinate sono ortogonali, la quadrica è equilatera; e poichè

$$\Delta(\rho) = \rho^3 - \tfrac{3}{4}\rho + \tfrac{1}{4} = (\rho - \tfrac{1}{2})^2 (\rho + 1),$$

la quadrica è anche rotonda, e l'asse di rotazione è $x = y = z$.

L'equazione riferita a questo asse e al centro è

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a,$$

e le lunghezze dei semiassi sono $\sqrt{2a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{a}$.

12. $$x^2 - 2y^2 + 3xz - 3yz + xy + 4z = 0.$$

Si ha

$$B = 0, \quad A = \tfrac{9}{4},$$

e per assi ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 - \rho^2 - \tfrac{27}{4}\rho = \rho\left(\rho - \tfrac{1}{2} - \sqrt{7}\right)\left(\rho - \tfrac{1}{2} + \sqrt{7}\right).$$

La quadrica è un paraboloide iperbolico. L'asse è

$$(x + 5y + 6z = 0, \quad 4x - 7y - 3z + 4 = 0),$$

e i piani principali

$$(2 \pm 4\sqrt{7})x - (17 \pm 7\sqrt{7})y - (15 \pm 3\sqrt{7})z + 4(1 \pm \sqrt{7}) = 0.$$

I termini a 2° grado formano il prodotto $(x + 2y + 3z)(x - y)$.

L'equazione del paraboloide, riferito ai piani principali e al piano tangente nel vertice, è

$$(\sqrt{7} - \tfrac{1}{2})x^2 - (\sqrt{7} + \tfrac{1}{2})y^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}z.$$

13. $$x^2 + y^2 + 9z^2 + 6yz - 6zx - 2xy + 2x - 4z = 0.$$

$B = 0$, $C = 0$, $A = 0$, e per assi ortogonali $\Delta(\rho) = \rho^3 + 11\rho^2$;

quindi la quadrica è un cilindro parabolico. E infatti l'equazione può scriversi

$$(x - y - 3z)^2 + 2(x - 2z) = 0.$$

Una generatrice è la retta dei piani $x - y - 3z = 0$, $x - 2z = 0$, il 2° dei quali è tangente. La traccia sul piano $z = 0$ è la parabola $(x - y)^2 + 2x = 0$.

14. $$x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 6yz - 2zx = a.$$

$B = 0$, $A = 0$, $\Delta(\rho) = \rho^3 + 8\rho^2 + 9\rho$ per coordinate ortogonali. La quadrica è un cilindro ellittico. Sul piano $z = 0$ la traccia è l'ellisse $x^2 + 3y^2 = a$, reale o immaginaria o ridotta a due rette secondochè $a \gtreqless 0$. Nel 1° caso il cilindro è reale, nel 2° immaginario, e nel 3° si scinde nei due piani immaginarii $x - z \pm (y - z)\sqrt{-3} = 0$ con la retta comune reale $x = y = z$.

15. $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4yz - 2zx - 4xy + 3x - 6y - 3z = 0.$

L'equazione rappresenta due piani paralleli reali

$$x - 2y - z = 0, \quad x - 2y - z + 3 = 0.$$

16. $$xy - 4xz - 9yz = x + y + (\tfrac{5}{12})^2,$$

$$B = 72, \quad A_{14} = -45, \quad A_{24} = 20, \quad A_{34} = -13, \quad A = 0.$$

La quadrica è un cono reale di vertice $(-\frac{5}{8}, \frac{5}{16}, -\frac{13}{72})$, e gli assi coordinati sono paralleli a tre generatrici.

In coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 - 98\rho + 72,$$

e il cono è equilatero.

Le radici della $\Delta(\rho) = 0$ sono prossimamente

$$9{,}509392080\,; \quad 0{,}738808882\,; \quad -10{,}248200962.$$

17. $$(x - 3y)^2 = 2z + 1.$$

Cilindro parabolico. Una generatrice è la retta nei piani $x - 3y = 0$, $2z + 1 = 0$, il 2° dei quali è tangente. Riferita a questi due piani ortogonali, l'equazione del cilindro diviene $2x^2 = y$.

18. $$y^2 - 10z^2 - 2xy + 20xz - 9yz = 2(x - y - z).$$

Si ha

$$B = A_{44} = 0, \quad A_{14} = 0, \quad A_{11} = 0,$$

dunque tutti i suddeterminanti di 3° ordine in A son nulli.

L'equazione rappresenta i due piani reali ad angolo

$$2x - y - z = 0, \quad y - 10z + 2 = 0.$$

In coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 - 9\rho^2 - \tfrac{525}{4}\rho.$$

19. $$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

Si ha

$$B = 2, \quad A_{14} = 0, \quad A_{24} = 2, \quad A_{34} = 2, \quad A = -4;$$

quindi la quadrica ha per centro (0, 1, 1), e non è rigata.

Inoltre, in coordinate ortogonali,

$$\Delta(\rho) = (\rho + 2)(\rho^2 + 3\rho + 1) = (\rho + 2)\left(\rho + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\rho + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right),$$

e però la quadrica è un ellissoide reale, la cui equazione riferita ai piani principali è

$$4x^2 + (3 + \sqrt{5})y^2 + (3 - \sqrt{5})z^2 = 4.$$

Se il termine noto fosse 6 invece di 2, muterebbe solo il segno di A, e si avrebbe un ellissoide immaginario.

20. $$2xy - xz + yz - 2x + 2y - 3z - 2 = 0.$$

Qui

$$B = -\tfrac{1}{2}, \quad A_{14} = \tfrac{3}{4}, \quad A_{24} = -\tfrac{3}{4}, \quad A_{34} = -\tfrac{1}{2}, \quad A = \tfrac{1}{4};$$

onde la quadrica ha per centro $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$, ed è un iperboloide a una falda.

Per assi ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 - \tfrac{3}{2}\rho - \tfrac{1}{2} = (\rho + 1)\left(\rho - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\rho - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right),$$

e però l'iperboloide è equilatero.

L'equazione riferita ai piani principali è

$$2x^2 - (1 + \sqrt{3})\,y^2 + (\sqrt{3} - 1)\,z^2 = 1.$$

21. $$y^2 - 4xy + 4x^2 - 6x + 3z = 0.$$

In coordinate ortogonali è $\Delta(\rho) = \rho^2(\rho + 5)$.

La quadrica è un cilindro parabolico.

22. $$x^2 + 6yz + 8xz - 4xy + 2x + 4y - 14z = 3.$$

$$B = -57, \quad A_{14} = -57, \quad A_{24} = -57, \quad A_{34} = 0, \quad A = 0.$$

La quadrica è un cono di vertice (1, 1, 0). Portando l'origine al vertice, l'equazione diviene

$$x^2 + 6yz + 8xz - 4xy = 0.$$

Il cono è reale, poichè contiene gli assi delle x e z. Per coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 + \rho^2 - 29\rho - 57.$$

23. $$4y^2 - 9x^2 + 2xy + 36x - 8y - 4z = 32.$$

$$B = 0, \quad A_{14} = 0, \quad A_{24} = 0, \quad A_{34} = -74, \quad A = 148.$$

La quadrica è un paraboloide iperbolico. Per coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 - 5\rho^2 - 37\rho = \rho\left(\rho + \frac{\sqrt{173}+5}{2}\right)\left(\rho - \frac{\sqrt{173}-5}{2}\right);$$

e l'equazione riferita ai piani principali e al vertice è

$$(\sqrt{137}+5)\,x^2 - (\sqrt{137}-5)\,y^2 = 8z.$$

24. $$xy + xz + yz = a^2.$$

La quadrica è un iperboloide riferito a tre asintoti; ed è a due falde, poichè $A = -\frac{a^2}{4}$. In coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho^3 - \tfrac{3}{4}\rho + \tfrac{1}{4} = (\rho + 1)\,(\rho - \tfrac{1}{2})^2;$$

quindi l'iperboloide è rotondo, e la sua equazione ridotta è

$$2x^2 - (y^2 + z^2) = 2a^2.$$

25. $$x^2 + y^2 + z^2 + 2k\,(xy + xz + yz) = a^2.$$

Per coordinate ortogonali

$$\Delta(\rho) = (\rho + 1)^3 - 3k^2(\rho + 1) + 2k^3 = (\rho + 1 - k)^2\,(\rho + 1 + 2k).$$

La quadrica è rotonda, e l'equazione ridotta è

$$(1-k)(x^2+y^2)+(1+2k)z^2=a^2.$$

Si ha un iperboloide a due falde per $k>1$, una coppia di piani paralleli reali per $k=1$, un ellissoide reale per $1>k>-\frac{1}{2}$ (e una sfera per $k=0$), un cilindro ellittico per $k=-\frac{1}{2}$, un iperboloide a una falda per $k<-\frac{1}{2}$, un cono reale equilatero per $k=\infty$.

26. $$2ayz-bx=0.$$

$B=0$, $A=\frac{1}{4}a^2b^2$, $\Delta(\rho)=\rho(\rho+a)(\rho-a)$ per assi ortogonali.

La quadrica è un paraboloide iperbolico equilatero, e l'equazione ridotta è

$$a(x^2-y^2)-6z=0.$$

27. $$x^2-yz=k.$$

Poichè $A=\frac{k}{4}$, per assi ortogonali, e

$$\Delta(\rho)=(\rho+1)(\rho+\tfrac{1}{2})(\rho-\tfrac{1}{2}),$$

la quadrica è un iperboloide ortogonale, a una falda se $k>0$, a due se $k<0$, ridotto a un cono se $k=0$.

L'equazione riferita ai piani principali è

$$2x^2+y^2-z^2=2k.$$

28. $$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)=1.$$

In assi ortogonali

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} a+\rho & c & b \\ c & b+\rho & a \\ b & a & c+\rho \end{vmatrix}=(\rho+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b+\rho & a \\ 1 & a & c+\rho \end{vmatrix}$$

$$=(\rho+a+b+c)\left\{\rho^2-(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\right\}.$$

L'equazione riferita ai piani principali è

$$(a+b+c)x^2+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}\,(y^2-z^2)=1.$$

La quadrica può essere un iperboloide a una o due falde, un cilindro iperbolico, una coppia di piani paralleli.

29. $$z = f(x, y, 0; 1).$$

In assi ortogonali

$$\Delta(\rho) = \rho\left\{\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\,\rho + (a_{11}\,a_{22} - a^2_{12})\right\}.$$

La quadrica è un paraboloide ellittico o iperbolico, o un cilindro parabolico, secondochè $a_{11}a_{22} - a^2_{12} \gtreqless 0$.

30. $$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z = 5.$$

La quadrica ha infiniti centri sulla retta

$$x = z - y = \tfrac{1}{2},$$

ed è un cilindro iperbolico. L'equazione può scriversi

$$(x + y - z)\,(x - y + z + 1) = 5.$$

31. $$x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz = r^2.$$

Se l'asse delle z è perpendicolare agli altri due, si ha un ellissoide in cui quei due piani sono ciclici.

32. L'equazione del cono circoscritto alla quadrica $f(x) = 0$, lungo la conica che la quadrica ha nel piano u, è

$$f(x)\,.\,F(u) - A(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4)^2 = 0.$$

Questa è anche l'equazione della conica di contatto del cono circoscritto dal punto x.

33. Formare l'equazione che determina i punti di contatto dei piani tangenti condotti a una data quadrica per una retta data mediante le sue coordinate. Problema duale.

34. Due terne di rette coniugate rispetto a una quadrica ed uscenti da uno stesso punto, giacciono sopra un cono quadrico. Su questo cono esistono ∞ altre terne cosiffatte (Hesse).

Caso che le rette siano diametri, e in particolare gli assi.

35. Due terne di piani coniugati rispetto a una quadrica e passanti per un punto, sono tangenti a uno stesso cono quadrico. Esistono ∞ terne di piani coniugati tangenti a questo cono.

Caso dei piani diametrali coniugati.

36. L'equazione

$$a(u_1x_1+\ldots)^2+b(v_1x_1+\ldots)^2+c(w_1x_1+\ldots)^2+(t_1x_1+\ldots)^2=0$$

rappresenta una quadrica, rispetto a cui il tetraedro *uvwt* è autoconiugato. E viceversa (PLÜCKER, *Journ. Crelle*, V, p. 19).

37. Se due tetraedri sono autoconiugati rispetto a una quadrica, ogni quadrica che passi per sette degli otto vertici passa pel rimanente. E ogni quadrica che tocca sette delle otto facce tocca la rimanente (HESSE, *Crelle*, XX).

38. L'equazione della polare reciproca di una quadrica $\varphi(x)=0$ rispetto alla quadrica $f(x)=0$ è

$$F\left\{\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \varphi_4(x)\right\}=0.$$

39. Trovare l'equazione del cono che proietta una data conica da un dato punto.

Se il punto è l'origine, e la conica è data come intersezione della quadrica $f(x)=0$ col piano u, sia $x(x_1, x_2, x_3, 1)$ un punto del cono e $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3, 1)$ quello ove la generatrice per x seca la conica: allora abbiamo le due equazioni

$$f(\rho x_1,\ \rho x_2,\ \rho x_3,\ 1)=0,\quad \rho(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)+u_4=0\,;$$

ed eliminandone ρ, otteniamo l'equazione del cono

$$u_4^2 f(x_1, x_2, x_3, 1)-u_4(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)(a_{14}x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3)$$
$$+a_{44}(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2=0.$$

40. Trovare l'equazione del cono *supplementare* di un dato cono quadrico, cioè del cono che è il luogo delle perpendicolari dal vertice ai piani tangenti del primo cono, e anche l'inviluppo dei piani perpendicolari dal vertice alle generatrici del primo.

Sia il vertice comune l'origine, e gli assi ortogonali: allora, se il cono dato è $f(x_1, x_2, x_3, 0)=0$, il supplementare sarà, come inviluppo $f(u_1, u_2, u_3, 0)=0$, e come luogo $G(x_1, x_2, x_3)=0$.

41. Due tetraedri coniugati rispetto a una quadrica non sono omologici; ma le quattro rette che uniscono i vertici omologhi appartengono a un iperboloide. Anche le quattro rette comuni alle facce omologhe appartengono a un iperboloide (CHASLES, *Ann. de Gergonne*, XIX).

Caso di un tetraedro iscritto e del coniugato circoscritto (BOBILLIER, ib., XVIII, MOEBIUS, *Baryc. Calc.*).

42. Fra le varie dimostrazioni della realtà delle radici dell'equazione $\Delta(\rho)=0$, accenniamo la seguente del CAUCHY:

Scriviamo la [4] § 27 così:

$$\Delta(\rho)=(a_{11}+\rho)\left\{(a_{22}+\rho)\,(a_{33}+\rho)-a^2_{23}\right\}$$
$$-a^2_{31}(a_{22}+\rho)-a^2_{12}(a_{33}+\rho)+2a_{12}a_{23}a_{31}=0.$$

Ora, posto $a_{22}\geqq a_{33}$, le radici α, β della equazione

$$(a_{22}+\rho)\,(a_{33}+\rho)-a^2_{23}=0$$

sono reali, ed una è minore di $-a_{23}$, l'altra maggiore di $-a_{33}$; poichè per $\rho=-\infty$, $-a_{22}$, $-a_{33}$, $+\infty$, il primo membro prende i segni $+$, $-$, $-$, $+$, onde una radice cade fra $-\infty$ e $-a_{33}$, l'altra fra $-a_{22}$ e $+\infty$.

Ciò posto, se $\alpha<\beta$, abbiamo

$$\Delta(-\infty)=-,$$
$$\Delta(\alpha)=-a^2_{12}(a_{33}+\alpha)-a^2_{31}(a_{22}+\alpha)+2a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$=\left\{a_{12}\sqrt{-a_{33}-\alpha}\pm a_{31}\sqrt{-a_{22}-\alpha}\right\}^2=+,$$
$$\Delta(\beta)=-a^2_{12}(a_{33}+\beta)-a^2_{31}(a_{22}+\beta)+2a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$=-\left\{a_{12}\sqrt{a_{33}+\beta}\pm a_{31}\sqrt{a_{22}+\beta}\right\}^2=-,$$
$$\Delta(+\infty)=+;$$

dunque una radice della $\Delta(\rho)=0$ cade fra $-\infty$ e α, una fra α e β, una fra β e $+\infty$; e però le tre radici sono reali e, in generale, distinte.

Per esser eguali due radici, è necessario che sia $\alpha=\beta$, e il loro valore esprime la radice doppia.

43. Un altro procedimento per trovare le condizioni di rotondità di una quadrica è il seguente:

Per assi ortogonali, la quadrica è rotonda se è possibile trasformare $f(x_1, x_2, x_3, 0)$ in $\lambda(X_1^2 + X_2^2) + \mu X_3^2$; e poichè $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ si trasforma in $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, ne segue che $f(x_1, x_2, x_3, 0) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ è un quadrato, cioè $(\mu - \lambda)X_3^2$; onde le condizioni (tre indipendenti)

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0, \ldots, (a_{11} - \lambda)a_{23} - a_{31}a_{12} = 0, \ldots$$

che si riducono poi a quelle del § 29.

44. L'annullarsi del discriminante A di $f(x)$ è la condizione perchè questa forma quaternaria, mediante una conveniente sostituzione lineare, si riduca ad esser ternaria, cioè a contenere una variabile di meno.

Se son nulli i suddeterminanti di 3° ordine in A, allora $f(x)$ si può ridurre a binaria.

Se son nulli i suddeterminanti di 2° ordine in A, la $f(x)$ si riduce al quadrato di una variabile.

45. Per un dato punto di un paraboloide ellittico (o iperbolico) è costante la somma (o la differenza) dei parametri di due qualunque sezioni diametrali coniugate.

46. Ogni sezione piana d'un paraboloide rotondo si proietta in un circolo sul piano tangente al vertice.

47. Dato un tetraedro e il suo coniugato rispetto a una quadrica, ciascuna faccia dell'un tetraedro seca quei tre spigoli dell'altro che escono dal vertice omologo alla faccia, in tre punti: i dodici punti così ottenuti stanno su una quadrica. E dualmente (CHASLES, *Ap. hist.*, nota 32).

48. Determinare le coniche intersezioni delle quadriche

$$4x^2 + y^2 - 4z^2 + 1 = 0, \quad xy + xz + yz = a$$

col piano $x + y + z = 0$.

49. Quattro rette date sghembe ammettono in generale due rette secanti comuni, reali o immaginarie. Se ne ammettono una, ciascuna delle quattro rette tocca l'iperboloide che contiene le altre tre. Se ne ammettono più di due, ne ammettono infinite, e sono generatrici di un iperboloide.

50. Se un solo dei coefficienti a_{12}, a_{13}, a_{23} in $f(x)$ è nullo, il discriminante della equazione $\Delta(\rho)=0$ non è nullo, e però la quadrica non è rotonda.

Se $a_{12}=a_{13}=0$, il discriminante di $\Delta(\rho)=0$ si riduce a

$$\left\{(a_{22}-a_{33})^2+4a^2_{23}\right\}\left\{(a_{11}-a_{22})(a_{11}-a_{33})-a^2_{23}\right\}^2,$$

e però si annulla solo quando $(a_{11}-a_{22})(a_{11}-a_{33})=a^2_{23}$.

Se poi $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$, il discriminante diviene

$$(a_{11}-a_{22})^2(a_{22}-a_{33})^2(a_{33}-a_{11})^2,$$

e si annulla quando due dei coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33} sono eguali.

51. Il discriminante di $\Theta(\rho)=0$ può decomporsi in quadrati anche come segue:

$$3u_1^2(u_2G_{31}-u_3G_{12})^2+\ldots+\frac{1}{u_1^2}\left\{(u_1G_{23}-u_2G_{31})u_3^2+(u_1G_{23}-u_3G_{12})u_2^2\right\}^2+\ldots;$$

questa somma va divisa per $u_1^2u_2^2+u_2^2u_3^2+u_3^2u_1^2$.

52. Il luogo dei centri delle sezioni prodotte in una quadrica dai piani di una stella o di un fascio è rispettivamente un piano o una retta.

53. Fra i punti di un piano $u_1x_1+\ldots+u_4=0$, il centro della sezione prodotta nella quadrica $f(x_1, x_2, x_3, 1)=0$ dal piano è quello che rende massima o minima la funzione $f(x_1, x_2, x_3, 1)$.

54. Per l'iperboloide a una falda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, come equazioni delle rette dei due sistemi si possono assumere le seguenti (oltre quelle del § 52):

$$\frac{x}{a}=\frac{q}{b}\cdot\frac{z}{c}\mp\frac{p}{a}, \quad \frac{y}{b}=\frac{p}{a}\cdot\frac{z}{c}\pm\frac{q}{b}$$

$(p, q, 0)$ essendo un punto dell'ellisse principale; od anche

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\theta\mp\operatorname{sen}\theta, \quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\operatorname{sen}\theta\pm\cos\theta;$$

variando θ; od anche, variando λ,

$$y=\lambda x+\sqrt{a^2\lambda+b^2}, \quad \pm\frac{z}{c}=\frac{x\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}}{ab}+\frac{a\lambda}{b}.$$

I segni superiori corrispondono a un sistema, gl'inferiori all'altro.

Il piano per due rette di sistema diverso è

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta')+\frac{y}{b}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta+\theta')=\frac{z}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta-\theta').$$

Le proiezioni ortogonali delle rette di un iperboloide rigato sui piani principali sono le tangenti alle sezioni principali.

55. Se $(u_1x_1+\ldots)+\lambda(v_1x_1+\ldots)=0$, $(w_1x_1+\ldots)+\lambda'(t_1x_1+\ldots)=0$ variando λ e λ' rappresentano due fasci proiettivi di piani, sicchè fra λ e λ' passa una relazione bilineare

$$a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0;$$

eliminando λ, λ' dalle tre equazioni, si ha l'equazione dell'iperboloide generato dai due fasci:

$$a(u_1x_1+\ldots)(w_1x_1+\ldots)-b(u_1x_1+\ldots)(t_1x_1+\ldots)$$
$$-c(v_1x_1+\ldots)(w_1x_1+\ldots)+d(v_1x_1+\ldots)(t_1x_1+\ldots)=0.$$

Si può supporre ridotta la relazione a $\lambda=\lambda'$, ed allora si trova

$$(u_1x_1+\ldots)(t_1x_1+\ldots)-(v_1x_1+\ldots)(w_1x_1+\ldots)=0.$$

56. L'equazione dell'iperboloide individuato dalle tre rette di coordinate $(r_{12},\ldots)$, $(s_{12},\ldots)$, $(t_{12},\ldots)$, è

$$(r_{23}s_{34}t_{42})x_1^2+\ldots-[(r_{13}s_{34}t_{42})+(r_{14}s_{43}t_{32})]\,x_1x_2+\ldots=0,$$

ove $$(r_{23}s_{34}t_{42})=\begin{vmatrix} r_{23} & s_{23} & t_{23} \\ r_{34} & s_{34} & t_{34} \\ r_{42} & s_{42} & t_{42} \end{vmatrix},\ \text{ecc.}$$

57. Le equazioni delle rette sul paraboloide iperbolico sono

$$z=\pm\frac{p}{\sqrt{ab}}y+q,\quad x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot y+p,$$

dove $(p, q, 0)$ è un punto della parabola principale $x^2=2az$.

58. I punti dell'iperboloide rigato, per cui passano due generatrici ad angolo retto, sono anche sulla sfera luogo dei vertici dei triedri trirettangoli circoscritti all'iperboloide. Caso del paraboloide.

59. Le tre diagonali di ogni esagono iperboloidico concorrono in un

punto. Questo è in linea retta col punto comune ai piani degli angoli di posto dispari e col punto comune ai piani degli angoli di posto pari. E dualmente.

60. Il luogo del punto d'incontro dei piani tangenti negli estremi di tre semidiametri coniugati di un ellissoide, è un ellissoide concentrico.

61. L'inviluppo del piano per gli estremi di tre diametri coniugati qualunque di un ellissoide è un altro ellissoide concentrico, il quale tocca il piano nel centro della sezione da questo prodotta nel primo ellissoide.

62. Un iperboloide rigato è il luogo di un punto tale, che il prodotto delle sue distanze da tre facce concorrenti di un parallelepipedo eguaglia il prodotto delle distanze dalle altre tre facce.

63. Se tre punti assegnati di una retta mobile non escono da tre piani fissi, ogni altro punto assegnato della retta descrive una quadrica (Dupin, *Journ. de l'École polytecn.*, XIV).

64. La somma dei quadrati delle distanze dei due fuochi di una sezione principale della quadrica dagli estremi di tre diametri coniugati, è costante (Brassine, *Journ. de Math.*, VII).

65. È costante la somma delle aree di tre sezioni circolari parallele condotte per gli estremi di tre semidiametri coniugati (Brassine, l. c.).

66. Per determinare i piani ciclici centrali, si può procedere altrimenti come segue:

Sia $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ un ellissoide, e r il raggio di una sezione circolare centrale: questa starà sulla sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$, e quindi i suoi punti verificheranno anche la

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)=0;$$

equazione di un cono, il quale intanto deve contenere tutti i raggi del detto circolo, e però si deve scindere nel piano del circolo e quindi in un altro piano, che pure sarà ciclico. Or la condizione perchè

tale scissione avvenga è che nell'equazione del cono manchi uno dei quadrati; e così abbiamo

$$r^2 = a^2, \quad \frac{y}{z} = \pm \frac{b}{c} \sqrt{-\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}},$$

ecc., di accordo col § 51.

67. Consideriamo un cono equilatero, e il piano perpendicolare a una sua generatrice in un dato punto. Questo è il *punto delle altezze* in tutti i triangoli determinati sul piano dalle terne di generatrici mutuamente perpendicolari.

68. Date tre rette di un cono equilatero, conduciamo per ciascuna il piano perpendicolare al piano delle altre due: la retta comune a questi tre piani è una quarta retta del cono. E ognuno degli ∞ coni per queste quattro rette è equilatero.

69. Il volume di un parallelepipedo rettangolo, che sia ad un tempo iscritto e circoscritto a un iperboloide equilatero (§§ 52 e 57), è costante.

70. Le quattro altezze di un tetraedro sono, in generale, rette di un sistema su un iperboloide equilatero. Le perpendicolari alle facce nei rispettivi *punti delle altezze* sono quattro rette dell'altro sistema sull'iperboloide. I piani condotti pei punti di mezzo degli spigoli perpendicolarmente agli spigoli opposti concorrono nel centro dell'iperboloide. Il centro è punto medio fra il baricentro del tetraedro e il centro della sfera circoscritta.

Se due delle quattro altezze si secano, anche le altre due si secheranno: ciò avviene quando il tetraedro ha una coppia di spigoli opposti ortogonali.

Se il tetraedro ha due coppie di spigoli opposti ortogonali, tale sarà anche la terza; allora, le altezze concorrono in un punto, e ogni cono per esse è equilatero.

71. Perchè tre rette individuino un iperboloide equilatero, la condizione è che esse siano tre altezze di un tetraedro.

72. Per ogni punto passano sei normali di una quadrica: esse stanno su un cono quadrico equilatero, al quale appartengono il diametro pel punto, le parallele agli assi della quadrica, la perpendicolare al piano polare del punto, e gli assi del cono circoscritto dal punto (Chasles, *Corresp. de Quételet*, XI, 1839).

Caso del paraboloide, del punto sulla quadrica, ecc.

73. Il luogo dei vertici dei coni equilateri circoscritti a una quadrica è un'altra quadrica concentrica.

74. Un cono ortogonale può venir generato in ∞ modi dalle rette comuni ai piani corrispondenti di due fasci *eguali*, i cui assi s'incontrino. Viceversa.

75. Il piano di un angolo retto, il cui vertice sia fisso, e i cui lati si muovano in due piani fissi pel vertice, inviluppa un cono ortogonale. Viceversa.

76. Un diedro retto si mova in modo, che lo spigolo roti in un piano fisso intorno a un punto fisso, e una faccia roti intorno a una retta per questo punto: l'altra faccia invilupperà un cono ortogonale. Viceversa.

77. Il luogo dei punti, le cui distanze da due rette ad angolo serbino un dato rapporto costante, è un cono ortogonale. Le due rette sono coniugate rispetto al cono.

Per ogni cono ortogonale esistono ∞ coppie di rette cosiffatte, poste in un certo piano, e corrispondenti ai singoli valori che si attribuiscono al rapporto.

78. Un iperboloide ortogonale può venir generato in ∞ modi dalle rette comuni ai piani omologhi di due fasci *eguali*, i cui assi siano sghembi.

79. Il luogo dei punti, le cui distanze da due rette fisse sghembe hanno un rapporto costante, è un iperboloide ortogonale, rispetto al quale le due rette date sono coniugate.

Per ogni iperboloide ortogonale esistono ∞ coppie di rette cosiffatte, poste su un certo paraboloide e corrispondenti ai singoli valori che si attribuiscono al rapporto (Chasles, *Journ. de Math.*, I).

Per punti equidistanti si ha un paraboloide iperbolico.

80. Sotto la condizione $C=0$ la quadrica può essere: un cono cui si possa circoscrivere uno e quindi infiniti triedri trirettangoli, un iperboloide il cui cono asintoto abbia questa proprietà, o un cilindro parabolico.

81. Se l'inversa di una radice della equazione $\Delta(\rho)=0$ è la somma delle inverse delle altre due, ossia se

$$C^3 - 4BCD + 8\Omega B^2 = 0;$$

allora nell'ellissoide si ha $a^2 = b^2 + c^2$ e i semidiametri diretti agli ombelichi son lunghi $c\sqrt{2}$; nell'iperboloide a una falda si ha $a^2 = b^2 + c^2$; nell'iperboloide a due falde si ha $a^2 = b^2 - c^2$, e i semidiametri suddetti son lunghi $a\sqrt{2}$.

82. Un piano, che si mova passando per un punto fisso dello spigolo di un diedro fisso, e facendo con le facce angoli coi seni in rapporto costante, inviluppa un cono nelle condizioni dell'esempio 81.

83. I seni degli angoli delle due rette focali di un cono quadrico con un piano tangente qualunque dànno un prodotto costante.

84. In ogni cono quadrico, i due piani tangenti per una retta, e i due piani che uniscono la retta alle focali, hanno gli stessi piani bisettori.

In particolare: i piani tangente e normale lungo una retta del cono bisecano gli angoli dei due piani che uniscono la retta alle due focali (Magnus, *Ann. de Math.*, XVI).

85. La somma degli angoli di una retta qualunque del cono con le due focali è costante (Magnus, l. c.).

86. I piani per una focale e per due rette del cono sono simmetrici rispetto al piano per la focale e per la polare del piano delle due rette rispetto al cono.

87. Due rette del cono, e le due tracce del loro piano sui piani ciclici pel vertice, hanno le stesse bisettrici.

In particolare: un piano tangente al cono lungo una generatrice seca i due piani ciclici pel vertice in due rette simmetriche rispetto alla generatrice.

88. La somma degli angoli di un piano tangente qualunque del cono con due piani ciclici antiparalleli è costante.

89. Il prodotto dei seni degli angoli di una retta qualunque del cono con due piani ciclici antiparalleli è costante.

90. Le rette focali di un cono sono perpendicolari ai piani ciclici del cono supplementare, e viceversa.

91. Dato un cono rotondo e una sfera iscritta, ogni piano tangente alla sfera seca il cono in una conica, che ha un fuoco nel punto di contatto.

92. La distanza di un punto di una quadrica da un fuoco serba un rapporto costante alla distanza del punto dalla direttrice corrispondente a quel fuoco, purchè questa distanza venga contata parallelamente a un piano ciclico. Questo rapporto costante dicesi *modulo* della quadrica (MAC-CULLAGH).

93. La quadrica polare reciproca di una quadrica data, rispetto a una sfera che abbia il centro in un suo fuoco, è rotonda.

94. Gli asintoti delle coniche focali di una quadrica sono perpendicolari ai piani ciclici della quadrica polare-reciproca rispetto a una sfera concentrica.

95. I coni circoscritti da un punto a una quadrica, alle sue confocali ed alle loro coniche focali, hanno gli stessi assi e le stesse rette focali, e si tagliano ortogonalmente.

Caso che il punto appartenga alla quadrica. Se questa è un iperboloide rigato, le dette focali sono rette dell'iperboloide (CHASLES, *Journ. de Math.*, XI).

Caso che il punto appartenga a una conica focale.

96. Se due punti P', Q' son fissi sull'iperbole focale e P varia sull'ellisse focale, è costante $PP' \pm PQ'$ secondochè P' e Q' sono su diversi rami dell'iperbole o sullo stesso.

Se P' è fisso sull'iperbole e P, Q sono variabili e diametralmente opposti sull'ellisse, è costante $PP' + QP'$.

Se P, Q son fissi sull'ellisse e P' varia sull'iperbole, è costante $PP' - QP'$ per un ramo, e cangia di segno da un ramo all'altro.

Se P è fisso sull'ellisse e P', Q' sono variabili e diametralmente opposti sull'iperbole, è costante $PP' - PQ'$.

97. In un paraboloide, se P, Q sono fissi su una parabola focale e P' varia sull'altra, è costante $PP' - QP'$.

98. Le proiezioni delle coniche focali su un piano sono confocali con la traccia del cilindro delle rette tangenti alla quadrica e perpendicolari al piano.

99. Le terne di piani perpendicolari e coniugati, che passano pei singoli punti dello spazio, secano ciascun piano principale in un triangolo autoconiugato rispetto alla conica focale ivi contenuta.

100. È costante il prodotto delle distanze di un piano tangente alla quadrica da quei due punti di una focale in cui le tangenti son parallele al piano.

Cenni storici (*).

§ 65. Delle superficie di 2° grado gli antichi geometri conoscevano soltanto la *sfera*, il *cilindro*, il *cono*, lo *sferoide* (il nostro ellissoide di rotazione) *allungato* o *schiacciato*, il *conoide iperbolico* o *parabolico* (cioè l'iperboloide di rotazione a due falde, e il paraboloide di rotazione); come si riscontra in Archimede. Il *cilindroide* (cioè il nostro iperboloide di rotazione a una falda, cfr. § 52) fu considerato da Wren (*Philosophical Transactions*, 1669).

Eulero (Appendice all'*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748, V), estendendo il metodo analitico di Cartesio dal piano allo spazio, ravvisò nell'equazione di 2° grado a tre variabili cinque specie di superficie, che chiamò: 1° *elliptoide*, 2° *superficie ellittico-iperbolica*, 3° *iperbolico-iperbolica*, 4° *ellittico-parabolica*, 5° *parabolico-iperbolica*. Esse corrispondono rispettivamente ai nostri: ellissoide, iperboloide a una o due falde, paraboloide ellittico o iperbolico.

I nomi di *ellissoide*, *iperboloide*, *paraboloide* furono messi in uso nella scuola Politecnica (Biot, Lacroix). La denominazione di *quadrica* è di questi ultimi tempi e d'origine inglese (*quadric* in Cayley, Salmon,...).

Monge e Hachette, con una più profonda e compiuta discussione dell'equazione di 2° grado, scoprirono parecchie delle principali proprietà delle quadriche. Segnaliamo la doppia generazione di qualunque iperboloide a una falda e del paraboloide iperbolico mediante il movimento di una retta (Monge, *Journal de l'École Polytechnique*,

---

(*) Cfr. Chasles (*Aperçu historique* ecc., e *Rapport sur les progrès de la Géométrie en France*), Poncelet (*Traité des propriétés projectives*, ecc.), Baltzer (*Analytische Geometrie*), Leroy (*Analyse appliquée à la Géométrie à trois dimensions*), ecc.

fasc. 1°, pag. 14); più la doppia generazione di tutte le quadriche, eccetto il paraboloide iperbolico, mediante un circolo mobile (cfr. HACHETTE, *Éléments de Géométrie à trois dimensions*), proprietà che prima era nota solo pel cono (APOLLONIO, *Conica*, I, 5; DESARGUES) e per l'ellissoide (D'ALEMBERT, *Opuscules mathématiques*, VII, pag. 163). Infine stabilirono l'esistenza dei tre piani principali per l'ellissoide e gli iperboloidi (*Journ. Éc. pol.*, fasc. 11°), e l'equazione di 3° grado da cui quei piani dipendono (nell'ipotesi di coordinate ortogonali).

MONGE trovò anche la sfera, luogo dei vertici dei triedri trirettangoli circoscritti a una quadrica.

I discepoli di MONGE continuarono la ricerca delle proprietà, sia di una quadrica combinata con punti o rette o piani (alle quali noi ci siamo qui limitati), sia di due o più quadriche.

LIVET (*Journ. Éc. pol.*, fasc. 13°, 1806) provò il teorema sulla somma costante dei quadrati di tre diametri coniugati dell'ellissoide, e quello sul volume costante del parallelepipedo costruito con tre semidiametri coniugati.

BINET (fasc. 16°, 1813) aggiunse il teorema sulla somma costante dei quadrati delle aree dei triangoli costruiti su tre diametri coniugati presi a due a due. Egli inoltre si servì di un piano diametrale per semplificare l'equazione della superficie, adoperò pel primo nella ipotesi di assi obliqui l'equazione di 3° grado che determina i piani principali, e fece conoscere l'esistenza dei parallelepipedi iscritti e circoscritti insieme a un iperboloide a una falda (cfr. § 52).

Quanto ai teoremi relativi al paraboloide esposti in fine del § 49, essi sono assai più recenti, e son dovuti al signor ALLMAN (*Quarterly Journ. of Math.*, XIII, 1873).

BRIANCHON (*Journ. Éc. pol.*, fasc. 13°) mostrò che la polare-reciproca di una quadrica rispetto a un'altra è pure una quadrica.

PETIT applicò la regola dei segni di Cartesio alla suddetta equazione di 3° grado per classificare le quadriche (*Correspondance sur l'Éc. pol.* diretta da HACHETTE, II).

PONCELET (*Propr. proj.*, 619) dimostrò l'esistenza dei piani ciclici e principali mercè la considerazione del circolo immaginario all'infinito (cfr. § 37).

CHASLES (*Corr. Éc. pol.*, pag. 302) diede le formole da noi distinte con [11] e [12] § 51, il teorema sulla costante somma dei quadrati delle proiezioni di tre diametri coniugati su una retta o un piano, quello sulla somma costante dei quadrati inversi di tre diametri perpendicolari, e parecchi altri. Lo stesso (loc. cit., XI, pag. 50, 1839, e *Ap. hist.*, nota 9) avvertì la proiettività fra le punteggiate

che le rette di un sistema in una quadrica rigata segnano su due rette dell'altro, e i fasci di piani per due rette di un sistema e per tutte quelle dell'altro.

La considerazione di una quadrica ridotta a una conica inviluppo (§ 11) fu sviluppata da HESSE, che la chiamò *Grenzfläche*, cioè superficie limite (*Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, XV).

Il circolo immaginario all'infinito fu chiamato *assoluto* dal CAYLEY (*A sixth Memoir upon quantics*, *Phil. Trans.*, t. 149), e preso a base delle relazioni metriche nello spazio.

Le forme *canoniche* (§ 41) e la *legge d'inerzia* (nota a pag. 108) furon così denominate dal SYLVESTER.

I paraboloidi equilateri furono introdotti e denominati da STEINER (*Syst. Entw.*, 52, II). Del cono e degli iperboloidi equilateri si occuparono JOACHIMSTHAL (*Journ. Crelle*, t. 56), HESSE (l. c., XVI), VOGT (*Journ. Crelle*, t. 86), SCHRÖTER (*Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung* ecc.).

Il cono ortogonale fu studiato da BINET (*Corr. Éc. pol.*, II), da STEINER (*Journ. Crelle*, t. 2, pag. 61, e *Syst. Entw.*). L'iperboloide ortogonale fu studiato da CHASLES (*Journ. de Math.*, I), da SCHÖNFLIES (*Zeitschrift Schlömilch*, t. 23), da SCHRÖTER (*Journ. Crelle*, t. 85 e *Oberflächen*), che gli diede il nome di *ortogonale*.

MAGNUS scoprì le rette focali del cono quadrico (*Annales de Gergonne*, t. 16).

Dei fuochi dei meridiani delle quadriche rotonde si occupò DUPIN (*Applications de Géométrie*, 18), dandone notevoli proprietà.

Le due coniche (reali) che abbiamo chiamate *focali* furono trovate da DUPIN (*Corr. Éc. pol.*, II, pag. 424), ciascuna come luogo dei vertici dei coni rotondi circoscritti all'altra, ed anche come luogo dei *fuochi* dell'altra (i suoi punti avendo rispetto all'altra le proprietà dei due fuochi di questa). BINET e AMPÈRE le riguardarono da altri punti di vista; QUÉTELET, DEMONFERRAND e MORTON le studiarono dal primo punto di vista del DUPIN.

STEINER (*Journ. Crelle*, t. 1) e BOBILLIER (*Bulletin de Férussac*, VII) le considerarono come costituenti il luogo dei vertici dei coni rotondi circoscritti a una quadrica. CHASLES (*Ap. hist.*, nota 31) assegnò molte proprietà di queste coniche (che chiamò anche *eccentriche*) rispetto alla quadrica, e mise in luce l'analogia di tali proprietà con quelle dei fuochi delle coniche. Notevoli sono pure le memorie di CHASLES sulle linee e superficie di 2° grado (*Nouv. Mém. de Bruxelles*, V e VI).

MAC-CULLAGH (*Proceedings of the R. Irish Academy*, II), aggiunse il teorema contenuto nel nostro esercizio 92.

Il teorema in fine del § 62 fu posteriormente trovato da SALMON (cfr. *Analytic Geometry of 3 dimensions*) e ritrovato da AMIOT (*Journ. de Math.*, VIII).

La equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\rho \,.\, a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n} \,.\, a_{nn}+\rho \end{vmatrix} = 0$$

fu incontrata da LAPLACE (*Mém. de l'Acad. de Paris*, 1772) nelle sue ricerche sul moto dei pianeti. Per $n=3$ si ottiene l'equazione che determina i piani principali di una quadrica, riferita a coordinate ortogonali. La realtà delle radici di questa equazione fu dimostrata indirettamente da LAGRANGE (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773). Due dimostrazioni, estensibili ad n qualunque, furono date da CAUCHY (*Exercices de Math.*, IV; cfr. il nostro esercizio 42), altre da JACOBI (*Journ. Crelle*, t. 12), da SYLVESTER (*Philosophical Magazine*, II), da GRUNERT (*Archiv*, t. 29).

KUMMER riuscì primo a decomporre in una somma di quadrati il discriminante di questa equazione (*Journ. Crelle*, t. 26); poi BORCHARDT con l'aiuto dei determinanti vi riuscì per n qualunque (ib., t. 30). Altre decomposizioni in somme di quadrati per $n=3$ furono trovate da HESSE (*Vorlesungen*), BAUER (*Journ. Crelle*, 71), GEYSER (ib., 82). L'elegante procedimento da noi seguito (§ 28) è del SOURANDER (*Journ. de Math.*, 1879); e le somme di 13, 10, 7 quadrati da noi accennate sono rispettivamente quelle di BORCHARDT, BAUER, KUMMER. Il SOURANDER estende il suo procedimento anche ad n qualunque.

Il discriminante della equazione quadratica, che determina gli assi di una sezione piana della quadrica riferita a coordinate ortogonali, fu decomposto in somme di 5 a 10 quadrati da HESSE (*Journ. Crelle*, t. 60) mediante sostituzioni ortogonali; in una somma di due quadrati da HENRICI (ib., t. 64), di altri due o di tre quadrati da SOUILLART (ib., t. 65), di sei quadrati da BAUER (ib., t. 71, cfr. nostro esercizio 51), e di due altri quadrati dal SOURANDER (ib., t. 85), il quale ha anche data un'altra dimostrazione dei risultati di HESSE. Noi abbiamo esposta la decomposizione di HESSE in 6 o 5 quadrati, e quella del SOURANDER in due, attenendoci sempre a questo ultimo autore.

NOTA

sui sistemi di equazioni lineari omogenee (*).

1° Sia data una matrice di m orizzontali ed n verticali:

$$[1] \qquad \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\cdot & a_{mn} \end{matrix} \right\};$$

e supponiamo che si annullino tutti i determinanti di ordine $p+1$ di questa matrice, cioè tutti i determinanti formati dagli elementi comuni a $p+1$ orizzontali e $p+1$ verticali qualunque di essa; $p+1$ essendo non maggiore di m e n. Allora saran nulli anche tutti i determinanti di ordine $p+2$ della stessa matrice, visto che si possono sviluppare in funzioni lineari omogenee di quelli di ordine $p+1$. E similmente saran nulli tutti i determinanti di ordine $p+3$, e così via.

Indagheremo poi quali e quanti determinanti di ordine $p+1$ sia necessario e sufficiente supporre nulli, affinchè si annullino tutti.

2° Consideriamo n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Siano $y_1, \ldots, y_m$ m funzioni lineari omogenee di esse; e precisamente, poniamo

$$[2] \qquad \left\{ \begin{matrix} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{matrix} \right.$$

Supponiamo che siano nulli tutti i determinanti di ordine $p+1$ (e superiori) della matrice [1], ma che non sia nullo almeno uno dei determinanti di ordine p, p. e. che non sia nullo

$$[3] \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdot & \cdot & a_{pp} \end{vmatrix}.$$

Ora sia $s = 1, 2, \ldots, m-p$; e scriviamo il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1p} & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdot\cdot & a_{pp} & a_{pr} \\ a_{p+s,1} & \cdot\cdot & a_{p+s,p} & a_{p+s,r} \end{vmatrix}.$$

Questo è nullo per $r = 1, \ldots, p$, poichè allora ha l'ultima verticale identica a una delle precedenti; ed è nullo per $r = p+1, p+2, \ldots, n$, dietro l'ipotesi fatta. Dunque,

(*) Per ulteriore studio il lettore può consultare le mie *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari* (Atti dell'Accademia di Torino, vol. XII).

moltiplicando gli elementi dell'ultima verticale per x_r, prendendo successivamente $r = 1, 2, \ldots, n$, e poi sommando, avremo identicamente

$$[4] \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1p} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdot\cdot & a_{pp} & y_p \\ a_{p+s,1} & \cdot\cdot & a_{p+s,p} & y_{p+s} \end{vmatrix} = 0;$$

visto che il coefficiente di y_{p+s} è il determinante [3] che non è nullo.

Sviluppando secondo l'ultima verticale, da ultimo otterremo y_{p+s} espressa come funzione lineare omogenea delle $y_1, \ldots, y_p$. E ciò per $s = 1, \ldots, m - p$.

3° Non essendo nullo il determinante [3], io dico che, per ogni sistema di valori attribuiti a $x_{p+1}, \ldots, x_n$, esiste uno ed un sol sistema di valori di $x_1, \ldots, x_p$, i quali sono funzioni lineari omogenee di $x_{p+1}, \ldots, x_n$, e insieme coi valori attribuiti a queste soddisfanno le equazioni $y_1 = 0, \ldots, y_p = 0$. Infatti, in queste equazioni assumendo come incognite $x_1, \ldots, x_p$ e come termini noti

$$a_{1,p+1}\, x_{p+1} + \cdots + a_{1n}\, x_n, \ldots, \; a_{p,p+1}\, x_{p+1} + \cdots + a_{pn}\, x_n,$$

stantechè il determinante [3] dei coefficienti delle incognite non è nullo, esiste un sistema di valori delle incognite che soddisfa le dette equazioni; e questi valori sono funzioni lineari dei termini noti, e quindi di $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Or poichè le $y_{p+1}, \ldots, y_m$ sono funzioni lineari omogenee delle $y_1, \ldots, y_p$; ne segue che i valori di $x_1, \ldots, x_n$ che soddisfanno le equazioni $y_1 = 0, \ldots, y_p = 0$ soddisfanno anche le $y_{p+1} = 0, \ldots, y_m = 0$.

4° La dipendenza della equazione $y_{p+s} = 0$ dalle $y_1 = 0, \ldots, y_p = 0$ si può esprimere anche dicendo, che, per tutti i possibili valori di $x_{p+1}, \ldots, x_n$, è nullo il determinante

$$[5] \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1p} & a_{1,p+1}\, x_{p+1} + \cdots + a_{1n}\, x_n \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdot\cdot & a_{pp} & a_{p,p+1}\, x_{p+1} + \cdots + a_{pn}\, x_n \\ a_{p+s,1} & \cdot & a_{p+s,p} & a_{p+s,\,p+1}\, x_{p+1} + \cdots + a_{p+s,n}\, x_n \end{vmatrix},$$

e quindi devono annullarsi i singoli determinanti d'ordine $p + 1$ che fanno da coefficienti di $x_{p+1}, \ldots, x_p$, e che sono in numero di $n - p$.

E siccome s deve ricevere successivamente gli $m - p$ valori $1, \ldots, m - p$; così avremo in tutto da annullare $(n - p)(m - p)$ determinanti d'ordine $p + 1$.

Bisogna poi osservare che in ciascuno di questi determinanti figura un elemento che non figura negli altri; p. e. $a_{p+s,\,p+r}$ figura solo nel coefficiente di x_{p+r} nel determinante [5].

5° Riepilogando, possiamo enunciare il seguente teorema:

« Siano date m equazioni lineari omogenee con n incognite. Affinchè queste equa-
« zioni si riducano a p equazioni indipendenti, in generale sono necessarie e sufficienti
« $(n - p)(m - p)$ condizioni; le quali consistono nell'annullarsi di altrettanti deter-

« minanti di ordine $p+1$, estratti dalla matrice dei coefficienti delle incognite nelle « date equazioni.

« E precisamente, questi determinanti si possono dividere in $m-p$ gruppi di « $n-p$; quelli di uno stesso gruppo sono formati con gli elementi di p orizzontali « fisse e di ciascuna successivamente delle altre orizzontali; e lo stesso dicasi delle « verticali. Inoltre, per ciascun gruppo, bisogna scegliere le p orizzontali e le p ver- « ticali fisse in modo, che il determinante di ordine p formato con i loro elementi « comuni non sia nullo.

« Sotto tali condizioni si annulleranno tutti i determinanti di ordine $p+1$ estratti « dalla detta matrice, ed altresì tutti quelli di ordine superiore a $p+1$ ».

6° Si dànno dei casi in cui il numero dei determinanti da annullare si abbassa. Così: se $m=n$, e se la matrice [1] è simmetrica (vale a dire se $a_{hi}=a_{ih}$); allora uno stesso determinante potrà comparire due volte (soltanto con le orizzontali scambiate con le verticali); e quindi dovrà esser contato una volta sola.

In particolare: sia $m=n$, $p=n-2$; e sia simmetrica la matrice [1], che allora rappresenta un determinante. Applicando la regola ora enunciata, basterà, in generale, annullare $(n-p)^2=4$ suddeterminanti in [1], due complementari di elementi della 1ª orizzontale e due della 2ª. Scegliendo suda_{12} fra i due primi e suda_{21} fra gli altri due, e notando che attualmente sud$a_{12}=$ suda_{21}, abbiamo in sostanza da annullare tre suddeterminanti (Questa osservazione si applica ai §§ 9-2°, 13, 29, 31-3°, 37).

Ancora: sia $m=n$, $p=n-3$, e sia simmetrico il determinante [1]. Basterà scegliere tre orizzontali e sopprimerne da [1] due alla volta, e così pure scegliere tre verticali e sopprimerne due per volta: si hanno allora $(n-p)^2=9$ suddeterminanti di ordine $p+1=n-2$ da annullare. Ora, se si scelgono le tre verticali omologhe alle tre orizzontali, questi suddeterminanti si riducono a sei distinti (Questo è il caso dei §§ 9-4°, 30, 31-4°).

Da ultimo: sia $m=n-1$, $p=n-3$, e sia $a_{hi}=a_{ih}$ per h e i minori di n. Si hanno da annullare $(n-p)(m-p)=6$ determinanti di ordine $n-2$; ma è facile scorgere che la scelta si può fare in guisa che due di essi riescano eguali, e però il numero si riduce a cinque (Questo è il caso del § 18-4°).

FINE.

Ermanno Loescher
FIRENZE - TORINO - ROMA

Pubblicazioni dello stesso Editore

EUCLIDE

LIBRO QUARTO

PER

ORESTE TOGNOLI

Professore di Matematica nel R. Liceo Ennio Quirino Visconti di Roma.

Prezzo Lire **0,80**

LIBRO QUINTO

PER

EUGENIO BERTINI

PROF. DI MATEMATICA NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA.

Seconda Edizione riveduta.

Prezzo Lire **1,20**

LIBRO SESTO

PER

ORESTE TOGNOLI

Seconda Edizione riveduta e migliorata.

Prezzo Lire **2,50**

LA GEOMETRIA INTUITIVA

PER LE

SCUOLE TECNICHE, GINNASIALI, NORMALI E PROFESSIONALI

CON SCELTI ESERCIZI

DI

ORESTE VERGER E **GIOVANNI GARBIERI**

Professore nel R. Istituto Tecnico di Roma. — Professore nella R. Università di Padova.

TERZA EDIZIONE NOTEVOLMENTE ACCRESCIUTA

Un vol. in-8° di pag. VIII-159 — Lire **2.**

Degli Stessi

PLANIMETRIA E STEREOMETRIA

(Esercizi e problemi in correlazione alla Geometria Intuitiva)

PER LE

SCUOLE TECNICHE, GINNASIALI, NORMALI E PROFESSIONALI

Un vol. in-8° di pag. VIII-96 — Lire **1,50**

TORINO — ERMANNO LOESCHER, EDITORE — **ROMA-FIRENZE**

Pubblicazioni dello stesso Editore.

R. DE PAOLIS

ELEMENTI DI GEOMETRIA

Un vol. in-8° di pag. VIII-479 — L. 6.

M. RICOTTI

Elementi di Aritmetica ragionata e di Algebra

AD USO DELLE SCUOLE SECONDARIE CLASSICHE

esposti giusta le istruzioni e i programmi 16 giugno 1881

Vol. I. **Elementi di Aritmetica ragionata**

Un volume in-8° di pag. VIII-224 — Lire 2

Vol. II. **Elementi di Algebra**

Un volume in-8° di pagine IV-142 — Lire 2

O. VERGER

INTRODUZIONE ALL'ALGEBRA

con 1000 e più esercizi e problemi

AD USO DEGLI ISTITUTI TECNICI (1° BIENNIO) E NAUTICI DEL REGNO

E DEI CORSI PREPARATORI AGLI ESAMI DI MODENA

Un vol. in-8° di pag. VIII-328 — Lire 3,50

Dello Stesso

LEZIONI DI TRIGONOMETRIA RETTILINEA

SVOLTE SECONDO I PROGRAMMI GOVERNATIVI

agli allievi degli

ISTITUTI MILITARI, TECNICI E NAUTICI DEL REGNO

in-8° di pag. VIII-148 — L. 2,50.

TORINO — ERMANNO LOESCHER, EDITORE — ROMA-FIRENZE